1 連立方程式の式変形

例題 1

連立方程式

$$\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots① \\ x^2-y^2=10 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

を満たす$(x,\ y)$を求めよ．

解答例 1

①より，$y=x-2$ であり，これを②に代入すると

$$x^2+(x-2)^2=10 \quad \cdots\cdots③$$
$$(x+1)(x-3)=0$$
$$x=-1,\ 3$$

これを①に代入すると

$x=-1$ のとき　$y=-3$

$x=3$ のとき　$y=1$

これより

$$(x,\ y)=(-1,\ -3),\ (3,\ 1)$$

である．

解答例 2

①より，$y=x-2$ であり，これを②に代入すると

$$x^2+(x-2)^2=10 \quad \cdots\cdots③$$
$$(x+1)(x-3)=0$$
$$x=-1,\ 3$$

これを②に代入すると

$x=-1$ のとき　$y^2=9$　$y=\pm 3$

$x=3$ のとき　$y^2=1$　$y=\pm 1$

これより

$$(x,\ y)=(-1,\ \pm 3),\ (3,\ \pm 1)$$

である．

2 つの解法で得られた答えは違うものになりましたが，どちらが正しくどちらが誤っているのか，また，その誤答の原因を考えてみましょう．

はじめに①，②より y を消去した x の方程式③を考えましたが，これは連立方程式①かつ②に対して必要条件になります．

すなわち

①かつ②　$\Longrightarrow$　③

が成り立ちますが，逆が成り立つとは限りません．

このとき，③と①を連立すれば②を導けますから

①かつ②　$\Longleftrightarrow$　③かつ①

が成り立ちます．

しかし，③と②を連立しても①は導けないので

①かつ②　$\Longrightarrow$　③かつ②

となり，③かつ②は，はじめの連立方程式の必要条件になっています．

以上のことから，**解答例 1 では必要十分条件**，**解答例 2 では必要条件**によって式変形を行っていたのです．したがって，**解答例 1** が正解となります．

一般に，連立方程式に対して次のような同値変形（必要十分である変形）を行うことができます．

1

$$\begin{cases} y=f(x) \\ G(x,\ y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ G(x,\ f(x))=0 \end{cases}$$

2 $a \neq 0$ **のもとで**

$$\begin{cases} F(x,\ y)=0 \\ G(x,\ y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} aF(x,\ y)+bG(x,\ y)=0 \\ G(x,\ y)=0 \end{cases}$$

3 $ad-bc \neq 0$ **のもとで**

$$\begin{cases} F(x,\ y)=0 \\ G(x,\ y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} aF(x,\ y)+bG(x,\ y)=0 \\ cF(x,\ y)+dG(x,\ y)=0 \end{cases}$$

例題 2

連立方程式

$$\begin{cases} x^2+xy=y & \cdots\cdots① \\ y^2+xy=x & \cdots\cdots② \end{cases}$$

を満たす $(x,\ y)$ を求めよ．

解答例

①－②より

$$x^2-y^2=y-x$$

$$(x-y)(x+y+1)=0$$

$$x-y=0 \quad \text{または} \quad x+y=-1 \quad \cdots\cdots③$$

①＋②より

$$x^2+y^2+2xy=x+y$$

$$(x+y)(x+y-1)=0$$

$$x+y=0 \quad \text{または} \quad x+y=1 \quad \cdots\cdots④$$

このとき

$$①\text{かつ}② \iff ③\text{かつ}④$$

$$\iff \begin{cases} x-y=0 \\ \quad\text{または} \\ x+y=-1 \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} x+y=0 \\ \quad\text{または} \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-y=0 \\ \quad\text{かつ} \\ x+y=0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} x-y=0 \\ \quad\text{かつ} \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\iff (x,\ y)=(0,\ 0) \quad \text{または} \quad \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

である．

例題２の式変形に見られたように，x，y に関して**対称な形の連立方程式では和と差をとり，対称式や交代式の形をつくって因数分解**していきます．これにより，対称性を崩すことなく同値変形することができます．

例題 3

a，b を 0 でない実数とし

$$A(x)=x^3-2ax^2+(a^2+b+1)x-ab-a-b$$

$$B(x)=x^2-ax+b$$

とおくとき，連立方程式

$$A(x)=0 \quad \text{かつ} \quad B(x)=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

が共通な実数解をもつための a，b の条件，およびそのときの共通解を求めよ．

解答例

$A(x)$ を $B(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とおき，実際に割り算を行うと

$$Q(x)=x-a,\quad R(x)=x-a-b$$

となる．このとき

$$A(x)=B(x)\times Q(x)+R(x)$$

が成り立つことにより

$$\begin{cases} A(x)=0 \\ B(x)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} B(x)=0 \\ R(x)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-ax+b=0 & \cdots\cdots① \\ x-a-b=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

であり，$(*)$ が共通な実数解をもつための a，b の条件は②の解 $x=a+b$ が①の解となることであるから

$$(a+b)^2-a(a+b)+b=0$$

$$b^2+ab+b=0$$

$b\neq 0$ より

$$a+b+1=0$$

である．このときの実数解は

$$x=a+b=-1$$

である．

例題３の式変形のポイントは，割り算の公式を利用した同値変形にあります．
この考え方を連立方程式以外の形に利用したものに，**ユークリッドの互除法**があります．これは，割り算の公式を利用して**余りを求めるアルゴリズム**です．