2016 年度 九州大学 前期 物理

〔1〕 単振動と壁での反射

出題範囲	単振動
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	問 1 は，基礎的な単振動の問題である。非常によく出題されるテーマであるから，しっかりとマスターしておいてほしい。(3)のような位置の関数を問う（sin や cos で表させる）問題はあまりなじみがないかもしれないが，時折問われることがあるので，こちらもできるようにしてほしい。 問 2 からは，典型問題から外れた問題となる。B が壁で反射して戻ってくる過程を含んだ周期運動をするようになるから，A，B それぞれの動きをきちんと追うことが大事である。図を描いて何が起こっているかをしっかりと把握できれば，そこまで難しい問題ではない。 問 3 は，問 2 と似ているが，こちらのほうが運動が複雑で難しい問題となっている。(1)からいきなり一般的な L_p を求める問題が出されているが，やはりここは問 2 と同様，一番簡単な L_0 の場合を考えてから一般的な形にもっていくほうがよいだろう。こちらも図を描いて何が起こっているかを把握することが大切である。

解答

問 1 **(1)** $\sqrt{\dfrac{k}{M_A+M_B}}x_0$ **(2)** $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M_A+M_B}{k}}$

(3) $x_A(t)=\sqrt{\dfrac{M_A}{M_A+M_B}}x_0\sin\left\{\sqrt{\dfrac{k}{M_A}}(t-t_0)\right\}$

(4) $x_B(t)=\sqrt{\dfrac{k}{M_A+M_B}}x_0(t-t_0)$

問 2 **(1)** $D_0=\dfrac{\pi x_0}{2}\sqrt{\dfrac{M_A}{M_A+M_B}}$

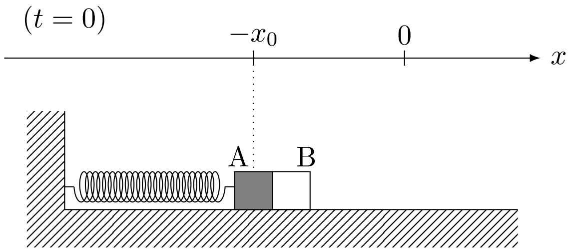
$t_1=t_0+\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M_A}{k}}$ あるいは $t_1=\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M_A}{k}}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{M_B}{M_A}}\right)$

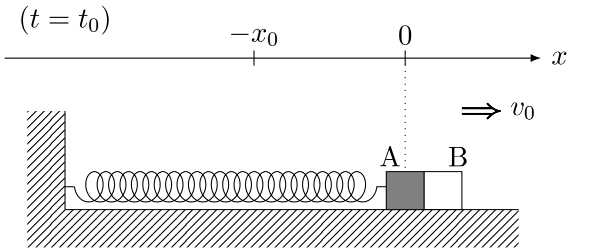
(2) 解説中に記載 **(3)** $D_p=\pi\left(p+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\dfrac{M_A}{M_A+M_B}}x_0$

問 3 **(1)** $L_p=(p+1)\dfrac{\pi x_0}{\sqrt{2}}$ **(2)** 解説中に記載

解説

問 1





(1)

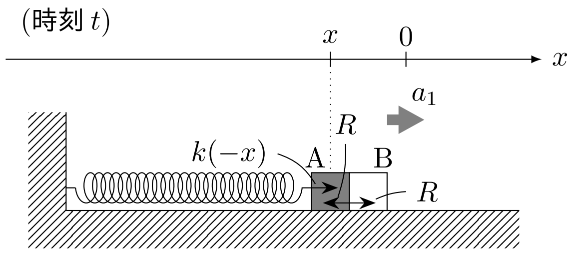
エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}k{x_0}^2=\frac{1}{2}M_{\mathrm{A}}{v_0}^2+\frac{1}{2}M_{\mathrm{B}}{v_0}^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{v_0=\sqrt{\frac{k}{M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}}}}x_0}$$

（別解）

単振動の振動中心での速度は $v=A\omega$ （A は振幅，ω は角振動数）と表されることを利用する。



運動方程式は，2 物体の加速度 a_1 と 2 物体間にはたらく抗力 R を用いて次のように表される。

$$\mathrm{A}：M_{\mathrm{A}}a_1=-kx-R$$

$$\mathrm{B}：M_{\mathrm{B}}a_1=R$$

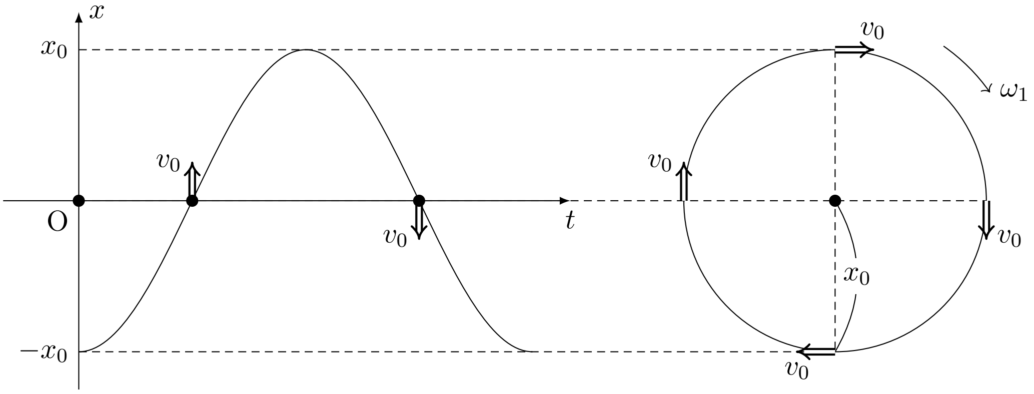
辺々足して，

$$(M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}})\,a_1=-kx$$

となる。ここで，単振動の加速度 a は，その角振動数 ω を用いて $a=-\omega^2x$ と表されることから，この単振動の角振動数 ω_1 は，

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}}}}$$

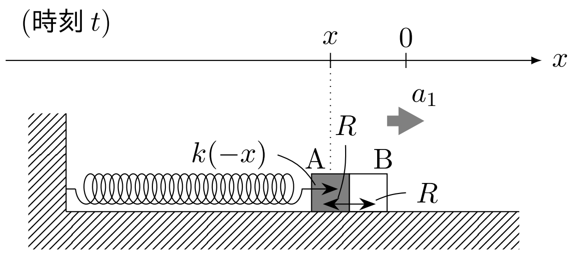
等速円運動を射影したものが単振動であることから，もとの等速円運動を考えると，単振動の速度の最大値が等速円運動の速さと一致し，振幅が半径と一致していることがわかる。



よって，

$$v_0 = x_0\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}}x_0$$

(2)



運動方程式は，

$$\mathrm{A}：M_\mathrm{A}a_1 = -kx - R$$

$$\mathrm{B}：M_\mathrm{B}a_1 = R$$

辺々足して，

$$(M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B})\,a_1 = -kx$$

となり，$a_1 = -{\omega_1}^2 x$ と表されることから，

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}}$$

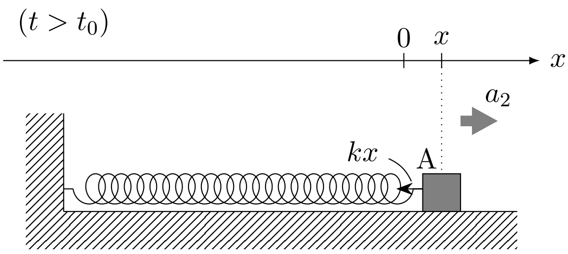
よって，この単振動の周期 T_1 は,

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}{k}}$$

$x=-x_0$ から $x=0$ までは $\dfrac{1}{4}$ 周期なので,

$$\boldsymbol{t_0} = \frac{1}{4}T_1 \boldsymbol{= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}{k}}}$$

(3)



$t > t_0$ における A の運動方程式は,

$$M_\mathrm{A}a_2 = -kx$$

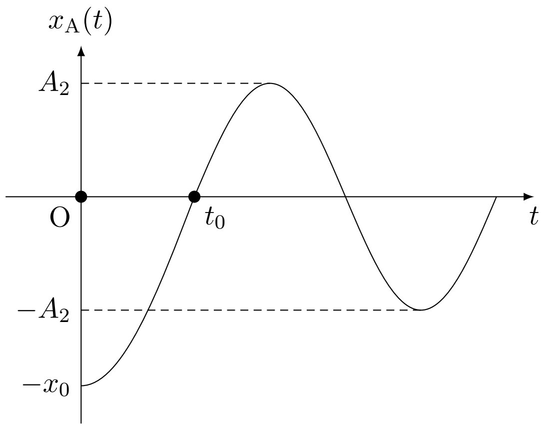
$a_2 = -{\omega_2}^2 x$ から，$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{M_\mathrm{A}}}$ で，周期は $T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\dfrac{M_\mathrm{A}}{k}}$ である。

また，振幅 A_2 について，エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}M_\mathrm{A}{v_0}^2 = \frac{1}{2}k{A_2}^2$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{M_\mathrm{A}}{k}}v_0 = \sqrt{\frac{M_\mathrm{A}}{k}}\sqrt{\frac{k}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}}x_0$$
$$= \sqrt{\frac{M_\mathrm{A}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}}x_0$$

また，運動の様子は次のようになる。



したがって，グラフの形から，

$$x_A(t) = A_2 \sin\{\omega_2(t - t_0)\}$$
$$= \sqrt{\frac{M_A}{M_A + M_B}} x_0 \sin\left\{\sqrt{\frac{k}{M_A}}(t - t_0)\right\}$$

（別解）

振幅 A_2 の求め方について，（1）と同様に考えれば，$v_0 = A_2\omega_2$ であるから，

$$A_2 = \frac{v_0}{\omega_2} = \sqrt{\frac{M_A}{k}}\sqrt{\frac{k}{M_A + M_B}}x_0 = \sqrt{\frac{M_A}{M_A + M_B}}x_0$$

（4）

$t > t_0$ において B は力を受けないから等速直線運動をする。$t = t_0$ で $x_B = 0$ なので，

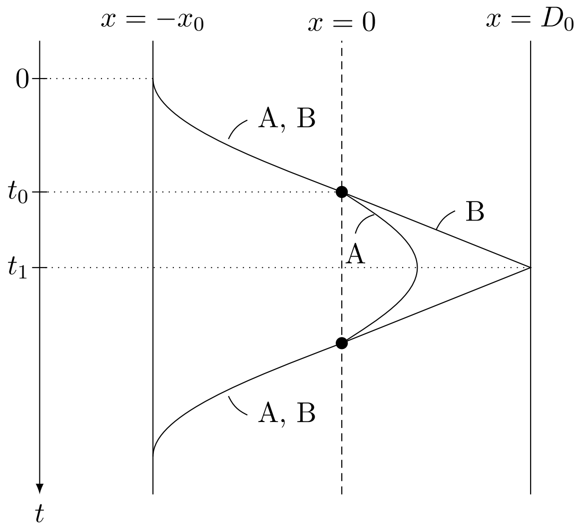
$$x_B(t) = v_0(t - t_0) = \sqrt{\frac{k}{M_A + M_B}} x_0 (t - t_0)$$

問 2

（1）

B と壁との衝突は弾性衝突であるから，B は $t = t_0$ から再び A と接触するまで速さ v_0 で運動する。A と B が一体となるとき，A に対する B の相対速度は 0 であるから，2 物体が再び接触するとき，A は x 軸負方向に速さ v_0 で運動しなければならない。よって，接触は $x = 0$ で起こることがわかる。

壁の位置 x について，x を徐々に大きくしたとき，$x = D_0$ で初めて周期運動が観測されることから，この時の運動は次の図のようになることがわかる。



図より，A と B が離れてから再び接触するまでに，時間 $\dfrac{1}{2}T_2$ だけかかることがわかる。よって，

$$2D_0 = v_0 \cdot \frac{1}{2}T_2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{D_0} = \frac{1}{4}v_0T_2 = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{k}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}}x_0\cdot 2\pi\sqrt{\frac{M_\mathrm{A}}{k}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi x_0}{2}\sqrt{\frac{M_\mathrm{A}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}}}$$

また，t_1 について，

$$v_0(t_1 - t_0) = D_0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{t_1} = t_0 + \frac{D_0}{v_0}\left(= t_0 + \frac{1}{4}T_2\right)$$

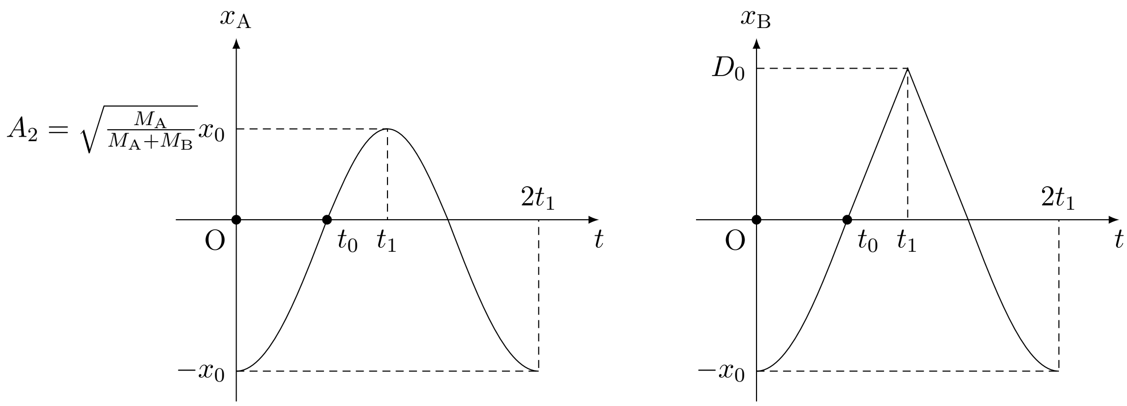
$$\boldsymbol{= t_0 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M_\mathrm{A}}{k}}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}{k}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M_\mathrm{A}}{k}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M_\mathrm{A}}{k}}\left(1+\sqrt{1+\frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}}}\right)}$$

(2)

(1) の図で示したようになるから，グラフは次のようになる。



(3)

B が $x=0$ に戻って来たときに，A が $x=0$ で x 軸負方向に速さ v_0 で運動していればよい。よって，$x=D_p$ に壁があるときは，$x=D_0$ のときと比べて A がもう p 周期だけ単振動していればよいから，A と B が再び衝突するまでにかかる時間は $\frac{1}{2}T_2+pT_2=\left(p+\frac{1}{2}\right)T_2$ となる。したがって，

$$2D_p=v_0\cdot\left(p+\frac{1}{2}\right)T_2$$

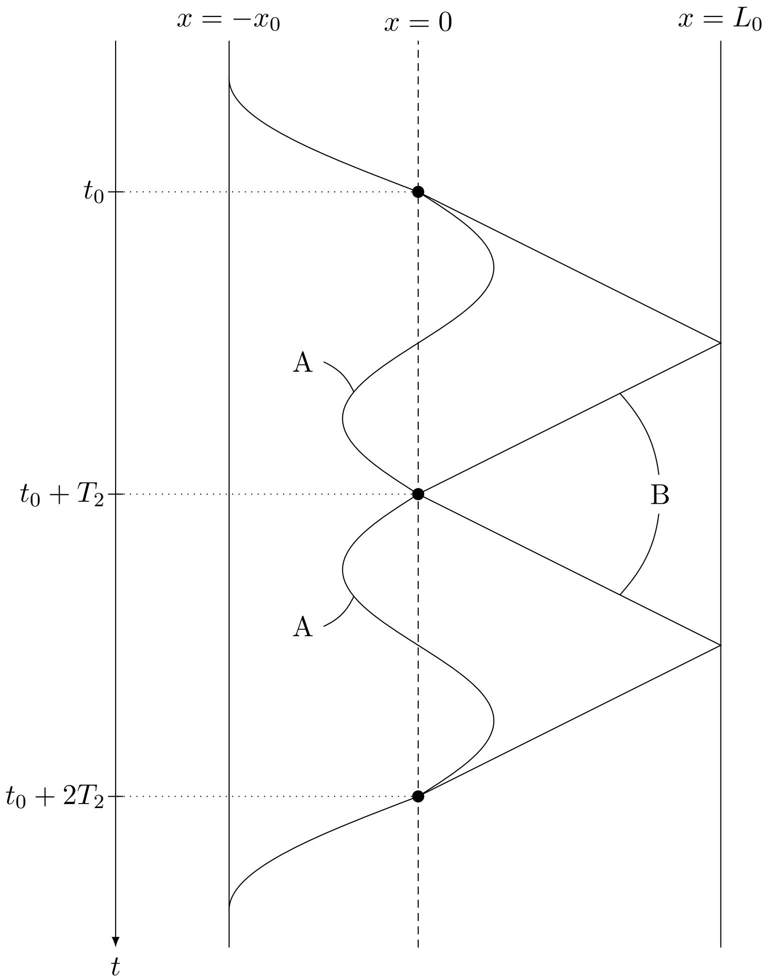
$$\therefore\quad \boldsymbol{D_p}=\left(p+\frac{1}{2}\right)v_0\cdot\frac{T_2}{2}=\left(p+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{k}{M_A+M_B}}x_0\cdot\pi\sqrt{\frac{M_A}{k}}$$

$$\boldsymbol{=\pi\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{M_A}{M_A+M_B}}x_0}$$

問 3

(1)

A と B の衝突は弾性衝突であることに注意する。A と B が $x=0$ で衝突するとき，A は速さ v_0 で x 軸正方向に，B は速さ v_0 で x 軸負方向に進んでいる。運動量保存則とはねかえり係数の式を用いれば，質量と速さが等しい 2 物体（速度は逆向き）が正面から弾性衝突すると速度が交換されることがわかる（9 ページの Check!! 参照）。以上のことを踏まえて，まず，$x=L_0$ に壁があるときについて考えると，小物体 A，B の運動は次の図のようになる。



上図より，B が A と離れてから A と衝突するまでにかかる時間は T_2 となることがわかる。よって，

$$2L_0 = v_0 \cdot T_2$$

という式が立つ。同様に考えると，$x = L_p$ に壁があるときは，$x = L_0$ に壁があるときと比べて，A と B が離れてから衝突するまでにかかる時間が pT_2 だけ増えるから，

$$2L_p = v_0 \cdot (T_2 + pT_2)$$

$$\therefore \quad L_p = v_0 \cdot (p+1) \cdot \frac{1}{2} T_2$$

ここで，$M_\mathrm{A} = M_\mathrm{B} = M$ より，

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{M_\mathrm{A} + M_\mathrm{B}}} x_0 = \sqrt{\frac{k}{2M}} x_0$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

であるから，

$$\boldsymbol{L_p} = \sqrt{\frac{k}{2M}}x_0 \cdot (p+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

$$= \boldsymbol{(p+1)\frac{\pi x_0}{\sqrt{2}}}$$

◆ **Check!!**

速度の交換

質量と速さが等しい 2 物体が，正面から弾性衝突するときを考える（速度は逆向きであることに注意）。

（衝突前）　　　　　　　　　　　　（衝突後）

図の右向きを速度の正方向とすると，運動量保存則より，

$$Mv_0 + M(-v_0) = Mv_A + Mv_B \qquad \cdots\cdots①$$

はねかえり係数の式より，

$$-1 = \frac{v_A - v_B}{v_0 - (-v_0)} \qquad \cdots\cdots②$$

これらを整理して，

$$① \Leftrightarrow v_A + v_B = 0$$

$$② \Leftrightarrow v_A - v_B = -2v_0$$

となる。2 式を解くと，

$$v_A = -v_0, \quad v_B = v_0$$

となって，速度は交換されることがわかる。

(2)

(1) の図が求めるグラフの概形となっている。$x_{\mathrm{A}}(t)$ が最大となるのは，

$$x = A_2 = \sqrt{\frac{M_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}}}}x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_0 \quad (\because\ M_{\mathrm{A}} = M_{\mathrm{B}} = M)$$

のときである。

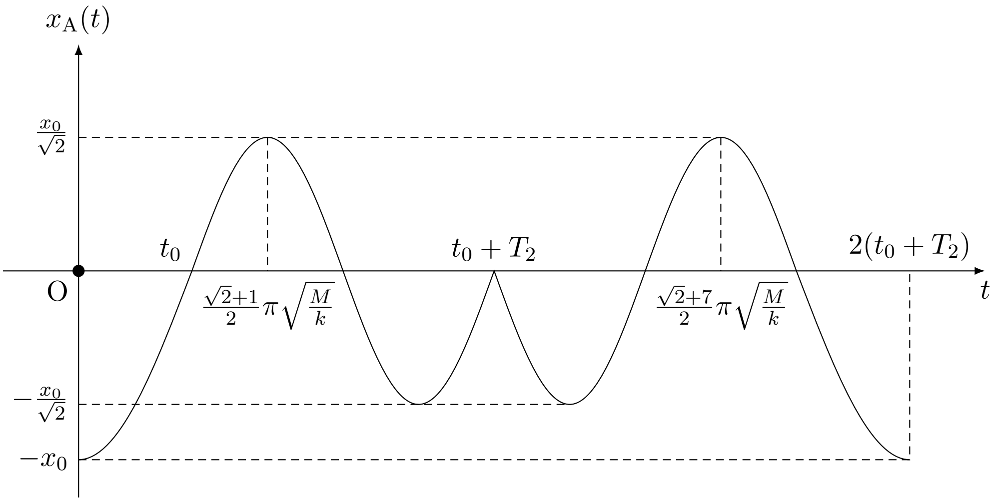
$$t_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}}}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2M}{k}}$$

に注意すると，$x_{\mathrm{A}}(t)$ が最大となる時刻は，

$$\begin{aligned}1\text{ 回目：}\quad t_0 + \frac{1}{4}T_2 &= t_0 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}} \\ &= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2M}{k}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \quad \left(= t_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_0 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}t_0\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\text{ 回目：}\quad (t_0 + T_2) + \frac{3}{4}T_2 &= t_0 + \frac{7}{4}T_2 \\ &= t_0 + \frac{7\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+7}{2}\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \quad \left(= \frac{2+7\sqrt{2}}{2}t_0\right)\end{aligned}$$

よって，$x_{\mathrm{A}}(t)$ は以下のようなグラフになる。



（ 森田涼介，山崎裕太郎，岡田和也，仲里佑利奈 ）

2016年度 九州大学 前期 物理

〔2〕　電流の抵抗とホール効果

出題範囲	荷電粒子の運動，電流
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	典型問題の集合である。 前半は，荷電粒子の運動から電流を求め，そこからオームの法則と抵抗の表式を導く問題である。電流を荷電粒子の運動から求める問題はよく出題されるので，確実に解けるようにしたい。抵抗の基本式 $R=\rho\dfrac{l}{S}$ はあまり問われることがなく忘れがちなので，試験前にちゃんと確認するようにしてほしい。また，問 4 は温度による抵抗率の変化の問題である。あまり問われないテーマだが，数値を代入するだけなのでしっかり対応してほしい。有効数字や桁の間違いには注意が必要である。 後半は，荷電粒子にはたらくローレンツ力と静電気力のつり合いから電子の数密度を求める問題である。問 6 まではかなり典型的な問題であるので，こちらもしっかりと解いてほしい。

解答

問 1　$I=nabve$〔A〕　　**問 2**　$v=\dfrac{eV}{kl}$〔m/s〕

問 3　$R=\dfrac{kl}{nabe^2}$〔Ω〕，$\rho=\dfrac{k}{ne^2}$〔Ω·m〕

問 4（1）　1.00 Ω

（2）　電流の大きさ：3.00 A，ジュール熱：$W=3.24\times10^4$ J

（3）　1.32 Ω

（4）　解説中に記載

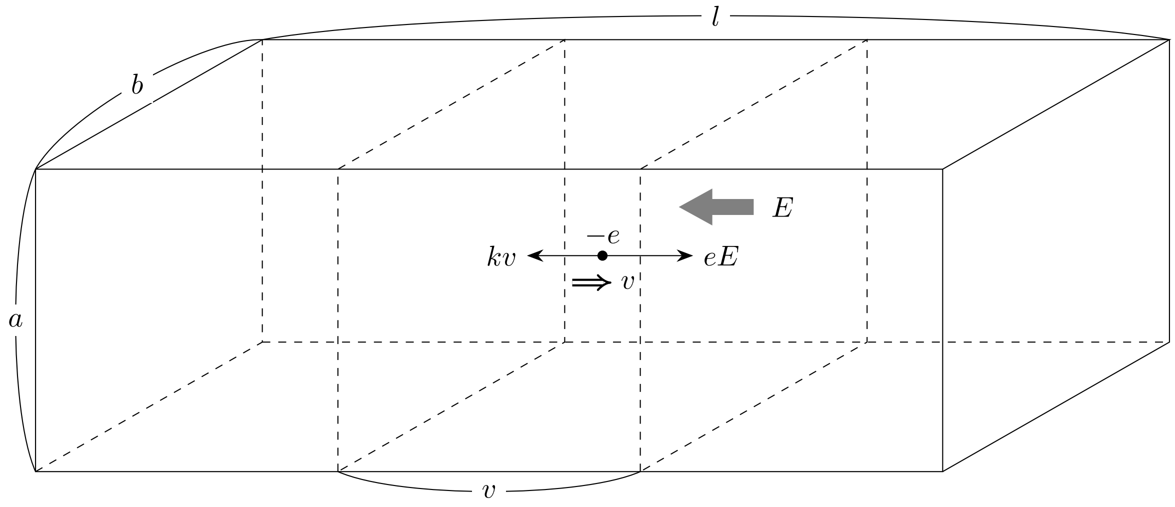
問 5　力の向き：x 軸正方向，大きさ：$f_M=evB$〔N〕

問 6　力の向き：x 軸負方向，大きさ：$f_E=eE$〔N〕

問 7　$E=vB$　　**問 8**　$\dfrac{IB}{aeV_H}$〔個/m^3〕

解説

問 1



単位時間あたりに，ある断面を通過する総電荷量が電流の大きさである。単位時間あたりに図の右側の破線で描かれた断面を通過するのは，断面積 ab，長さ v の直方体中の自由電子であるから，求める電流の大きさは，

$$\boldsymbol{I} = n \cdot abv \cdot e \boldsymbol{= nabve}\,〔\mathrm{A}〕 \qquad \cdots\cdots ①$$

問 2

導体中にかかっている電場の大きさを E とする。電気量 $1\,\mathrm{C}$ の荷電粒子を E に逆らって距離 l だけ動かすのに必要な仕事の大きさが V だから，$V = El$ となる。よって力のつり合いより，

$$kv = eE$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{v} = \frac{eE}{k} \boldsymbol{= \frac{eV}{kl}}\,〔\mathrm{m/s}〕 \qquad \cdots\cdots ②$$

問 3

①，②より，

$$I = nabe \cdot \frac{eV}{kl} = \frac{nabe^2}{kl}V$$

$$\therefore \quad V = \frac{kl}{nabe^2}I$$

オームの法則 $V = RI$ と比較して，

$$\boldsymbol{R = \frac{kl}{nabe^2}}\ 〔\Omega〕$$

また，この式を抵抗値 R の基本式 $R = \rho\dfrac{l}{S}$ （ρ：抵抗率，l：抵抗の長さ，S：導体の断面積）と比較して，

$$\boldsymbol{\rho = \frac{k}{ne^2}}\ 〔\Omega\cdot\mathrm{m}〕$$

問 4

有効数字は 3 桁であることに注意する。

(1)

温度 t〔°C〕における抵抗を R_t〔Ω〕，抵抗率を ρ_t〔Ω · m〕とおくと，$R_t = \rho_t\dfrac{l}{ab}$ と書くことができ，

$$R_{20} = \rho_{20}\frac{l}{ab} = \left(1.60\times10^{-8}\right)\cdot\frac{10.0}{\left(4.00\times10^{-4}\right)^2} = \mathbf{1.00\ \Omega}$$

(2)

オームの法則より，電流の大きさを I〔A〕とすると，

$$I = \frac{V}{R_{20}} = \frac{3.00}{1.00} = \mathbf{3.00\ A}$$

よって，1.00 時間 ($= 1.00\times60\times60\,\mathrm{s}$) に発生するジュール熱を W〔J〕とすると，

$$W = Pt = VIt = 3.00\times3.00\times(60\times60) = \mathbf{3.24\times10^4\ J}$$

(3)

問題文より，$\rho_t = \rho_0(1+\beta t)$〔Ω · m〕と与えられているので，$R_t = \rho_0(1+\beta t)\dfrac{l}{ab}$ と書くことができ，

$$R_{100} = \rho_0(1+4.30\times10^{-3}\times100)\times\frac{10.0}{(4.00\times10^{-4})^2}$$

$$1.00 = \rho_0(1+4.30\times10^{-3}\times20)\times\frac{10.0}{(4.00\times10^{-4})^2}$$

$$\therefore \quad R_{100} = \frac{1 + 4.30 \times 10^{-3} \times 100}{1 + 4.30 \times 10^{-3} \times 20}$$

$$= \frac{1.43}{1.086} \fallingdotseq \mathbf{1.32\ \Omega}$$

(4)

温度を上げると抵抗値が増加する。抵抗値の表式を見てみると，

$$R = \frac{kl}{ne^2ab}\,〔\Omega〕$$

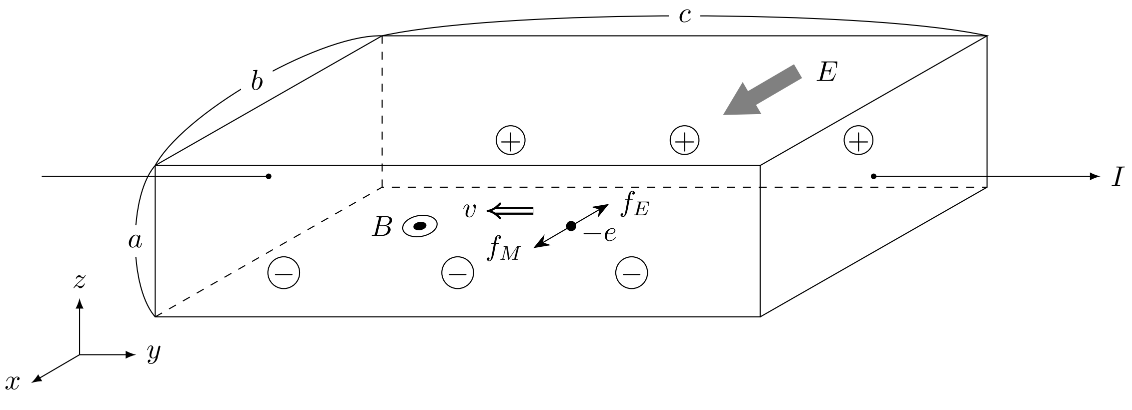
とある。ここで，e は電子のもつ電荷であるから，これらは温度によって変化しない定数だと考えられる。

また，n は単位体積中の電子の数である。温度上昇による導体の膨張はごくわずかであるから，体積変化は無視でき，導体の大きさに関する数値である a, b, l の変化はないと考えられる。電子は導体中に閉じ込められていて導体の体積は変化しないから，n も不変と考えられる。

よって，変化するのは抵抗力の比例定数 k であり，これが大きくなって R も大きくなっているのだと考えられる。したがって，温度上昇により k が大きくなる理由を説明すればよいことになる。いま k は抵抗力の係数であり，この抵抗力は金属イオン等との衝突によると問題文中にあることから，温度上昇と金属イオンの運動について記述すればよいことがわかる。以上の考察により，以下のような解答ができる。

金属イオンの熱運動が激しくなり，金属イオンが自由電子に及ぼす抵抗力，つまり抵抗力の比例定数 k が大きくなるから。（55 文字）

問 5



フレミングの左手の法則より，ローレンツ力の向きは **x 軸正方向**で，その大きさは $\boldsymbol{f_M = evB}$〔N〕である。

問 6

ローレンツ力により x 軸正方向の面に電子が集まるから，試料の x 軸正方向の面が負電荷，x 軸負方向の面が正電荷を帯びて，x 軸正方向に大きさ E の電場が発生する。この電場により電子にかかる力の向きは **x 軸負方向**で，その大きさは $\boldsymbol{f_E = eE}$〔N〕である。

問 7

力のつり合いより，

$$f_M = f_E$$

$$\Leftrightarrow Bev = eE$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{E = vB}$$

問 8

電流について，問 1 と同様に考えて，

$$I = n \cdot abv \cdot e = nabve$$

また，電位差と電場について，問 2 と同様に考えて，

$$V_H = Eb = vBb \qquad (\because \text{問 } 7)$$

指定された文字の中に v はない（電子の速度 v は測定できない）から，v を消去するために辺々割って，

$$\frac{I}{V_H} = \frac{nabve}{vBb} = \frac{nae}{B}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{n = \frac{IB}{aeV_H}} \text{〔個}/\mathrm{m}^3\text{〕}$$

（森田涼介，山崎裕太郎，岡田和也，岡部律心）

2016 年度 九州大学 前期 物理

〔3〕　複数レンズを通したときの像

出題範囲	レンズ
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	レンズの公式の証明から始まり，典型的なレンズの問題を扱っていく。レンズの公式，倍率公式を正しく使えれば，比較的容易に解けるはずである。 　問 5 からは，レンズを 2 枚並べた問題を扱っていく。レンズが何枚あろうと，それぞれのレンズについてレンズの公式と倍率公式を立てていけば解けるので，焦ったりしないで落ち着いて解いてほしい。

解答

問 1　① a　② b　③ f

④ $b-f$　⑤ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$

問 2　距離：$80\,\mathrm{cm}$，倍率：$\dfrac{1}{4}$

問 3　解説中に記載

問 4　$48\,\mathrm{cm}$

問 5　$\dfrac{g}{f_1}$

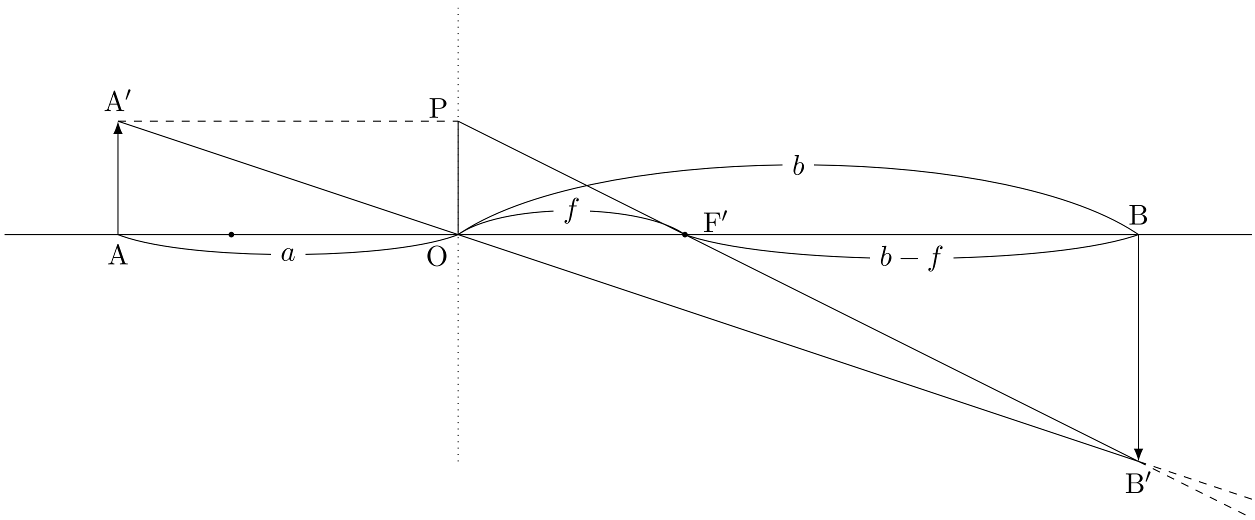
問 6　$\dfrac{(f_2+h)g}{f_1f_2}$

問 7　②

問 8　$\dfrac{(f_1-f_3+g)(f_2+h)}{f_2f_3}$

解説

問 1



$\triangle \mathrm{AA'O} \backsim \triangle \mathrm{BB'O}$ から，

$$\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{\frac{a}{b}} \quad ①, ②$$

また，$\triangle \mathrm{OPF'} \backsim \triangle \mathrm{BB'F'}$ から，

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{BB'}} = \frac{\mathrm{OF'}}{\mathrm{BF'}} = \boldsymbol{\frac{f}{b-f}} \quad ③, ④$$

ここで，$\mathrm{AA'} = \mathrm{OP}$ であるから，

$$\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{BB'}}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{f}{b-f}$$

分子と分母を入れ換えたあと両辺を b で割って，

$$\frac{1}{a} = \frac{b-f}{bf} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}} \quad ⑤$$

以上より，答えは，

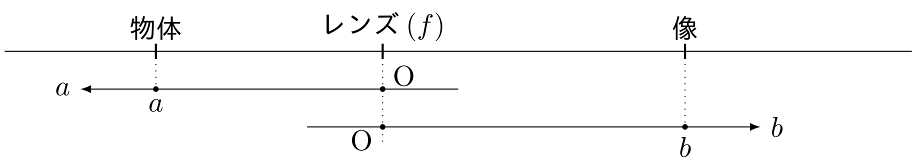
① $\boldsymbol{a}$，　② $\boldsymbol{b}$，　③ $\boldsymbol{f}$，　④ $\boldsymbol{b-f}$，　⑤ $\boldsymbol{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$

問 2

まず，この問題を解くにあたって必要とされる前提知識についておさらいしておこう。

◆ **Check!!**

レンズの公式・倍率の公式



a：物体〜レンズ間距離を座標で表したもの。レンズを原点に，左側が a 軸正の向きとなるようにとる。

b：レンズ〜像間距離を座標で表したもの。レンズを原点に，右側が b 軸正の向きとなるようにとる。

f：焦点距離。凹レンズの場合は -1 倍して代入。

このとき，レンズの公式は，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

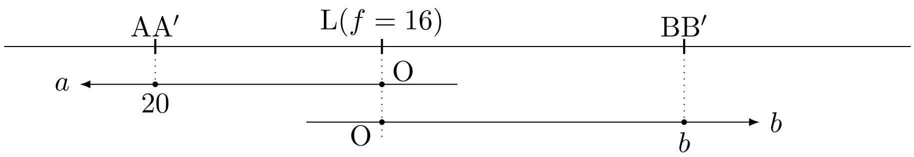
と表される（a, b は負の値をとってもよい）。

また，倍率の公式は，

$$m=-\frac{b}{a}$$

ただし，$m>0$ で正立像，$m<0$ で倒立像となり，$|m|$ が倍率である。

以下，距離の単位はすべて cm である。



レンズの公式に $a=20$，$f=16$ を代入して，

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{b}=\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b}=\frac{1}{16}-\frac{1}{20}=\frac{5-4}{80}=\frac{1}{80}$$

$$\therefore \quad b=80$$

よって，物体 AA′〜スクリーン間距離は $a+b=100$ となる。

物体 AA′ とスクリーンを固定してレンズのみを右に動かすと，ある a でスクリーンに像が現れる。レンズの公式に $b=100-a$，$f=16$ を代入して，

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{100-a}=\frac{1}{16}$$

$$\frac{100}{a(100-a)}=\frac{1}{16}$$

$$\therefore \quad (a-20)(a-80)=0$$

よって，$a=20$，80 となる。

ここで，スクリーンを動かす前 $a = 20$ であったことから，求める物体 AA$'$〜レンズ L 間距離は，**80 cm** である。

また，このとき $b = 20$ より，求める倍率は，

$$\left|-\frac{b}{a}\right| = \frac{20}{80} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

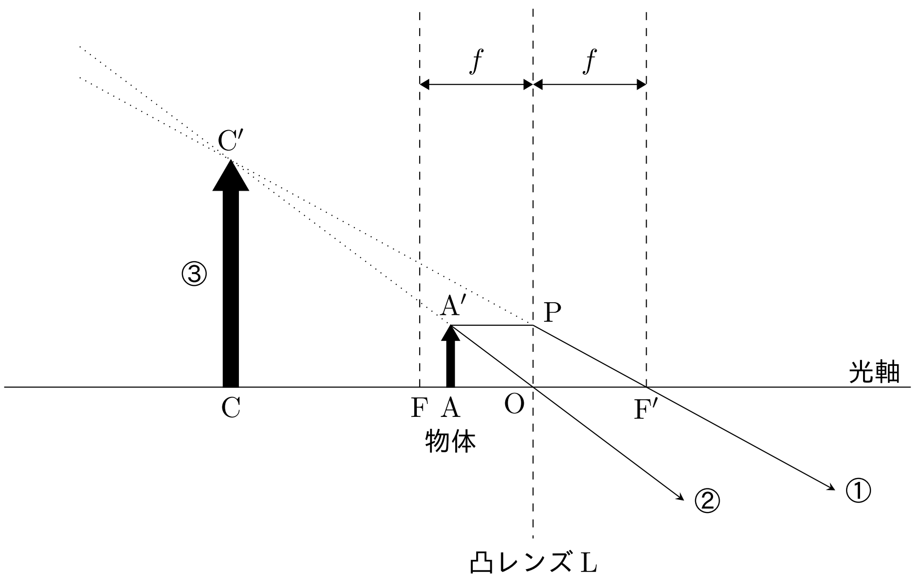
※補足

今回，物体 AA$'$〜スクリーン間距離が 100 cm のときの a の値についての方程式は，整理することで 2 次方程式となる。$a = 20$ はその解であるので， 2 次方程式に変形した後にはすぐに因数分解できる。

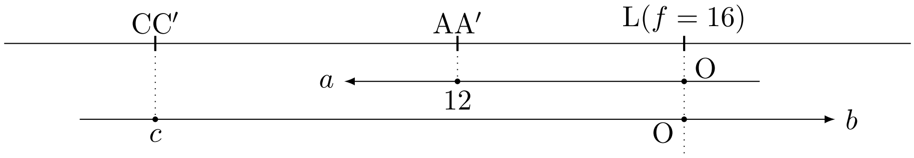
（別解）

レンズの公式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ における a，b の対称性から，この式が $(a, b) = (c, d)$ を満たすなら $(a, b) = (d, c)$ も解になることがわかる。今回，$(a, b) = (20, 80)$ が解であるから，$(a, b) = (80, 20)$ も解である。よって，求める物体 AA$'$〜レンズ L 間距離は 80 cm であるとわかる。

問 3



問 4



L〜CC′ 間の距離を座標 c で表す。レンズの公式より，

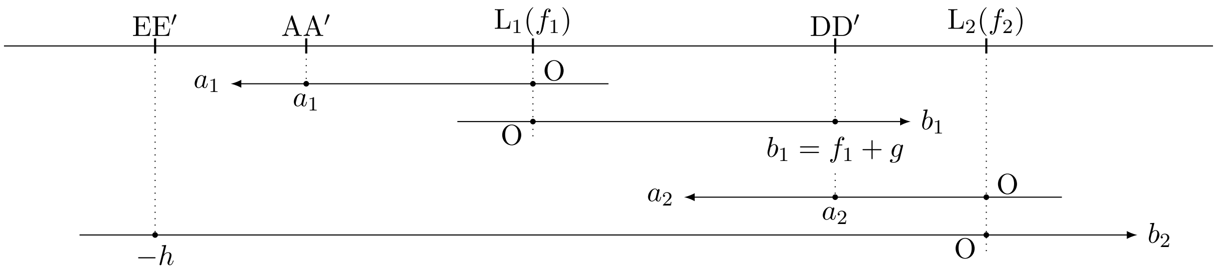
$$\frac{1}{12} + \frac{1}{c} = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{16} - \frac{1}{12} = \frac{3-4}{48} = -\frac{1}{48}$$

$$\therefore \quad c = -48$$

よって，L〜CC′ 間距離は **48 cm** である。

問 5



図のように，$\mathrm{L_1}$〜AA′ 間距離を a_1，$\mathrm{L_1}$〜DD′ 間距離を b_1，$\mathrm{L_2}$〜DD′ 間距離を a_2，$\mathrm{L_2}$〜EE′ 間距離を b_2 とおく。問題文より $b_1 = f_1 + g$ である。

$\mathrm{L_1}$ についてレンズの公式より，

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_1 + g} = \frac{(f_1 + g) - f_1}{f_1(f_1 + g)} = \frac{g}{f_1(f_1 + g)}$$

よって，

$$a_1 = (f_1 + g)\frac{f_1}{g}$$

となる。求める倍率は，

$$\frac{\mathbf{DD'}}{\mathbf{AA'}} = \left| -\frac{b_1}{a_1} \right| = \frac{f_1 + g}{(f_1 + g)\dfrac{f_1}{g}} = \boldsymbol{\frac{g}{f_1}}$$

問 6

レンズ L_1 の倍率は問 5 で求めたので，レンズ L_2 の倍率が求まればよい。L_2 について，レンズの公式より，像 $\mathrm{DD'}$ を物体として見ることで，

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{-h}=\frac{1}{f_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_2}=\frac{1}{f_2}+\frac{1}{h}=\frac{f_2+h}{f_2h}$$

$$\therefore \quad a_2=\frac{f_2h}{f_2+h}$$

倍率公式より，L_2 の倍率は，

$$\frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{DD'}}=\left|\frac{-h}{a_2}\right|=\frac{h}{\dfrac{f_2h}{f_2+h}}=\frac{f_2+h}{f_2}$$

よって，

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{AA'}}}=\frac{\mathrm{DD'}}{\mathrm{AA'}}\times\frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{DD'}}=\frac{g}{f_1}\times\frac{f_2+h}{f_2}\boldsymbol{=\frac{(f_2+h)g}{f_1f_2}}$$

問 7

変わったのは，$\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_3$ で $f_1 \to f_3(f_1>f_3)$，物体 $\mathrm{AA'}$ の L_3 からの座標 $a_1 \to a_3$ で，ほかの距離は変わらない（実際，L_2 によってできた虚像の位置は $b_2=-h$ で変わらず，L_2 についてのレンズの公式より a_2 も変わらないので，a_1 も変わらず，L_1 についてのレンズの公式から b_1 も変わらない）。

L_3 について，レンズの公式より，

$$\frac{1}{a_3}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f_3}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a_3}=\frac{1}{f_3}-\frac{1}{b_1}$$

$f_1>f_3$ より，

$$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{f_3}-\frac{1}{b_1}>\frac{1}{f_1}-\frac{1}{b_1}=\frac{1}{a_1}$$

よって，$a_3<a_1$ となる。座標（>0）が小さくなったので，物体 $\mathrm{AA'}$ はレンズに近づいたことになる。よって物体 $\mathrm{AA'}$ を右へ移動させたことになる。

また，倍率公式について，

$$\frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{AA'}}=\frac{\mathrm{DD'}}{\mathrm{AA'}}\times\frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{DD'}}=\frac{b_1}{a_1}\times\frac{h}{a_2}=\frac{b_1h}{a_1a_2}$$

$$\frac{\mathrm{JJ'}}{\mathrm{AA'}} = \frac{\mathrm{DD'}}{\mathrm{AA'}} \times \frac{\mathrm{JJ'}}{\mathrm{DD'}} = \frac{b_1}{a_3} \times \frac{h}{a_2} = \frac{b_1 h}{a_3 a_2}$$

$a_3 < a_1$ から，

$$\frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{AA'}} < \frac{\mathrm{JJ'}}{\mathrm{AA'}}$$

以上の考察より，答えは②。

（別解）

a_3，$\frac{\mathrm{JJ'}}{\mathrm{AA'}}$ を求めて，それぞれ a_1，$\frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{AA'}}$ と大小を比較する。問 8 と同じように a_3，$\frac{\mathrm{JJ'}}{\mathrm{AA'}}$ は求まる。

$$a_3 = \frac{f_3(f_1+g)}{f_1 - f_3 + g},\ \frac{\mathrm{JJ'}}{\mathrm{AA'}} = \frac{(f_1 - f_3 + g)(f_2 + h)}{f_2 f_3}$$

$$a_1 = (f_1 + g)\frac{f_1}{g},\ \frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{AA'}} = \frac{(f_2 + h)g}{f_1 f_2}$$

これらを比較する。まず，a_1 と a_3 について，

$$\begin{aligned} a_1 - a_3 &= (f_1+g)\frac{f_1}{g} - \frac{f_3(f_1+g)}{f_1 - f_3 + g} = (f_1+g)\frac{f_1(f_1 - f_3 + g) - f_3 g}{g(f_1 - f_3 + g)} \\ &= \frac{f_1 + g}{g(f_1 - f_3 + g)} \times \{f_1(f_1 - f_3) + (f_1 - f_3)g\} \\ &= \frac{f_1 + g}{g(f_1 - f_3 + g)}(f_1 + g)(f_1 - f_3) \end{aligned}$$

$f_1 > f_3$ より，$a_1 - a_3 > 0 \Leftrightarrow a_1 > a_3$ である。

また，倍率について，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{JJ'}}{\mathrm{AA'}} - \frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{AA'}} &= \frac{(f_1 - f_3 + g)(f_2 + h)}{f_2 f_3} - \frac{(f_2 + h)g}{f_1 f_2} \\ &= \frac{f_2 + h}{f_2} \times \left(\frac{f_1 - f_3 + g}{f_3} - \frac{g}{f_1}\right) \\ &= \frac{f_2 + h}{f_2} \times \frac{f_1(f_1 - f_3 + g) - f_3 g}{f_1 f_3} \\ &= \frac{(f_1 + g)(f_2 + h)(f_1 - f_3)}{f_1 f_2 f_3} > 0 \end{aligned}$$

よって，$\frac{\mathrm{JJ'}}{\mathrm{AA'}} > \frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{AA'}}$ となる。

以上より，答えは②であるとわかる。

問 8

$\dfrac{\mathrm{JJ'}}{\mathrm{AA'}} = \dfrac{\mathrm{DD'}}{\mathrm{AA'}} \times \dfrac{\mathrm{JJ'}}{\mathrm{DD'}} = \dfrac{b_1 h}{a_3 a_2}$, $b_1 = f_1 + g$, $a_2 = \dfrac{f_2 h}{f_2 + h}$ より，a_3 を求める。$\mathrm{L_3}$ について，レンズの公式より，

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_3} = \frac{1}{f_3} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_3} - \frac{1}{f_1 + g} = \frac{(f_1 + g) - f_3}{f_3(f_1 + g)} = \frac{f_1 - f_3 + g}{f_3(f_1 + g)}$$

倍率公式より，

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{JJ'}}{\mathrm{AA'}}} = \frac{b_1 h}{a_3 a_2} = (f_1 + g) \times h \times \frac{f_1 - f_3 + g}{f_3(f_1 + g)} \times \frac{f_2 + h}{f_2 h}$$

$$= \boldsymbol{\frac{(f_1 - f_3 + g)(f_2 + h)}{f_2 f_3}}$$

（ 森田涼介，山崎裕太郎，岡田和也，岡部律心 ）