2016 年度 九州大学 前期 数学

[1]　関数の最大・最小

出題範囲	微分
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	微分をして最大・最小を求める典型的な問題である。特につまずくポイントはないため，確実に満点をとりたい。

解答

(1) 問題文の条件より

$$x^3 + ax^2 + bx = x(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$= x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta$$

これを解くと，$a = -(\alpha+\beta), b = \alpha\beta$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_0^\alpha (x^3 + ax^3 + bx)\ dx - \int_\alpha^\beta (x^3 + ax^2 + bx)\ dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right]_0^\alpha - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right]_\alpha^\beta$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}\alpha^4 + \frac{a}{3}\alpha^3 + \frac{b}{2}\alpha^2\right) - \left(\frac{1}{4}\beta^4 + \frac{a}{3}\beta^3 + \frac{b}{2}\beta^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^4 - \frac{2}{3}(\alpha+\beta)\alpha^3 + \alpha\beta\cdot\alpha^2 - \frac{1}{4}\beta^4 + \frac{1}{3}(\alpha+\beta)\beta^3 - \frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\beta^2$$

$$= -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^3\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^4$$

(2) β の値を固定して，S を $\alpha(0 < \alpha < \beta)$ の関数とみる。このとき，S を α で微分して

$$S' = -\frac{2}{3}\alpha^3 + \beta\alpha^2 - \frac{1}{6}\beta^3$$

$$= -\frac{1}{6}(4\alpha^3 - 6\beta\alpha^2 + \beta^3)$$

$$= -\frac{1}{6}(2\alpha-\beta)(2\alpha^2 - 2\beta\alpha - \beta^2)$$

$2\alpha^2 - 2\beta\alpha - \beta^2 = 0$ の解

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\beta$$

がいずれも定義域外であることに注意すれば，増減表は次のようになる。

α	0	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	β
S'	／	$-$	0	$+$	／
S	／	↘	極小	↗	／

したがって，$0 < \alpha < \beta$ において S は

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

のとき最小となる。

解説

(1) 答えに用いてよい文字が α, β だけであることに気をつけよう。

(2) β を固定しているので S は α だけの関数とみなすことができる。S を α で微分すればその増減がわかり，最小値を簡単に見つけることができる。ただし，関数の定義域に注意が必要である。

（大久保佳徳，辻啓吾，沈有程）

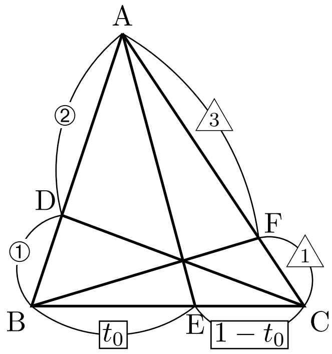
2016 年度 九州大学 前期 数学

[2]　三角形の辺の比

出題範囲	平面図形／ベクトル
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	(1), (2) はベクトルを用いてもよいが，計算量が少ないチェバの定理やメネラウスの定理を用いた解答の方が望ましい。(3), (4) は面積比の問題である。図をよく見てどこの比に注目すればよいかを見極めてほしい。

解答

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるとき，チェバの定理より，次の式が成立する。

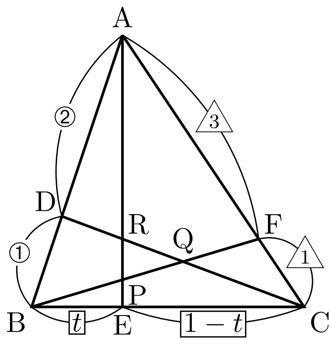


$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1$$

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}=1$$

$$\Leftrightarrow t_0=\frac{3}{5}$$

(2) $\triangle$AEC と直線 BF について，メネラウスの定理より，次の式が成立する。



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1$$

$$\frac{k}{1-k}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{3}{3+t}$$

同様にして，$\triangle$CDB と直線 AE について，メネラウスの定理より，次の式が成立する。

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}=1$$

$$\frac{l}{1-l}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$

$$\Leftrightarrow l=\frac{3(1-t)}{3-t}$$

(3) $\mathrm{BQ}=m\mathrm{BF}$ とする。

$\triangle$BFA と直線 CD について，メネラウスの定理より，次の式が成立する。

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1$$

$$\frac{m}{1-m}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{2}{3}$$

ここで，$\triangle$ABC と $\triangle$BFC の面積比は $1:\frac{1}{4}$ であり，$\triangle$BFC と $\triangle$BQC の面積比は $1:\frac{2}{3}$ である。

$\triangle$ABC の面積が 1 であることより，$\triangle$BCQ の面積は

$$1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

(4) $\triangle$ABP と $\triangle$ACR の面積を求める。

$\triangle$ABC と $\triangle$ABE の面積比は $1:t$ であり，$\triangle$ABE と $\triangle$ABP の面積比が $1:k=1:\frac{3}{3+t}$ であることより，$\triangle$ABP の面積は

$$1\cdot t\cdot\frac{3}{3+t}=\frac{3t}{3+t}$$

また，$\triangle$ABC と $\triangle$ACD の面積比が $1:\frac{2}{3}$ であり，$\triangle$ACD と $\triangle$ACR の面積比が $1:l=1:\frac{3(1-t)}{3-t}$ であることより，$\triangle$ACR の面積は

$$1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3(1-t)}{3-t}=\frac{2(1-t)}{3-t}$$

ここで

$$(\triangle\mathrm{PQR}\text{ の面積})=(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})-(\triangle\mathrm{ABP}\text{ の面積})-(\triangle\mathrm{ACR}\text{ の面積})-(\triangle\mathrm{BCQ}\text{ の面積})$$

であるので，求めた値を代入して

$$1-\frac{3t}{3+t}-\frac{2(1-t)}{3-t}-\frac{1}{6}=\frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

解説

(1) 与えられた辺の比や，「1 点で交わる」という問題文からチェバの定理を用いればよいことがわかる。

(2) メネラウスの定理を用いると解答の通りになるが，ベクトルを用いると **別解** のようになる。図を見ながらどこに定理を適用するかを判断すればよい。

(3) 線分 BQ と BF の比が分かればよいので前問と同様に解こう。線分 CQ と CD の比を求めてもよい。

(4) ($\triangle$PQR の面積) = ($\triangle$ABC の面積) $-$ ($\triangle$ABP の面積) $-$ ($\triangle$ACR の面積) $-$ ($\triangle$BCQ の面積) であると気づけば，前問と同様に $\triangle$ABP の面積と $\triangle$ACR の面積を求めればよいとわかる。求めた答えが $t = t_0$ で 0 になること等は検算として確かめるとよい。

別解

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AE}} = k(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + kt\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots\cdot \ ①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ とすると，次の式が得られる。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-\alpha)\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots\cdot \ ②$$

よって，①, ② の係数を比較すると次の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} k(1-t) = \alpha \\ kt = \dfrac{3}{4}(1-\alpha) \end{cases} \quad \text{よって} \quad k = \frac{3}{3+t}$$

同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \frac{l}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \frac{2l}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}} \qquad \cdots\cdots\cdot \ ③$$

であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \beta\overrightarrow{\mathrm{CA}} + (1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \beta\overrightarrow{\mathrm{CA}} + (1-\beta)(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CB}} \qquad \cdots\cdots\cdot \ ④$$

とすると，③, ④ の係数比較より次の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{l}{3} = \beta \\ \dfrac{2l}{3} = (1-\beta)(1-t) \end{cases} \quad \text{よって} \quad l = \frac{3(1-t)}{3-t}$$

別解解説

(2) ベクトルを用いて解くとこのようになる。直線 XY 上の点 Z が実数 λ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = (1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{OX}} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ と表せることを用いればよいが，連立方程式を解く手間が少しかかる。

（青木徹，辻啓吾，沈有程）

2016 年度 九州大学 前期 数学

[3]　点の移動と確率

出題範囲	場合の数と確率
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	座標平面上の点の移動に関する確率の問題である。白玉が出た回数を軸に解いていけば，特に難しいところはないので，完答を狙いたい。

解答

(1) 赤玉は x 軸方向へ $+1$，青玉は y 軸方向へ $+1$，白玉は x 軸，y 軸方向へそれぞれ -1，というように出る玉の色とコインの移動が対応している。また，玉の出る組み合わせのみが到達点を決定し，出る順番は影響しない。よって，赤玉が m 回，青玉が $n-m-1$ 回，白玉が 1 回出たとき，到達点は $(m-1, n-m-2)$ である。m は $0 \leqq m \leqq n-1$ を満たすすべての整数の値をとりうるから，到達点となりうる点は

$$(-1, n-2), (0, n-3), (1, n-4), \cdots, (n-4, 1), (n-3, 0), (n-2, -1)$$

である。

(2) 白玉が k 回出たときの到達点となりうる点の個数をまず考える。赤玉が m 回，青玉が $n-m-k$ 回出たとき，到達点は $(m-k, n-m-2k)$ である。赤玉，青玉が出る回数は 0 以上であるから

$$\begin{cases} x = m-k \\ y = n-m-2k \\ 0 \leqq m \leqq n-k \end{cases}$$

である。ただし，m は整数値をとる。

第 1 式を $m = x+k$ と変形して第 2 式，第 3 式に代入することにより，到達点 (x, y) の満たす方程式

$$\begin{cases} y = -x+n-3k & \cdots\cdots ① \\ -k \leqq x \leqq n-2k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

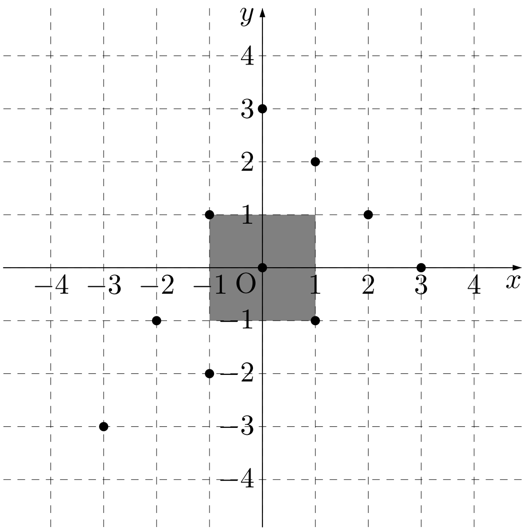
を得る。x は ② 式を満たすすべての整数値をとり，x が定まれば ① 式により y の値は一意に決まるから，白玉が k 回出たときの到達点となりうる点の個数は $n-2k-(-k)+1 = n-k+1$ 個である。

また，k は $0 \leqq k \leqq n$ を満たすすべての整数値をとりうるから，到達点となりうるすべての点の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(n-k+1) &= (n+1)(n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

である。

(3)

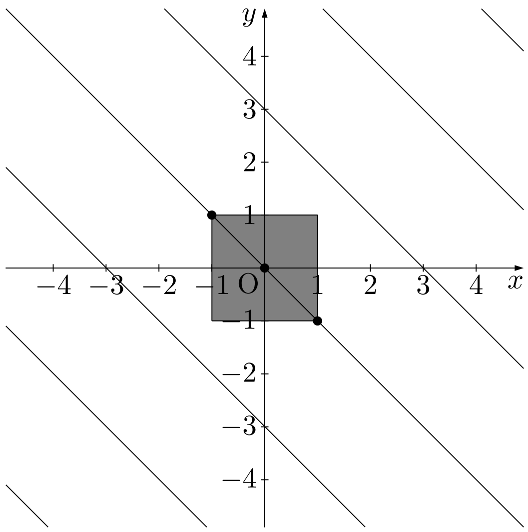


3 回の操作後に到達点となりうる点をすべて書き出すと上図のようになる。したがって 3 回の操作後に到達点が D の内部にあるのは，それぞれの色の玉が出た回数の組み合わせが (赤, 青, 白) $= (1,1,1), (2,0,1), (0,2,1)$ のいずれかのときのみである。各色の玉が出る確率は，赤玉が $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$，青玉が $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$，白玉が $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ なので，求める確率は

$$\begin{aligned}P_3 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot 3+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot 3\\ &= \frac{25}{72}\end{aligned}$$

である。

(4)



$3N$ 回の操作後の到達点 (x, y) は，(2) の ①, ② 式で $n = 3N$ とおいたもの，すなわち

$$\begin{cases} y = -x + 3N - 3k = -x + 3(N-k) & \cdots\cdots ③ \\ -k \leqq x \leqq 3N - 2k & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

を満たす。よって ③ 式から，D の内部または辺上で到達点となりうるのは，$k = N$ のときで，$(0,0), (1,-1), (-1,1)$ の 3 点である (上図参照)。このとき，④ 式は $-N \leqq x \leqq N$ となり，N は自然数であるから，この 3 点は ④ 式を満たしている。

したがって，$3N$ 回の操作後にそれぞれの点にいる確率を求め，それらの和として P_{3N} を求める。

$3N$ 回の操作後に $(0,0)$ にいる確率 p_1 は，赤玉，青玉，白玉が N 回ずつ出る確率なので

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{1}{3}\right)^N \left(\frac{1}{6}\right)^N \frac{(3N)!}{N!N!N!}$$

$3N$ 回の操作後に $(1,-1)$ にいる確率 p_2 は，赤玉が $N+1$ 回，青玉が $N-1$ 回，白玉が N 回出る確率なので

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!}$$

$3N$ 回の操作後に $(-1,1)$ にいる確率 p_3 は，赤玉が $N-1$ 回，青玉が $N+1$ 回，白玉が N 回出る確率なので

$$p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!}$$

以上を合わせて

$$
\begin{aligned}
P_{3N} &= p_1 + p_2 + p_3 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{1}{3}\right)^N \left(\frac{1}{6}\right)^N \frac{(3N)!}{N!N!N!} + \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \frac{(3N)!}{(N+1)!(N+1)!N!} \left\{2 \cdot 3 \cdot (N+1)^2 + 3^2 N(N+1) + 2^2 N(N+1)\right\} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \frac{(3N)!}{(N+1)!(N+1)!N!} (N+1)(19N+6) \\
&= \frac{19N+6}{N+1} \cdot \frac{(3N)!}{(N!)^3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2N+1}
\end{aligned}
$$

解説

$$
\begin{cases}
y = -x + n - 3k \\
-k \leqq x \leqq n - 2k
\end{cases}
$$

この式が導けるかどうかがすべてである。

この式さえ導けてしまえば (4) も簡単な問題となる。あとは，式の整理を丁寧に行おう。

（辻啓吾，沈有程）

2016 年度 九州大学 前期 数学

[4]　整数を 13 で割った余りに関する問題

出題範囲	整数の性質
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	(2) は (1) を利用しても，合同式を利用してもよい。(3) は (1) や (2) の流れから，6 桁の整数をどのように表すべきかわかるようになっている。

解答

(1)【証明】問題文の条件より，負でない整数 m を用いて

$$10^n = 13m + a_n$$

とおける。両辺に 10 を掛けて

$$10^{n+1} = 13 \cdot 10m + 10a_n$$

したがって 10^{n+1} を 13 で割った余り a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しい。(証明終)

(2) (1) の結果より

$$a_1 \equiv 10 \pmod{13}$$

$$a_2 \equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9 \pmod{13}$$

$$a_3 \equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12 \pmod{13}$$

$$a_4 \equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$a_5 \equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4 \pmod{13}$$

$$a_6 \equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1 \pmod{13}$$

$0 \leqq a_n \leqq 12$ なので

$$a_1 = 10, a_2 = 9, a_3 = 12, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 1$$

(3) $1 \leqq x \leqq 9, 0 \leqq y \leqq 9$ を満たす整数 x, y を用いて，N は

$$N = x \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + y \cdot 10^0$$

と表せる。(2) の結果より

$$N \equiv x \cdot a_5 + 2 \cdot a_4 + 0 \cdot a_3 + 1 \cdot a_2 + 6 \cdot a_1 + y \pmod{13}$$
$$\equiv 4x + y + 10 \pmod{13}$$

であるので，N が 13 で割り切れるためには $4x + y + 10$ が 13 で割り切れればよい。$14 \leqq 4x + y + 10 \leqq 55$ より，$4x + y + 10 = 26, 39, 52$ のいずれかである。

(i) $4x + y + 10 = 26$ のとき

$$4x + y = 16$$
$$\Leftrightarrow (x, y) = (4, 0), (3, 4), (2, 8)$$

(ii) $4x + y + 10 = 39$ のとき

$$4x + y = 29$$
$$\Leftrightarrow (x, y) = (7, 1), (6, 5), (5, 9)$$

(iii) $4x + y + 10 = 52$ のとき

$$4x + y = 42$$
$$\Leftrightarrow (x, y) = (9, 6)$$

(i)(ii)(iii) より

$$N = 420160, 320164, 220168, 720161, 620165, 520169, 920166$$

解説

(2) (1) の結果を利用してもよいし，解答のように合同式を利用してもよい。

(3) N の表し方が鍵となる。(1)，(2) での流れから解答のように N を表せば，(2) を利用できるということに気づきたい。そのあとは $4x + y + 10$ の取りうる値の範囲を調べて，各場合について考えればよい。

（辻啓吾，沈有程）