2015 年度 九州大学 前期 物理

〔1〕　ピン周りの円運動と弾を発射する台の運動

出題範囲	鉛直面内の円運動，等加速度直線運動，運動量保存則
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	問 1 は鉛直面内の円運動の問題である。(1) では，初等幾何を用いて糸のなす角度の大きさを求めなければならず，これに気づかず苦戦した人もいるかもしれない。しかし，角度がわからなければ力を分解できず解けないことから，必要な角度は求まるはずだと考えてほしい。以降は，一般的な鉛直面内の円運動の問題であり，それほど難しくはないが，(3) は，途中で円運動の中心が切り替わるため少し難しく感じるかもしれない。円運動の問題は基本的には運動方程式とエネルギー保存則の式を立てれば解けるので，慌てずに解いてほしい。 問 2 は運動量保存則の問題である。問 1 とまったく関係ないため少し面倒であるが，問題自体はそれほど難しくない。小球も含んだ台の質量を M としていることから，台の質量が減少していくことがわかる。小球放出前後の台の質量と速度を間違わないように注意すれば，後は運動量保存則の式を立てるだけである。

解答

問 1　**(1)** $\dfrac{1}{2}mg$　**(2)** $\sqrt{3gr}$　**(3)** 2

(4) $\sqrt{2gr}$　**(5)** $\sqrt{6}r$

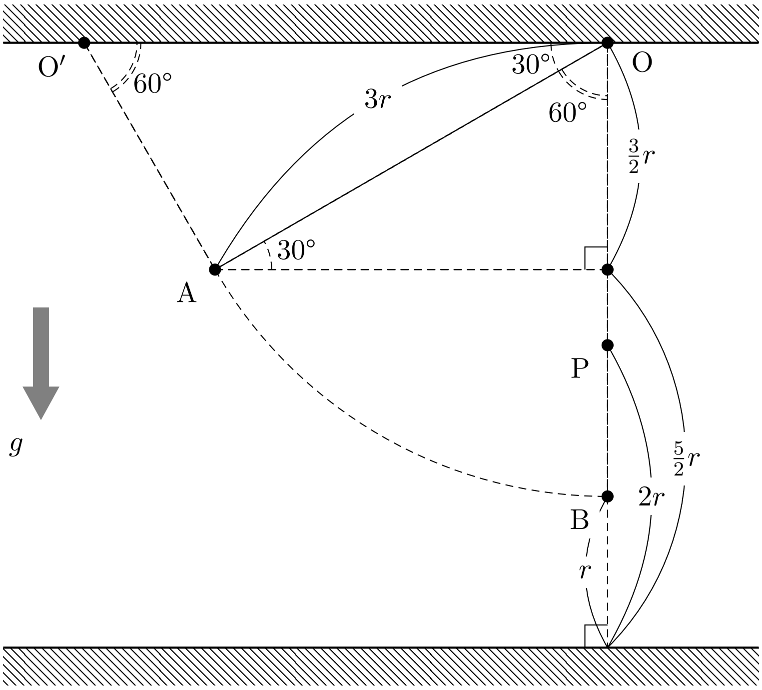
問 2　**(1)** $\dfrac{m}{M}v$　**(2)** $\dfrac{m(2M-m)}{M(M-m)}v$　**(3)** $\dfrac{m}{M-(p-1)m}v$

(4) $\dfrac{2m}{M}v$　**(5)** $U < V_2$

解説

問 1

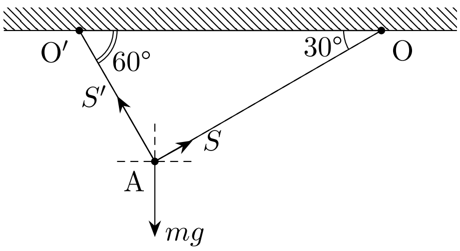
与えられた条件から図を描くと，以下のようになる。



(1)

糸 OA，O′A に生じている張力の大きさをそれぞれ S，S' とする。

力のつり合いより，



水平方向：$S\cos 30^\circ = S'\cos 60^\circ$　　……①

鉛直方向：$mg = S\cos 60^\circ + S'\cos 30^\circ$　……②

①より $S' = \sqrt{3}S$ となり，これを②に代入すると，

$$mg = \frac{1}{2}S + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}S = 2S$$

よって，

$$S = \boldsymbol{\frac{1}{2}mg}$$

（別解）

糸 OA に生じている張力の大きさを S とする。重力 mg を OA，O′A 方向に分解して糸 OA 方向の力のつり

合いの式を立てて，

$$S = mg\cos 60^\circ = \frac{1}{2}mg$$

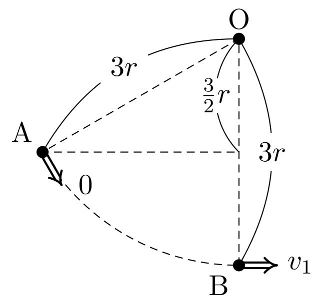
（2）

エネルギー保存則より，

$$mg \cdot \frac{3}{2}r = \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

これを解いて，

$$\boldsymbol{v_1 = \sqrt{3gr}}$$



（3）

通過直前と通過直後を比較する。通過直前の円運動の中心は O，通過直後の円運動の中心は P であることに注意する。

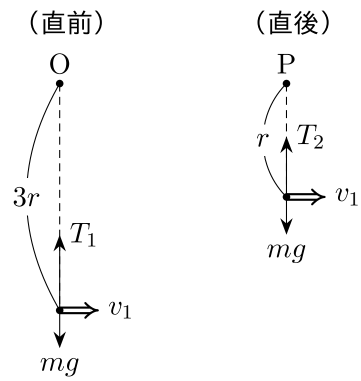
これらの円運動の向心方向の運動方程式は，

$$直前：m\frac{{v_1}^2}{3r} = T_1 - mg \qquad \left(\frac{{v_1}^2}{3r} = g\right)$$

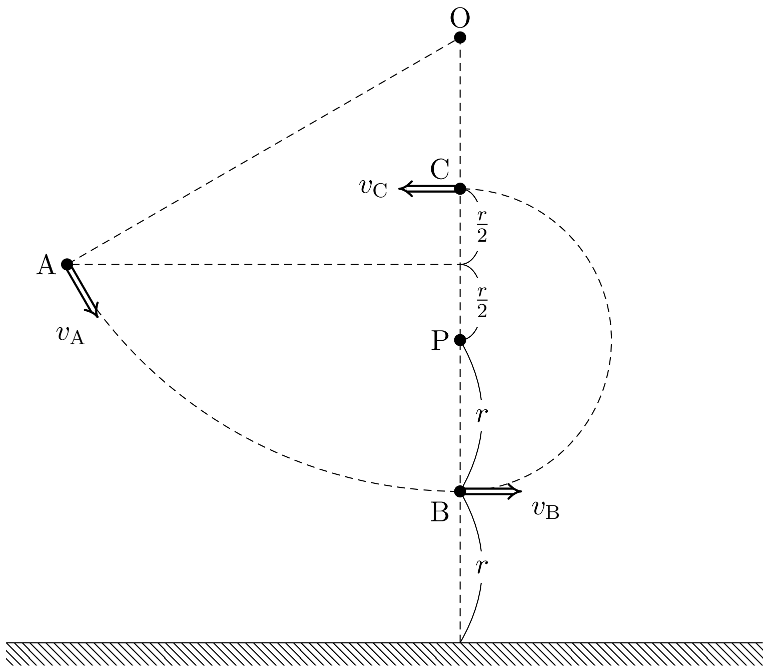
$$直後：m\frac{{v_1}^2}{r} = T_2 - mg \qquad \left(\frac{{v_1}^2}{r} = 3g\right)$$

これらを解いて，$T_1 = 2mg$，$T_2 = 4mg$ となるから，

$$\boldsymbol{\frac{T_2}{T_1} = 2}$$



(4)

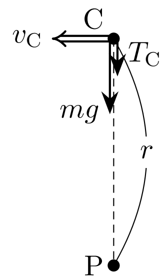


初速度を v_A，C 点での速度を v_C とすると，エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2 = mg\cdot\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}m{v_C}^2$$

$$\therefore \quad v_C = \sqrt{{v_A}^2 - gr}$$

また，点 C での張力の大きさを T_C とおくと，向心方向の運動方程式は，



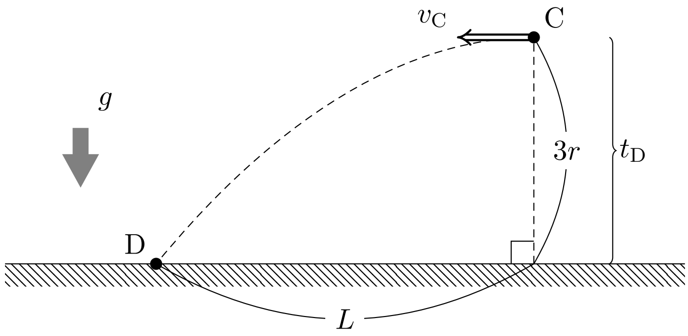
$$m\frac{{v_C}^2}{r} = mg + T_C \qquad \left(\frac{{v_C}^2}{r} = \frac{{v_A}^2}{r} - g\right)$$

ここで，「糸がたるまずにおもりが点 C に達する」とは，「点 C で張力 $T_C \geqq 0$ である」ということであるから，$v_A = v_0$（v_A が最小）のとき $T_C = 0$ となる。よって，

$$m\left(\frac{{v_0}^2}{r} - g\right) = mg$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{v_0 = \sqrt{2gr}}$$

(5)



(4) の結果より，$v_C = \sqrt{gr}$ となる。落下にかかる時間を t_D とすると，等加速度直線運動の式より，

$$3r = \frac{1}{2} g {t_D}^2$$

$$\therefore \quad t_D = \sqrt{\frac{6r}{g}}$$

水平方向には力がはたらかないから，おもりは等速で運動する。よって，

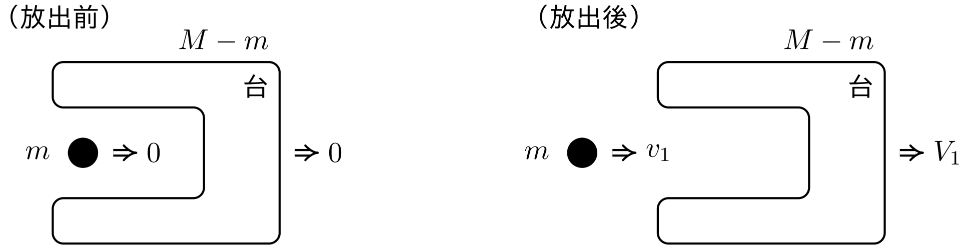
$$\boldsymbol{L} = v_C t_D = \sqrt{gr} \times \sqrt{\frac{6r}{g}} \boldsymbol{= \sqrt{6}r}$$

問 2

(1)

以下，p 回目に放出される小球の放出直後の速度を v_p とする。

放出前と放出後を比較する。以下では，台・放出器・放出されない小球を合わせて台ということとする。すると，この問題では，質量 $M - m$ の台から質量 m の小球が放出されるということになる。放出後の台の速度を V_1，小球の速度を v_1 とする（右向きを正とする）。



運動量保存則より，

$$m \cdot 0 + (M - m) \cdot 0 = m v_1 + (M - m) V_1$$

いま，小球の台に対する相対速度の大きさが v で，小球は負方向に発射されるから，

$$v_1 - V_1 = -v \Leftrightarrow v_1 = V_1 - v$$

となる。よって，

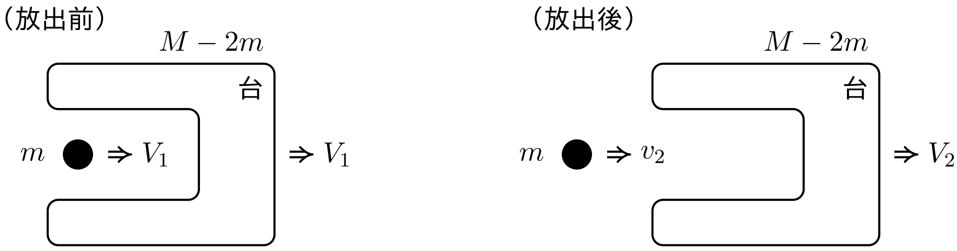
$$0 = m(V_1 - v) + (M - m)V_1$$
$$= MV_1 - mv$$

したがって，

$$\boldsymbol{V_1 = \frac{m}{M}v}$$

(2)

(1) と同様に下図が描ける。



運動量保存則より，

$$mV_1 + (M - 2m)V_1 = mv_2 + (M - 2m)V_2$$

また，相対速度を考えれば，

$$v_2 - V_2 = -v \Leftrightarrow v_2 = V_2 - v$$

よって，

$$(M-m)V_1 = m(V_2-v)+(M-2m)V_2$$

$$= (M-m)V_2 - mv$$

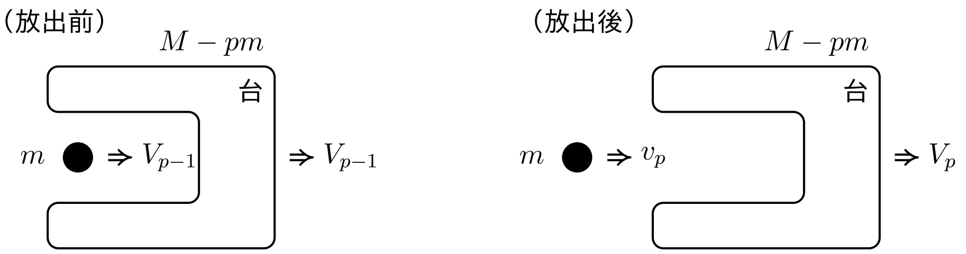
$$\therefore \quad \boldsymbol{V_2} = V_1 + \frac{m}{M-m}v$$

$$= \frac{m}{M}v + \frac{m}{M-m}v$$

$$\boldsymbol{= \frac{m(2M-m)}{M(M-m)}v}$$

(3)

(1)，(2)と同様に考える。



運動量保存則より，

$$mV_{p-1}+(M-pm)V_{p-1} = mv_p + (M-pm)V_p$$

また，相対速度の関係より，

$$v_p - V_p = -v \Leftrightarrow v_p = V_p - v$$

よって，

$$\{M-(p-1)m\}\,V_{p-1} = m(V_p - v) + (M-pm)V_p$$

$$= \{M-(p-1)m\}V_p - mv$$

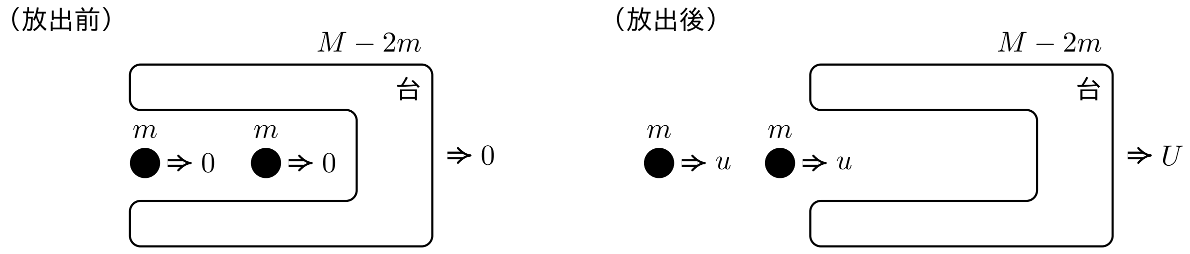
$$\therefore \quad V_p = V_{p-1} + \frac{m}{M-(p-1)m}v$$

したがって，

$$\boldsymbol{V_p - V_{p-1} = \frac{m}{M-(p-1)m}v}$$

(4)

(1)，(2)と同様に考えて，



運動量保存則より，

$$m \cdot 0 + m \cdot 0 + (M-2m) \cdot 0 = mu + mu + (M-2m)U$$

また，相対速度を考えて，

$$u - U = -v \Leftrightarrow u = U - v$$

よって，

$$\begin{aligned} 0 &= 2mu + (M-2m)U \\ &= 2m(U-v) + (M-2m)U \\ &= MU - 2mu \end{aligned}$$

したがって，

$$\boldsymbol{U = \frac{2m}{M}v}$$

(5)

いま，U と V_2 の大小を比較するから，差をとって，

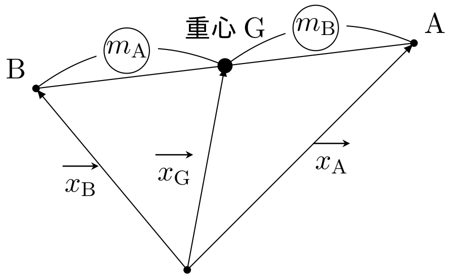
$$\begin{aligned} U - V_2 &= \frac{2m}{M}v - \frac{m(2M-m)}{M(M-m)}v \\ &= -\frac{m^2}{M(M-m)}v < 0 \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{U < V_2}$ である。

（別解）

問 2 全体について，重心系を考えることによる解答を示す。余力がある人は目を通しておいてほしい。

この解法では 2 つの物体と重心 G の位置や速度の関係が重要になるため，まずそれを説明する。2 物体 A，B を用意しそれぞれの質量を m_{A}，m_{B}，位置を $\overrightarrow{x_{\mathrm{A}}}$，$\overrightarrow{x_{\mathrm{B}}}$ とする。

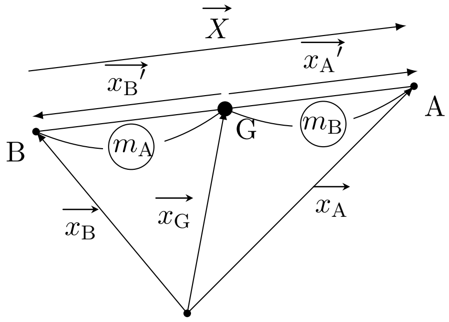


重心の位置 $\overrightarrow{x_{\mathrm{G}}}$ の定義の式

$$\overrightarrow{x_{\mathrm{G}}} = \frac{m_{\mathrm{A}}\overrightarrow{x_{\mathrm{A}}} + m_{\mathrm{B}}\overrightarrow{x_{\mathrm{B}}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$$

から，重心は線分 AB の質量の逆比内分点である（右図参照）。

よって，重心からみた A，B それぞれの位置 $\overrightarrow{x_{\mathrm{A}}}'$，$\overrightarrow{x_{\mathrm{B}}}'$ は，2 物体の相対位置 $\overrightarrow{X}\left(=\overrightarrow{x_{\mathrm{A}}}' - \overrightarrow{x_{\mathrm{B}}}'\right)$ を質量の逆比に内分したものである（右下図参照，ただし符号に注意）。



これを式で表すと次のようになる。

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_{\mathrm{A}}}' = \dfrac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\overrightarrow{X} \\ \overrightarrow{x_{\mathrm{B}}}' = -\dfrac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\overrightarrow{X} \end{cases}$$

これらの関係は速度についても同様に成立する（両辺を時間微分することで示される）。式で書けば，

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\mathrm{G}}} = \dfrac{m_{\mathrm{A}}\overrightarrow{v_{\mathrm{A}}} + m_{\mathrm{B}}\overrightarrow{v_{\mathrm{B}}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} \\ \overrightarrow{v_{\mathrm{A}}}' = \dfrac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\overrightarrow{V} \\ \overrightarrow{v_{\mathrm{B}}}' = -\dfrac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\overrightarrow{V} \end{cases} \quad \cdots\cdots(※)$$

などとなる。また，運動量保存則が成立するとき $m_{\mathrm{A}}\overrightarrow{v_{\mathrm{A}}} + m_{\mathrm{B}}\overrightarrow{v_{\mathrm{B}}}$ が一定なため，重心速度 $\overrightarrow{v_{\mathrm{G}}}$ は一定である。

これらの知識を使って問 2(1)〜(4)を解く。以下の解答では，設問ごとに系のとり方が変化し，よって重心のとり方も変化することに注意。

(1)

全小球，台からなる系の重心速度は 0 で一定である。よって，重心系でも慣性系でも物体の速度は変わらない。台を物体 A，小球を物体 B とすれば，(※)より，放出直後の台の速度 V_1 は，

$$V_1 = \frac{m}{M}v$$

(2)

1 回目に放出した小球を除いた系の重心速度は V_1 で一定である。(※)より，この重心からみた放出直後の台の速度 $V_2{}'$ は，

$$V_2{}' = \frac{m}{M-m}v$$

よって，慣性系からみた台の速度 V_2 は，これに重心速度を加えて，

$$V_2 = V_2{}' + V_1 = \frac{m(2M-m)}{M(M-m)}v$$

(3)

p − 1 回目までに放出した小球を除いた系を考える。p 回目の放出によってこの系の重心速度は変化しないため，速度変化は重心からみた速度についてのみを考えればよい。重心からみた台の速度は，放出前は 0，放出後は(※)を用いて求まる。よって，台の速度変化 $V_p - V_{p-1}$ は，

$$V_p - V_{p-1} = \frac{m}{M-m(p-1)}v - 0 = \frac{m}{M-(p-1)m}v$$

(4)

全小球，台からなる系を考えて，(1)と同様に，

$$U = \frac{2m}{M}v$$

（森田涼介，松井浩介，仲里佑利奈，岡田和也）

2015 年度 九州大学 前期 物理

〔2〕　おもりに引っ張られる導体棒の運動

出題範囲	電磁誘導
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	典型的な電磁誘導の問題である。問 1〜問 4 は，棒が 1 つしか動かない，典型的でひねりのない問題であるから是非解けていてほしい。問 5 以降は，2 本の棒が同時に動いていて難しそうな設定に見えるが，それぞれの運動を分けて考えればそれほど難しくはない。問 9 では，3 つの運動方程式の辺々を足して内力を消去する，という処理をしないと計算が大変になってしまうため注意して欲しい。問 4，問 7〜9 は力学の範囲の問題であるから，できなかった人は力学の復習もしよう。

解答

問 1 起電力の大きさ：vBL〔V〕，電位の高い方：Q

問 2 電流の大きさ：$\dfrac{vBL}{R}$〔A〕，電流の方向：P → Q

問 3 $\dfrac{vB^2L^2}{R}$〔N〕

問 4 $\dfrac{mgR}{B^2L^2}$〔m/s〕

問 5 右

問 6 $\dfrac{(v_1-v_2)BL}{R}$〔A〕

問 7 棒 1：$ma_1 = T - \dfrac{(v_1-v_2)B^2L^2}{R}$，棒 2：$2ma_2 = \dfrac{(v_1-v_2)B^2L^2}{R}$

問 8 $ma_1 = mg - T$

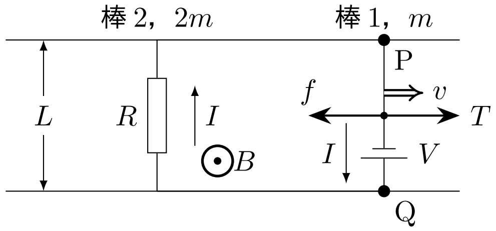
問 9 $a_1 = \dfrac{1}{4}g$〔m/s^2〕，$v_1 - v_2 = \dfrac{mgR}{2B^2L^2}$〔m/s〕

問 10 $\dfrac{m^2g^2R}{4B^2L^2}$〔J/s〕

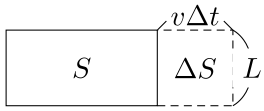
解説

問 1

右図のように文字を設定する。



おもりをつけられた棒 1 が右に動くことで，回路を貫く磁束が増加する。したがって，レンツの法則より，回路を貫く磁束を減少させる方向に誘導電流が流れる。これは，下向きに磁場を発生させる向きであるから，右ねじの法則より時計回りである。



このように電流を流すためには，誘導起電力 V は上図のように **Pより Qの方が電位が高くなる** ように発生する。棒 1 は Δt〔s〕間に $v\Delta t$〔m〕進むから，ファラデーの法則より，

$$V=\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=\left|\frac{B\Delta S}{\Delta t}\right|=\left|B\frac{v\Delta t\times L}{\Delta t}\right|=\boldsymbol{vBL}\text{〔V〕}$$

（別解）

棒 1 が右に動くことで，レンツの法則により，棒に左方向の力（ローレンツ力）がはたらく（ように誘導電流が流れる）。フレミング左手則より，電流は P→Q 方向に流れることがわかる。このように電流を流すために，誘導起電力は，P より Q の方が電位が高くなるように発生する。

問 2

流れる電流の大きさを I〔A〕とすると，オームの法則より，

$$I=\frac{V}{R}=\boldsymbol{\frac{vBL}{R}}\text{〔A〕}$$

また，問 1 の考察より，電流は **P→Q** 方向に流れる。

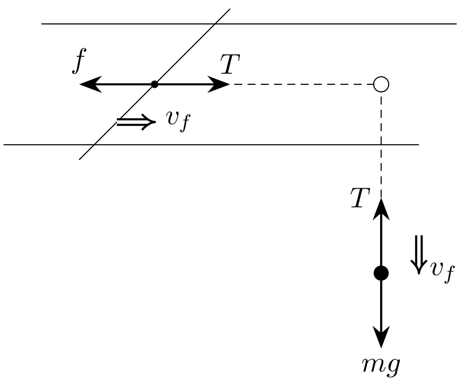
問 3

問 2 の電流によって棒 1 が磁場から受ける力の大きさ f は，

$$f=IBL=\boldsymbol{\frac{vB^2L^2}{R}}\text{〔N〕}$$

となる。

問 4



十分時間が経つと，力がつり合って棒は等速で運動する。このときの速度を v_f〔m/s〕とする。

力のつり合いより，糸の張力の大きさを T〔N〕とすると，

おもり：$mg=T$

棒 1　：　$T=f$

辺々足して T を消去して，

$$mg = f = \frac{v_f B^2 L^2}{R}$$

$$\therefore \quad v_f = \boldsymbol{\frac{mgR}{B^2L^2}} \text{〔m/s〕}$$

問 5

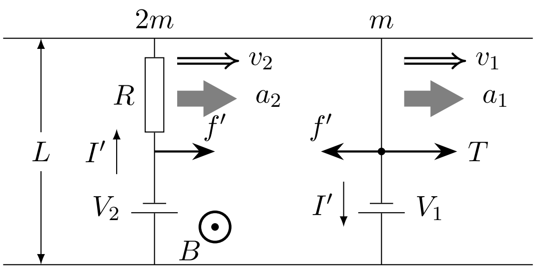
棒 2 に流れる電流が磁場から右向きの力を受けるため（∵ フレミング左手則），**右**に動く。

（別解）

レンツの法則より，棒 2 は，棒 1 が右に動くことによる磁束の増加を抑える方向に動く。よって右に動く。

問 6

図のように文字を設定する。



棒 2 について，図のように，（棒 1 で発生している誘導起電力によって）流れてくる電流を少なくしようとする方向に起電力が発生する（∵ レンツの法則）。ファラデーの法則より，

$$V_1 = v_1 BL$$

$$V_2 = v_2 BL$$

であり，棒 1 と棒 2 は衝突しないから $v_1 > v_2$，すなわち $V_1 > V_2$ であることに注意して，オームの法則と電位差より，

$$V_1 = V_2 + RI'$$

よって，

$$I' = \frac{V_1 - V_2}{R} = \boldsymbol{\frac{(v_1 - v_2)BL}{R}} \text{〔A〕}$$

問 7

棒 1 に流れる電流が磁場から受ける力の大きさ f' は，

$$f' = I'BL = (v_1 - v_2)\frac{B^2L^2}{R}$$

である。図より，運動方程式は，

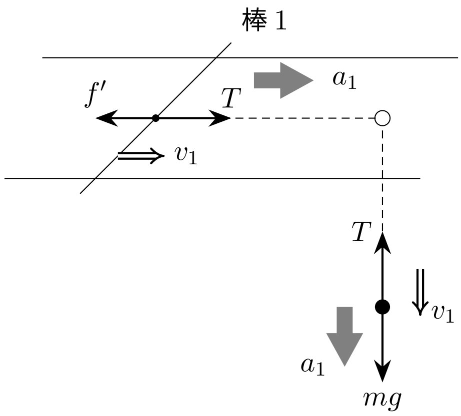
$$\text{棒 1} \quad : \quad \boldsymbol{ma_1} = T - f' \boldsymbol{= T - \frac{(v_1 - v_2)B^2L^2}{R}}$$

$$\text{棒 2} \quad : \quad \boldsymbol{2ma_2} = f' \boldsymbol{= \frac{(v_1 - v_2)B^2L^2}{R}}$$

問 8

おもりの運動方程式は，

$$\boldsymbol{ma_1 = mg - T}$$



問 9

十分時間が経過して，$a_1 = a_2$ となったときのことを考える。棒 1，棒 2，おもりの運動方程式の辺々足して（次ページの Check!! 参照），

$$4ma_1 = mg$$

よって，

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{4}g} \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

また，棒 2 の運動方程式より，

$$2m \cdot \frac{1}{4}g = (v_1 - v_2)\frac{B^2L^2}{R}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{v_1 - v_2 = \frac{mgR}{2B^2L^2}} \text{〔m/s〕}$$

◆ Check!!

内力の消去

問 9 で，問 7，8 で立てた運動方程式の辺々を足して計算した。中には T や f' について解いてから計算した人もいるかもしれないが，それよりも辺々を足した方が効率よく計算できる。これはなぜか。

複数の物体について立てた運動方程式には，それらの間で及ぼし合う力が含まれることが多い。この，着目する物体間にはたらく力を内力という。例えば，ぴんと張ったひもでつながれた 2 物体の運動を考えてもらえばわかると思うが，この内力であるひもの張力はそれぞれの物体に同じ大きさで逆向きにはたらく。このことから，この 2 物体の運動方程式の右辺を足せば内力は消え，外力の項のみが残ることがわかる。

本問では，糸の張力 T のほかに，ローレンツ力 f' も内力のように（同じ大きさで逆向きに）はたらいているから，3 物体の運動方程式を足し合わせれば内力 T，f は消え，外力である重力の項だけが残る，というわけである。

問 10

求める単位時間あたりのジュール熱 P〔J〕は，

$$P = (V_1 - V_2)I' = (v_1 - v_2)^2 \frac{B^2L^2}{R}$$

$$= \left(\frac{mgR}{2B^2L^2}\right)^2 \times \frac{B^2L^2}{R}$$

$$= \boldsymbol{\frac{m^2g^2R}{4B^2L^2}}\text{〔J〕}$$

（森田涼介，松井浩介，仲里佑利奈，岡田和也）

2015 年度 九州大学 前期 物理

〔3〕　仕切られた 2 部屋内の気体の状態変化

出題範囲	気体の状態変化
難易度	★★☆☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	可動壁で区切られた容器内での気体の状態変化の問題。よく出題されるテーマである。気体の状態変化の問題は，基本的には理想気体の状態方程式と熱力学第一法則の式を立てれば解けるので，わからない問題でも落ち着いて対処してほしい。問 3 のような，温度の違う 2 気体が熱平衡に達したときの気体の温度を求める問題は，少し難しい割によく出題されるのでしっかりと解き方を理解しておいてほしい。あとの問題は典型問題であるから解けていて欲しいところである。また，問 6 以降では状態 A → D を扱っており，状態 C → D ではないことに注意である。

解答

問 1 $\dfrac{p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}}{RT_{\mathrm{A}}}$　　**問 2** $\dfrac{3}{2}p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}$　　**問 3** $\dfrac{5}{4}T_{\mathrm{A}}$

問 4 $\dfrac{9}{8}p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}$　　**問 5** 第 1 室の気体：$\dfrac{5}{4}p_{\mathrm{A}}$，第 2 室の気体：$\dfrac{5}{4}p_{\mathrm{A}}$

問 6 $3p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}$　　**問 7** $\dfrac{3}{2}(p_{\mathrm{D}}V_{\mathrm{D}}-p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}})$　　**問 8** $\dfrac{3}{2}p_{\mathrm{A}}$

解説

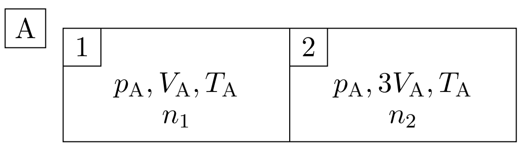
第 1 室，第 2 室に入っている気体の物質量をそれぞれ n_1〔mol〕，n_2〔mol〕とする。また，単原子分子理想気体より，定積モル比熱は $C_V=\dfrac{3}{2}R$ である。状態 A から B に移るときに第 1 室の気体が得た熱を Q_{AB1}，第 1 室内の気体の内部エネルギーの変化を ΔU_{AB1}，第 1 室内の温度の変化を ΔT_{AB1} などと表すこととする。第 2 室に関しても，同様である。

問 1

状態方程式は，

$$\mathrm{A1}:\quad p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}=n_1RT_{\mathrm{A}}$$

$$\mathrm{A2}:\quad p_{\mathrm{A}}\cdot 3V_{\mathrm{A}}=n_2RT_{\mathrm{A}}$$



これより，

$$n_1 = \boldsymbol{\frac{p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}}{R T_{\mathrm{A}}}}$$

$$n_2 = 3n_1$$

問 2

隔壁は固定されているから，第 1 室の気体がした仕事は 0 である。よって，熱力学第一法則より，求める熱量は，

B

1	2
$p_{\mathrm{B}}, V_{\mathrm{A}}, 2T_{\mathrm{A}}$ n_1	$p_{\mathrm{A}}, 3V_{\mathrm{A}}, T_{\mathrm{A}}$ n_2

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{AB1}} &= \Delta U_{\mathrm{AB1}} \\ &= n_1 C_V \Delta T_{\mathrm{AB1}} \\ &= \frac{3}{2} n_1 R (2T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{A}}) \\ &= \frac{3}{2} n_1 R T_{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

A1 の状態方程式を用いて，

$$Q_{\mathrm{AB1}} = \boldsymbol{\frac{3}{2} p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}}$$

問 3

隔壁を固定したまま熱が移動するから，熱力学第一法則より，

C

1	2
$p_{\mathrm{C1}}, V_{\mathrm{A}}, T_{\mathrm{C}}$ n_1	$p_{\mathrm{C2}}, 3V_{\mathrm{A}}, T_{\mathrm{C}}$ n_2

（第 1 室の気体が失ったエネルギー $|\Delta U_{\mathrm{BC1}}|$）

＝（第 2 室の気体が受け取る熱量）

＝（第 2 室の気体の得るエネルギー ΔU_{BC2}）

となる。よって，

$$-\Delta U_{\mathrm{BC1}} = \Delta U_{\mathrm{BC2}}$$

$$\therefore \quad -n_1 C_V \Delta T_{\mathrm{BC1}} = n_2 C_V \Delta T_{\mathrm{BC2}}$$

$$\therefore \quad -\frac{3}{2}n_1R(T_\mathrm{C}-2T_\mathrm{A})=\frac{3}{2}n_2R(T_\mathrm{C}-T_\mathrm{A})$$

左辺を右辺に移項し $n_2=3n_1$ を用いて，

$$\frac{3}{2}n_1R(T_\mathrm{C}-2T_\mathrm{A})+\frac{3}{2}\cdot 3n_1\cdot R(T_\mathrm{C}-T_\mathrm{A})=0$$

$$\therefore \quad (T_\mathrm{C}-2T_\mathrm{A})+3(T_\mathrm{C}-T_\mathrm{A})=0$$

$$\therefore \quad 4T_\mathrm{C}-5T_\mathrm{A}=0$$

よって，

$$T_\mathrm{C}=\boldsymbol{\frac{5}{4}T_\mathrm{A}}$$

（別解）

絶対温度を分子の運動から考えれば，$2T_\mathrm{A}$ の温度をもった分子が $\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$，T_A の温度をもった分子が $\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$ の割合で混ざり，ある一定の温度 T_C になったと考えられる。よって，

$$\begin{aligned}T_\mathrm{C}&=\frac{n_1}{n_1+n_2}\cdot 2T_\mathrm{A}+\frac{n_2}{n_1+n_2}\cdot T_\mathrm{A}\\&=\frac{2n_1+n_2}{n_1+n_2}\cdot T_\mathrm{A}\end{aligned}$$

ここで，$n_2=3n_1$ より，

$$T_\mathrm{C}=\frac{2n_1+3n_1}{n_1+3n_1}\cdot T_\mathrm{A}=\frac{5}{4}T_\mathrm{A}$$

問 4

隔壁は固定されているので仕事は 0 より，熱力学第一法則から，

（第 1 室から第 2 室へ移動した熱量 Q_BC2）＝（第 2 室の気体の内部エネルギーの増分 ΔU_BC2）

となる。よって，

$$\begin{aligned}Q_\mathrm{BC2}&=\Delta U_\mathrm{BC2}\\&=n_2C_V\Delta T_\mathrm{BC2}\\&=\frac{3}{2}n_2R(T_\mathrm{C}-T_\mathrm{A})\\&=\frac{3}{2}n_2R\cdot\frac{1}{4}T_\mathrm{A}\end{aligned}$$

$n_2 = 3n_1$ より，

$$Q_{\mathrm{BC2}} = \frac{9}{8} n_1 R T_{\mathrm{A}}$$

A1 の状態方程式を用いて，

$$Q_{\mathrm{BC2}} = \boldsymbol{\frac{9}{8} p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}}$$

問 5

状態 C における状態方程式は，

$$C1: \quad p_{\mathrm{C1}} V_{\mathrm{A}} = n_1 R T_{\mathrm{C}}$$

$$C2: p_{\mathrm{C2}} \cdot 3V_{\mathrm{A}} = n_2 R T_{\mathrm{C}}$$

$n_2 = 3n_1$ に注意すると，$p_{\mathrm{C1}} = p_{\mathrm{C2}}$ がわかる。A1 と C1 の状態方程式を辺々割って，

$$\frac{p_{\mathrm{C1}} V_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}} = \frac{n_1 R T_{\mathrm{C}}}{n_1 R T_{\mathrm{A}}}$$

$$\therefore \quad p_{\mathrm{C1}} = \frac{T_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{A}}} p_{\mathrm{A}} = \frac{5}{4} p_{\mathrm{A}}$$

よって，第 1 室，第 2 室の気体の圧力はどちらも $\boldsymbol{\frac{5}{4} p_{\mathrm{A}}}$ である。

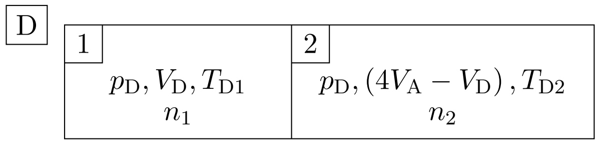
（別解）

状態 A と状態 C を比較すると，第 1 室，第 2 室において，気体の物質量と体積はそれぞれ変化していない。また，状態 C で第 1 室と第 2 室の気体の温度は T_{C} で等しいので $p_{\mathrm{C1}} = p_{\mathrm{C2}}$ である。$T_{\mathrm{C}} = \frac{5}{4} T_{\mathrm{A}}$ なので，圧力も $\frac{5}{4}$ 倍されて，

$$p_{\mathrm{C1}} = p_{\mathrm{C2}} = \frac{5}{4} p_{\mathrm{A}}$$

となる。

問 6



第 1 室の気体が得た熱量 Q_AD1 は，$3p_\mathrm{A}V_\mathrm{A}$ である。第 1 室の気体がした仕事を W_1，第 2 室の気体がされた仕事を W_2 とすると，当然 $W_1 = W_2$ である。ここで，第 2 室に熱の出入りはないから，$W_2 = \mathit{\Delta} U_2$ である。よって，熱力学第一法則より，

$$Q_\mathrm{AD1} = \mathit{\Delta} U_1 + W_1$$

$$= \mathit{\Delta} U_1 + W_2$$

$$= \mathit{\Delta} U_1 + \mathit{\Delta} U_2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\mathit{\Delta} U_1 + \mathit{\Delta} U_2 = 3p_\mathrm{A}V_\mathrm{A}} \qquad \cdots\cdots ①$$

（別解）

容器全体をひとまとめにして考えれば仕事はされていない（第 1 室の気体がした仕事＝第 2 室の気体がされた仕事となり，外部との仕事のやり取りはない）。よって，容器に加えられた熱は容器内の全気体の内部エネルギーの増加のみに使われる。したがって $Q_\mathrm{AD1} = \mathit{\Delta} U_1 + \mathit{\Delta} U_2$ となる。

問 7

隔壁が動くから，力のつり合いより，両室の圧力は等しい。よって，状態 D での状態方程式は，

$$D1: \quad p_\mathrm{D}V_\mathrm{D} = n_1 R T_\mathrm{D1}$$

$$D2: \quad p_\mathrm{D}(4V_\mathrm{A} - V_\mathrm{D}) = n_2 R T_\mathrm{D2}$$

となる。内部エネルギーの変化は，

$$\mathit{\Delta} U_1 = n_1 C_V \mathit{\Delta} T_\mathrm{AD1}$$

$$= \frac{3}{2} n_1 R (T_\mathrm{D1} - T_\mathrm{A})$$

$$= \frac{3}{2} (n_1 R T_\mathrm{D1} - n_1 R T_\mathrm{A})$$

状態方程式 A1，D1 より，

$$\boldsymbol{\mathit{\Delta} U_1 = \frac{3}{2}(p_\mathrm{D}V_\mathrm{D} - p_\mathrm{A}V_\mathrm{A})} \qquad \cdots\cdots ②$$

問 8

同様に，第 2 室の気体の内部エネルギー変化は，

$$\Delta U_2 = n_2 C_V \Delta T_{\mathrm{AD2}}$$

$$= \frac{3}{2} n_2 R (T_{\mathrm{D2}} - T_{\mathrm{A}})$$

$$= \frac{3}{2} (n_2 R T_{\mathrm{D2}} - n_2 R T_{\mathrm{A}})$$

$$\therefore \quad \Delta U_2 = \frac{3}{2} \{p_{\mathrm{D}} (4V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{D}}) - 3p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}\} \qquad \cdots\cdots ③$$

である。①〜③より，

$$\frac{3}{2}(p_{\mathrm{D}} V_{\mathrm{D}} - p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}) + \frac{3}{2} \{p_{\mathrm{D}} (4V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{D}}) - 3p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}\} = 3p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}$$

$$\therefore \quad (p_{\mathrm{D}} V_{\mathrm{D}} - p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}) + \{4p_{\mathrm{D}} V_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{D}} V_{\mathrm{D}} - p_{\mathrm{A}} 3V_{\mathrm{A}}\} = 2p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}$$

$$\therefore \quad 4p_{\mathrm{D}} V_{\mathrm{A}} = 6p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}$$

よって，

$$\boldsymbol{p_{\mathrm{D}} = \frac{3}{2} p_{\mathrm{A}}}$$

（ 森田涼介，松井浩介，仲里佑利奈，岡田和也 ）