2016 年度 大阪大学 前期 物理

〔1〕　レールの上を運動する台の上の小物体の運動

出題範囲	摩擦力・単振動
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	Ⅰ～Ⅲは，関連してはいるものの誘導といえるほどではないため，ほとんど独立して解いていくことになる。問 8 が難しく，また，これが解けないとそれ以降の 3 問も解答できないため，厳しい問題構成である。 Ⅰは摩擦力と等加速度運動の問題。しっかりと小物体にはたらく力を図に描いていけば容易に解ける。 Ⅱは摩擦力がはたらくときの単振動の問題。単振動は力学の分野ではかなり頻出なテーマであるため，基礎をしっかりマスターしておいてほしい。この 3 問も，さして難しくはないため，解いてほしい。Ⅰ，Ⅱは台が動くため，慣性力を持ち出す人がいるかもしれないが，台は等速直線運動をするため，（例えば電車の中にいることを考えてもらえばわかると思うが，）小物体に慣性力ははたらかないことに注意。 Ⅲも摩擦力がはたらくときの単振動の問題。問 6，問 7 までは確実に解いてほしいが，簡単な問題ではないためここで間違えた人も多いのではないだろうか。普段見るような単振動の問題では，支柱は固定されているため，ばねから支柱にはたらく力は考えないが，本問では支柱に接続している台も動くため，この力も考える必要があることに注意してほしい。問 8 は時折出題される 2 物体の相対位置の問題である。解き方を理解して，類題が出ても対応できるようにしよう。問 9，問 10 は容易だが，問 11 は立式に注意が必要である。また，この問題では台は加速度運動を行うため，慣性力を考えることも間違いではないが，問題文の誘導が「レール上の人から見た」力や位置を求めるようになっているので，素直にそれに従うほうが安全だと思われる。

解答

Ⅰ. 問 1　$a_0 = \mu g$　　**問 2**　$\dfrac{{V_0}^2}{2a_0}$

Ⅱ. 問 3　$x_{\mathrm{m}} = \dfrac{2\mu mg}{k}$　　**問 4**　$\mu mg - kx$　　**問 5**　$t_1 = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Ⅲ. 問 6　$\begin{cases} F = kx - \mu mg \\ F' = -kx + \mu mg \end{cases}$　　**問 7**　$F + F' = 0$　　**問 8**　$X = \dfrac{x}{2}$

問 9　$F' = -2kX + \mu mg$　　**問 10**　$\begin{cases} t_2 = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}} \\ X = \dfrac{\mu mg}{k} - \dfrac{x_0}{2} \end{cases}$　　**問 11**　$\dfrac{4\mu mg}{k}$

解説

I.

問 1

台と小物体の間の垂直抗力を N とすると，力のつり合いより，　$N = mg$

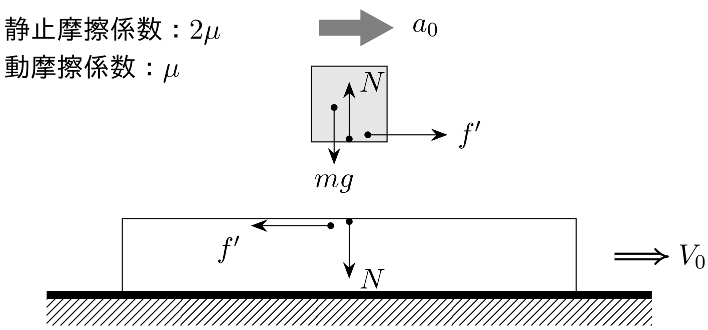
また，動摩擦力は，　$f' = \mu N = \mu mg$

よって，運動方程式は，

$$ma_0 = f' = \mu mg$$

したがって，

$$\boldsymbol{a_0 = \mu g}$$



問 2

等加速度運動の式より，速度 V_0 になるまでにかかった時間を t_0，進んだ距離を l_0 とすると，

$$l_0 = \frac{1}{2}a_0{t_0}^2$$

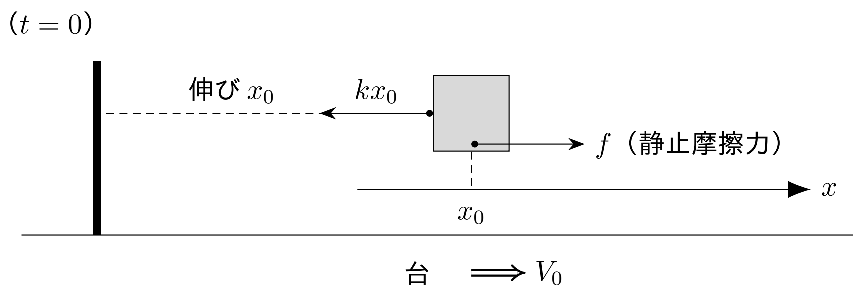
$$V_0 = a_0 t_0$$

2 式から t_0 を消去して，

$$l_0 = \boldsymbol{\frac{{V_0}^2}{2a_0}}$$

II.

問 3



小物体が台に対して運動を始めるためには，ばねによる弾性力 kx_0 が最大静止摩擦力 $f_{\max}$ を上回らなければならない。よって，

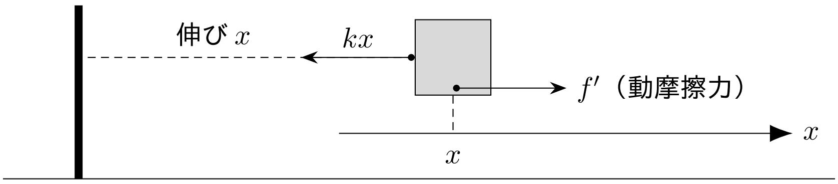
$$kx_0 > f_{\max} = 2\mu N = 2\mu mg$$

$$\therefore \quad x_0 > \frac{2\mu mg}{k}$$

よって，求める x_{m} は，

$$\boldsymbol{x_{\mathrm{m}} = \frac{2\mu mg}{k}}$$

問 4

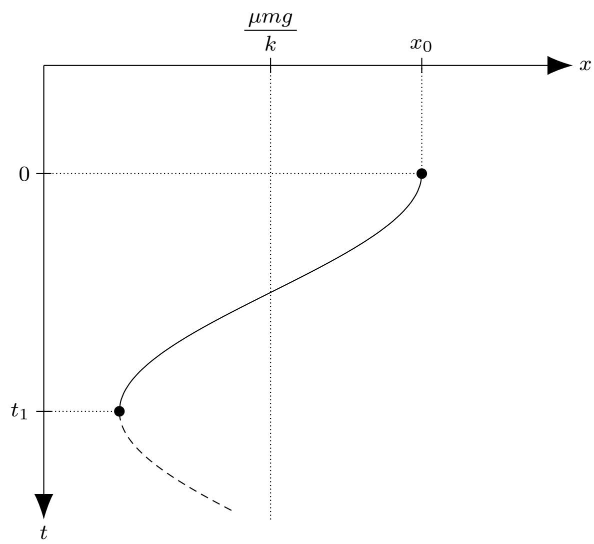


動摩擦力は，$f' = \mu N = \mu mg$ である。

図より，小物体に水平方向にはたらく力 F は，

$$F = f' - kx = \boldsymbol{\mu mg - kx}$$

問 5



小物体を台に固定しているときは台と同じ速度で運動するため，速度は V_0 である。小物体の固定を解除すると，左方向にばねの力がはたらくため，速度は一旦小さくなる。その後，小物体が最大変位に達すると，小物体は台に対して静止するから，$v = V_0$ となる。これが時刻 t_1 である。

単振動の周期を T とすると，図より，

$$t_1 = \frac{T}{2}$$

T を求める。

運動方程式は，

$$ma = -kx + \mu mg = -k\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right)$$

よって，単振動の角振動数を ω とすると $a = -\omega^2\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right)$ と書けるから，

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

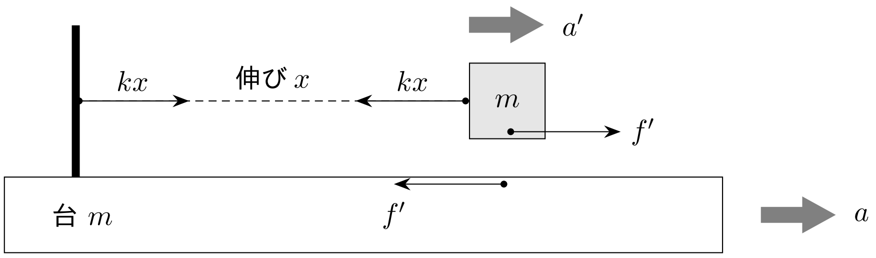
$$\therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

よって，

$$t_1 = \frac{T}{2} = \boldsymbol{\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Ⅲ.

問 6



運動方程式は，

台　：　$ma = \boldsymbol{F} = kx - f' \boldsymbol{= kx - \mu mg}$

小物体　：　$ma' = \boldsymbol{F'} = -kx + f' \boldsymbol{= -kx + \mu mg}$

問 7

問 6 で求めた 2 式の辺々足して，

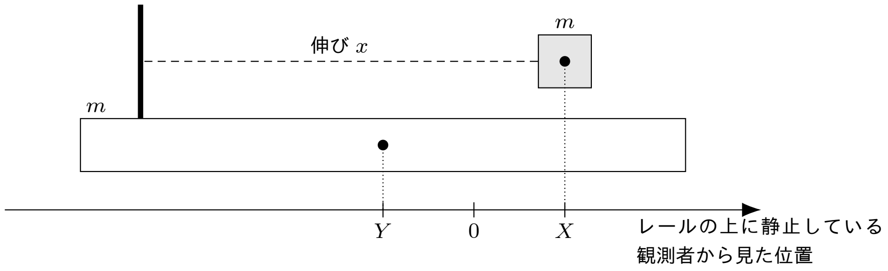
$$m(a + a') = \boldsymbol{F + F' = 0}$$

（別解）

台と小物体からなる系全体を見ると，水平方向に外力が加わっていないので $F + F' = 0$ である。

問 8

下図のように，X と同様に，レールの上に静止している観測者から見た台の位置 Y を設定する。Y は，X 同様，右向きが正で，ばねの長さが自然長（$x=0$）のとき $Y=0$ とする。



（レールから見た）小物体の速度を v，台の速度を V とすると，運動量保存則より，最初 2 物体は静止していることから，

$$mv + mV = 0$$

$$\therefore \quad v + V = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(X+Y) = 0$$

よって，$X+Y$ は一定。$X=0$ のとき $Y=0$ であることから，$X+Y=0$ が成立し，$Y=-X$ である。

よって，ばねの伸びは，$x = X - Y = 2X$。よって，

$$\boldsymbol{X = \frac{x}{2}}$$

（別解）

$X+Y=0$ の導出について。

運動量保存則を用いて $v+V=0$ を導いたが，ここでは問 7 を利用する。

問 7 より，$a + a' = 0$ であるから，

$$\frac{dV}{dt} + \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v+V) = 0$$

$$\therefore \quad v + V = C_1 \quad （= 一定）$$

$t=0$ で $v=V=0$ より，$C_1=0$ となるから，$v+V=0$。

$$v + V = \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}(X + Y) = 0$$

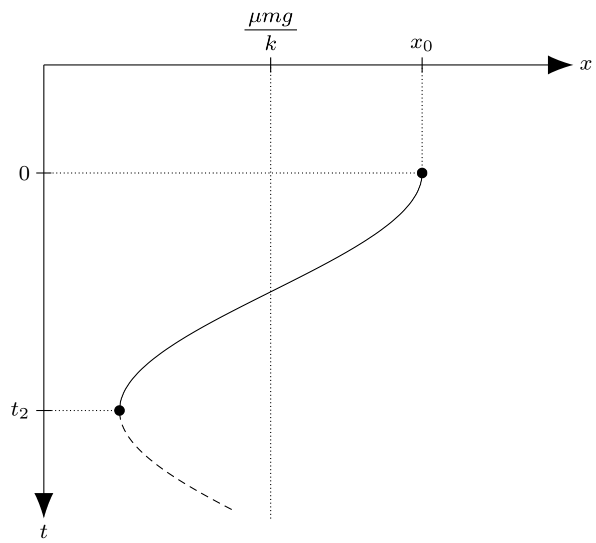
$$\therefore\quad X + Y = C_2 \quad （= 一定）$$

$x = 0$ で $X = 0$，$Y = 0$ より，$C_2 = 0$ となるから，$X + Y = 0$。

問 9

$$\boldsymbol{F'} = -kx + \mu mg \boldsymbol{= -2kX + \mu mg}$$

問 10



単振動の周期を T' とすると，図より，

$$t_2 = \frac{T'}{2}$$

となるから，T' を求める。

運動方程式は，

$$ma' = F' = -2kX + \mu mg = -2k\left(X - \frac{\mu mg}{2k}\right)$$

よって，単振動の角振動数を ω' とすると，

$$\omega' = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

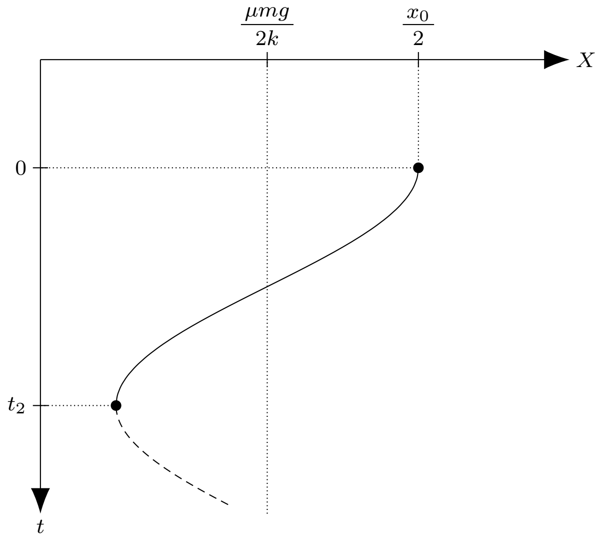
よって，

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

以上より，

$$\boldsymbol{t_2} = \frac{T'}{2} \boldsymbol{= \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$$

また，この単振動は，$X_0 = \dfrac{x_0}{2}$ で始まり，振動中心は $X = \dfrac{\mu mg}{2k}$ であるから，次図が描ける。



よって，$t = t_2$ のときの X は，

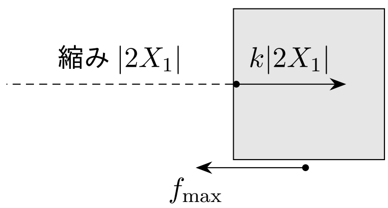
$$\frac{X + \frac{x_0}{2}}{2} = \frac{\mu mg}{2k}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{X = \frac{\mu mg}{k} - \frac{x_0}{2}}$$

以降，$X_1 = \dfrac{\mu mg}{k} - \dfrac{x_0}{2}$ とする。

問 11

$t = t_2$ のとき，ばねから小物体にかかる力より最大静止摩擦力のほうが大きくなればよい。問 8 の結果から，ばねの縮みは $|x| = |2X_1|$ であることに注意して，



図より，

$$k|2X_1| < f_{\max}$$

$$2k\left|\frac{\mu mg}{k} - \frac{x_0}{2}\right| < 2\mu mg$$

$x_0 > x_{\mathrm{m}} = \dfrac{2\mu mg}{k}$ より，

$$2k\left(\frac{x_0}{2} - \frac{\mu mg}{k}\right) < 2\mu mg$$

$$\therefore \quad x_0 < \boldsymbol{\frac{4\mu mg}{k}}$$

※

立式の段階で，$2kX_1 < f_{\max}$ としてしまうと，$x_0 > 0$ という意味のない式が得られる。これは，$X_1 < 0$ より上式が常に成立するためである。力の大きさを比べるときは，その力が正の値をとっているか確認することが大切である。

（ 森田涼介，松井浩介，岡田和也，岡部律心 ）

2016 年度 大阪大学 前期 物理

〔2〕 コンデンサーを用いたさまざまな回路

出題範囲	コンデンサー・キルヒホッフの法則
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	Ⅰ，Ⅱと Ⅲ はまったく別の問題となっているため，時間のかかる問題構成となっている。 Ⅰは基礎的なコンデンサーの問題。(1)，(2) を別で解いてもよいが，微積の考え方を使えるなら，(1) は (2) の誘導となっているため，楽に解ける。 Ⅱの前半は，抵抗がつながっているコンデンサーの回路の問題。回路図を描いてキルヒホッフの法則を用いれば序盤は簡単に解けるだろう。微小時間を考えてからは，Ⅰと同様，グラフをかいてその面積を考えるか，または積分することによりエネルギーを求める問題となっている。 Ⅱの後半は，定電流電源というなじみのないものを使っているが，問題文のとおり，一定の電流が供給されるだけなので，慌てず解き進めてほしい。問題自体は，電流の定義 $I=\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ がわかっていればさほど難しくはない。 Ⅲも，Ⅰに引き続きコンデンサーの回路の問題。ΔY 変換という，大学で習う素子についての問題であるが，回路図を描いてキルヒホッフの法則や電荷保存則を考えれば，高校範囲でも解ける問題である。1 つひとつ閉回路で方程式を立てて落ち着いて処理すれば解ける。

解答

Ⅰ.(1) $\dfrac{Q}{C}\Delta Q$ **(2)** $\dfrac{1}{2C}({Q_2}^2-{Q_1}^2)$

Ⅱ.(3) $\dfrac{V_0}{R}$ **(4)** $RI+\dfrac{Q}{C}$ **(5)** $\left(V_0-\dfrac{Q}{C}\right)\Delta Q$

(6) 次ページ参照 **(7)** $\dfrac{1}{2}C{V_0}^2$ **(8)** $C{V_0}^2$

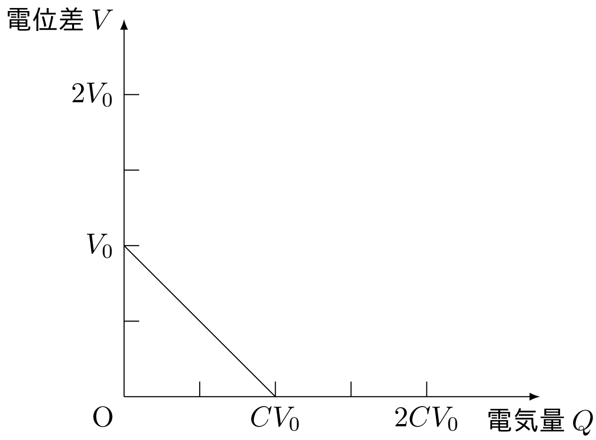
(9) $\dfrac{CV_0}{I_0}$ **(10)** RCV_0I_0

Ⅲ.問 1 $Q_{\mathrm{A}}=\dfrac{C_{\mathrm{Y}}}{3}(2V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{B}})$ $Q_{\mathrm{B}}=\dfrac{C_{\mathrm{Y}}}{3}(2V_{\mathrm{B}}-V_{\mathrm{A}})$

問 2 $Q_{\mathrm{A}}'=C_{\Delta}(2V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{B}})$ $Q_{\mathrm{B}}'=C_{\Delta}(2V_{\mathrm{B}}-V_{\mathrm{A}})$

問 3 $C_{\mathrm{Y}}=3C_{\Delta}$ $V_{\mathrm{Y}}=\dfrac{2}{3}V_{\Delta}$

(6)



解説

I．

(1)

電荷 ΔQ を電位差 V だけ移動させるときに必要な仕事は $V\Delta Q$ であり，電位差 V は $V = \dfrac{Q}{C}$ で一定と見なせるので，求める仕事を ΔW_1 とすると，

$$\Delta W_1 = \boldsymbol{\frac{Q}{C}\Delta Q}$$

(2)

求める静電エネルギーは，電気量 Q を Q_1 から Q_2 増加させるのに必要な仕事に等しく，その値を W_1 とすると，W_1 は図 1 の V - Q グラフの囲む面積である。よって，

$$W_1 = \frac{\dfrac{Q_1}{C} + \dfrac{Q_2}{C}}{2} \cdot (Q_2 - Q_1) = \boldsymbol{\frac{1}{2C}\left({Q_2}^2 - {Q_1}^2\right)}$$

（別解 1）

積分により求める。

微小電荷 ΔQ を移動したときの微小な仕事が $\Delta W_1 = \dfrac{Q}{C}\Delta Q$ であるから，

$$W_1 = \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{Q}{C}\, dQ = \left[\frac{Q^2}{2C}\right]_{Q_1}^{Q_2} = \frac{1}{2C}\left({Q_2}^2 - {Q_1}^2\right)$$

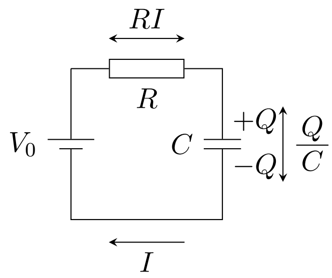
（別解 2）

素直に静電エネルギーの変化量を計算すると，求める値は，

$$\frac{1}{2}Q_2 \cdot \frac{Q_2}{C} - \frac{1}{2}Q_1 \cdot \frac{Q_1}{C} = \frac{1}{2C}\left({Q_2}^2 - {Q_1}^2\right)$$

II．前半（定電圧電源）

オームの法則（$V = RI$），コンデンサーの基本式（$Q = CV$）より，以下の図が描ける。



電源を接続した直後は，コンデンサーは帯電していないため $Q = 0$ となる。よって，キルヒホッフの法則より，

$$V_0 = RI \Leftrightarrow I = \underbrace{\boldsymbol{\frac{V_0}{R}}}_{(3)}$$

また，その後の任意の時刻で，電源電圧 V_0 は，キルヒホッフの法則より，

$$V_0 = \underbrace{\boldsymbol{RI + \frac{Q}{C}}}_{(4)}$$

と表される。

次に，短い時間 Δt の間に電荷 ΔQ がコンデンサーに流れ込むことを考える。Δt 間は微小なので，この間で電流の大きさは変化しないと見なすと，1 秒間に流れる電荷の量が電流であるから，

$$\Delta Q = I\Delta t \qquad \cdots\cdots ①$$

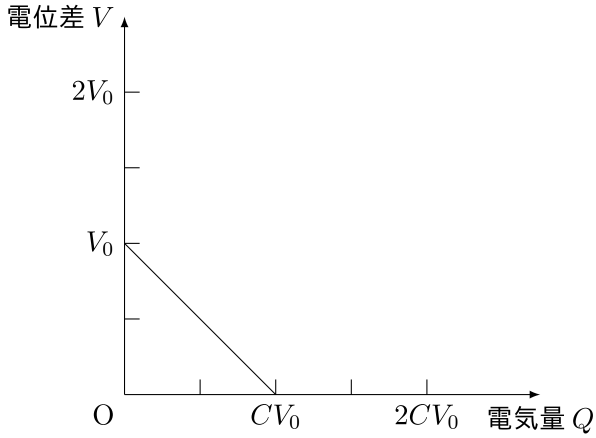
この間に抵抗で発生したジュール熱は，

$$\Delta W_2 = RI^2 \cdot \Delta t = RI \cdot I\Delta t$$

（4），①式より，

$$\Delta W_2 = \underbrace{\boldsymbol{\left(V_0 - \frac{Q}{C}\right)\Delta Q}}_{(5)}$$

抵抗両端の電圧差 $V = RI = V_0 - \dfrac{Q}{C}$ であるから，$V - Q$ グラフは以下のようになる。



$\cdots\cdots$ (6)

コンデンサーが充電されきるまでに抵抗で発生したジュール熱を求める。(6) の V-Q グラフの囲む面積が抵抗で発生したジュール熱であるから，

$$W_2 = \frac{1}{2}V_0 \cdot CV_0 = \underbrace{\boldsymbol{\frac{1}{2}CV_0{}^2}}_{(7)}$$

また，コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーは，

$$U_2 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV_0{}^2$$

であるから，電源がした仕事は，エネルギー保存則より，

$$W = W_2 + U_2 = \underbrace{\boldsymbol{CV_0{}^2}}_{(8)}$$

(別解 1)

電源はコンデンサーに蓄えられた電荷 $Q = CV_0$ を電位 V_0 だけ上げるのであるから，電源のする仕事 W は，

$$W = QV_0 = CV_0 \cdot V_0 = CV_0{}^2$$

となり，これが (8) の答えとなる。また，(7) は，これとコンデンサーに蓄えられた静電エネルギーの差より，

$$W_2 = W - U_2 = \frac{1}{2}CV_0{}^2$$

と求まる。

(5) についても，微小時間 Δt の間に移動した電荷は ΔQ より，電源がする仕事は，

$$\Delta W = V_0 \Delta Q$$

また，この間にコンデンサーに蓄えられる静電エネルギーは，

$$\Delta U = \frac{1}{2C}\{(Q+\Delta Q)^2 - Q^2\}$$
$$= \frac{1}{2C}\{2Q\Delta Q + (\Delta Q)^2\}$$

$(\Delta Q)^2$ の項は小さいから無視すると，

$$\Delta U = \frac{Q}{C}\Delta Q$$

よって，この間に抵抗で発生したジュール熱は，

$$\Delta W_2 = \Delta W - \Delta U = \Delta Q V_0 - \frac{Q}{C}\Delta Q = \left(V_0 - \frac{Q}{C}\right)\Delta Q$$

（別解 2）

（7）を，（5）を積分することによって求める。充電はじめの状態での電荷を Q_{i}，終わりの状態での電荷を Q_{f} とすると，

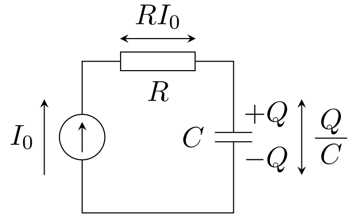
$$W_2 = \int_{Q_{\mathrm{i}}}^{Q_{\mathrm{f}}} \left(V_0 - \frac{Q}{C}\right) dQ = \left[V_0 Q - \frac{Q^2}{2C}\right]_{Q_{\mathrm{i}}}^{Q_{\mathrm{f}}}$$

$Q_{\mathrm{i}} = 0$，$Q_{\mathrm{f}} = CV_0$ より，

$$W_2 = V_0 \cdot CV_0 - \frac{(CV_0)^2}{2C} = \frac{1}{2}C{V_0}^2$$

II．後半（定電流電源）

時刻 t のときにコンデンサーに蓄えられている電荷を Q とすると，オームの法則とコンデンサーの基本式を用いて以下の図が描ける。



いま，電流は I_0 で一定で，$t=0$ のとき $Q=0$ なので，$Q=I_0t$ の関係が成り立つ。$t=t_1$ のときコンデンサーの極板間電位が V_0 より，

$$\frac{I_0t_1}{C}=V_0 \Leftrightarrow t_1=\underbrace{\boldsymbol{\frac{CV_0}{I_0}}}_{(9)}$$

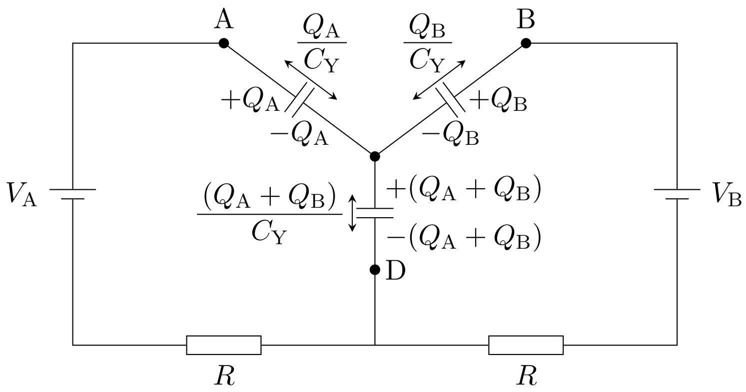
また，$t=0$ から $t=t_1$ の間に抵抗で発生したジュール熱は，

$$R{I_0}^2\cdot t_1=RI_0CV_0=\underbrace{\boldsymbol{RCV_0I_0}}_{(10)}$$

Ⅲ.

問 1

Y 型素子を接続した回路を回路図に表す。十分時間経過後の各コンデンサーに蓄えられた電荷，および各コンデンサーの極板間の電位差は以下の図のように表せる。なお，十分時間がたっているから電流は流れていない。



上図を描くに際して，中心にある導線について電荷が 0 で保存することから，最も D に近いコンデンサーに蓄えられた電荷を求めた。

キルヒホッフの法則より，上図の左側，右側の閉回路それぞれについて，

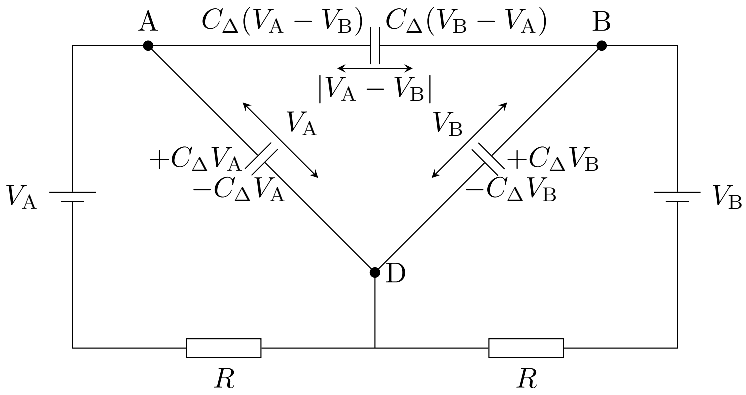
$$\begin{cases}\dfrac{Q_A}{C_Y}+\dfrac{Q_A+Q_B}{C_Y}=V_A\\ \dfrac{Q_B}{C_Y}+\dfrac{Q_A+Q_B}{C_Y}=V_B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2Q_A+Q_B=C_YV_A\\ Q_A+2Q_B=C_YV_B\end{cases}$$

これを解いて，

$$\begin{cases}\boldsymbol{Q_A=\dfrac{C_Y}{3}(2V_A-V_B)}\\ \boldsymbol{Q_B=\dfrac{C_Y}{3}(2V_B-V_A)}\end{cases}$$

問 2

同様に回路図を描く。



上図のように，AD 間の電位差は V_A，BD 間の電位差は V_B，AB 間の電位差は $|V_A - V_B|$ であることから，AD 間，BD 間，AB 間のコンデンサーに蓄えられる電気量はそれぞれ，$C_\Delta V_A$，$C_\Delta V_B$，$C_\Delta |V_A - V_B|$ である。また，A からみた B の電位が $V_B - V_A$ であるから，AB 間のコンデンサーの B 側の電荷が $C_\Delta(V_B - V_A)$，A 側の電荷が $-C_\Delta(V_B - V_A) = C_\Delta(V_A - V_B)$ となる。よって，

$$\boldsymbol{Q_A{}'} = C_\Delta V_A + C_\Delta(V_A - V_B) \boldsymbol{= C_\Delta(2V_A - V_B)}$$

$$\boldsymbol{Q_B{}'} = C_\Delta V_B + C_\Delta(V_B - V_A) \boldsymbol{= C_\Delta(2V_B - V_A)}$$

（別解）

電気量をおいて解くこともできる。ここでは，AD 間のコンデンサーの A 側の電荷を Q_1，BD 間のコンデンサーの B 側の電荷を Q_2 とおく。

AB 間のコンデンサーに着目すると，

$$Q_A{}' - Q_1 = -(Q_B{}' - Q_2) \Leftrightarrow Q_A{}' + Q_B{}' = Q_1 + Q_2 \qquad \cdots\cdots ②$$

左側，右側，真ん中の閉回路それぞれについて，キルヒホッフの法則より，

$$V_A = \frac{Q_1}{C_\Delta} \Leftrightarrow Q_1 = C_\Delta V_A \qquad \cdots\cdots ③$$

$$V_B = \frac{Q_2}{C_\Delta} \Leftrightarrow Q_2 = C_\Delta V_B \qquad \cdots\cdots ④$$

$$\frac{Q_1}{C_\Delta} = \frac{Q_A{}' - Q_1}{C_\Delta} + \frac{Q_2}{C_\Delta} \Leftrightarrow Q_A{}' = 2Q_1 - Q_2 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

②，⑤より，

$$Q_{\mathrm{B}}{}' = 2Q_2 - Q_1 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

③，④を⑤，⑥に代入して，

$$\begin{cases} Q_{\mathrm{A}}{}' = C_\Delta(2V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}}) \\ Q_{\mathrm{B}}{}' = C_\Delta(2V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}) \end{cases}$$

問 3

問 1，問 2 の結果より，

$$\begin{cases} Q_{\mathrm{A}} = Q_{\mathrm{A}}{}' \\ Q_{\mathrm{B}} = Q_{\mathrm{B}}{}' \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{C_{\mathrm{Y}} = 3C_\Delta}$$

また，$V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{B}} = V$ とすると，

$$Q_{\mathrm{A}} = Q_{\mathrm{A}}{}' = Q_{\mathrm{B}} = Q_{\mathrm{B}}{}' = C_\Delta V$$

また，Y 型素子の 3 つのコンデンサーの電気容量はすべて等しいので，最も大きい電位差がかかっているコンデンサーは，蓄えられた電気量が最も大きいコンデンサーであり，それは端子 D 側のコンデンサーである。よって，

$$V_{\mathrm{Y}} = \frac{Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{Y}}} = \frac{2}{3}V$$

一方，Δ 型素子に関しては，$V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{B}}$ より，AB 間のコンデンサーにかかる電圧は 0 であり，また対称性から AD 間と BD 間のコンデンサーにかかる電圧は等しい。よって，

$$V_\Delta = \frac{C_\Delta V_{\mathrm{A}}}{C_\Delta}\left(= \frac{C_\Delta V_{\mathrm{B}}}{C_\Delta}\right) = V$$

以上より，

$$\boldsymbol{V_{\mathrm{Y}} = \frac{2}{3}V_\Delta}$$

（ 岡部律心，岡田和也，三澤颯大 ）

2016年度 大阪大学 前期 物理

〔3〕　熱機関ごとの熱効率の比較

出題範囲	気体の法則・気体の状態変化
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	2 種類の熱サイクルについて，ⅠとⅡでそれぞれの熱効率を求めたのち，Ⅲでそれらを比較するという構成。基本的には状態方程式と熱力学第一法則を使えば解けるので，落ち着いて解いてほしい。 問 3，問 7 と問 8 において，サイクルが 1 周する間に気体がした仕事を求めるときは，サイクルが 1 周したときの気体の内部エネルギーの変化は 0 であるということを用いると楽である。 また，問 9 で W_{C} の正負を考えるときは，仕事は p-V 図でグラフが囲む面積である，という仕事の定義を用いればよい。最後の熱効率の大小を比較するときは，$Q_2 < 0$ に注意。

解答

Ⅰ. 問 1　最低：A，最高：C

問 2　$Q_1 = \dfrac{3}{2}(p_{\mathrm{C}}V_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{B}})$，$Q_2 = \dfrac{3}{2}(p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{D}}V_{\mathrm{A}})$

問 3　$W_{\mathrm{a}} = Q_1 + Q_2$

問 4　$p_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{a}}{}^{-\frac{5}{3}}p_{\mathrm{B}}$，$p_{\mathrm{D}} = r_{\mathrm{a}}{}^{-\frac{5}{3}}p_{\mathrm{C}}$

問 5　$\Delta e_{\mathrm{a}} = r_{\mathrm{a}}{}^{-\frac{2}{3}}$

Ⅱ. 問 6　$Q_3 = \dfrac{5}{2}p_{\mathrm{C}}(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{E}})$

問 7　$\Delta e_{\mathrm{b}} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{s^{\frac{5}{3}} - 1}{s - 1} r_{\mathrm{b}}{}^{-\frac{2}{3}}$

Ⅲ. 問 8　$W_{\mathrm{C}} = Q_3 - Q_1$

問 9　W_{C} の正負：(a)，e_{a} と e_{b} の大小関係：(c)

解説

以降，状態 X（$\mathrm{X} = \mathrm{A, B, C, D, E}$）における絶対温度を T_{X} と表す。

また，状態 X から状態 Y（$\mathrm{Y} = \mathrm{A, B, C, D, E}$）に変化するときの内部エネルギーの変化量を ΔU_{XY}，気体が外部にした仕事を W_{XY} と表す。

Ⅰ.

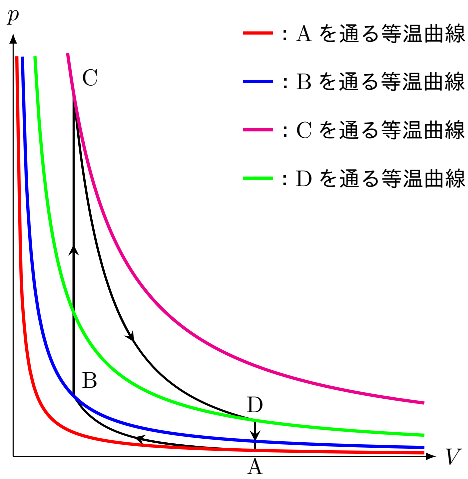
問 1

p-V 図において，ある状態に対する等温変化と断熱変化のグラフを比較する。V が小さくなる場合，断熱変化では熱が逃げないため，等温変化よりも圧力が大きくなり，断熱変化のグラフが上になる。反対に V が大き

くなる場合，等温変化では外部から熱が供給されるため，断熱変化よりも圧力が大きくなり，等温変化のグラフが上になる。

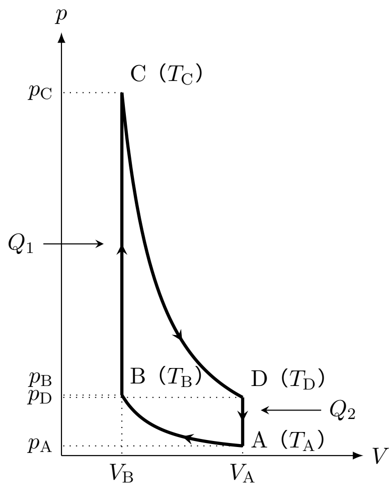
以上のことに注意して，4 つの状態についてそれぞれ等温変化のグラフをかくと右のようになるため，気体の温度が**最も低い状態は A，最も高い状態は C** である。

なお，グラフでは便宜上 $T_\mathrm{B} < T_\mathrm{D}$ のようにかいたが，実際の T_B と T_D の大小関係はこの時点では求まらない。



（別解）

状態 A 以外の温度を T_A で表して定量的に比較する。



断熱変化において，

$$pV^{\frac{5}{3}} = 一定$$

であり，状態方程式より，

$$pV = nRT$$

$$\therefore \quad p = \frac{nRT}{V}$$

断熱変化の式に代入して，

$$nRT \cdot V^{\frac{2}{3}} = 一定$$

n，R は一定だから，

$$TV^{\frac{2}{3}} = 一定$$

よって，A → B について，

$$T_\mathrm{B}{V_\mathrm{B}}^{\frac{2}{3}} = T_\mathrm{A}{V_\mathrm{A}}^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \quad T_\mathrm{B} = \left(\frac{V_\mathrm{A}}{V_\mathrm{B}}\right)^{\frac{2}{3}} T_\mathrm{A} \ (> T_\mathrm{A})$$

また，B → C について，ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{p_C V_B}{T_C} = \frac{p_B V_B}{T_B}$$

$$\therefore \quad T_C = \frac{p_C}{p_B} T_B$$

$$= \frac{p_C}{p_B} \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\frac{2}{3}} T_A \ (> T_B > T_A)$$

C → D についても，断熱変化の式と状態方程式より，

$$T_D = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\frac{2}{3}} T_C \ (< T_C)$$

$$= \frac{p_C}{p_B} T_A \ (> T_A)$$

以上より，気体の温度が最も低い状態は A，最も高い状態は C である。

本解と同様に，T_B と T_D の大小は決定しない。

問 2

熱力学第一法則より，$Q_1 = \Delta U_{BC} + W_{BC}$ が成り立つ。また，B → C は定積変化であるから，$W_{BC} = 0$ である。よって，単原子分子理想気体の内部エネルギーは $\frac{3}{2}nRT$ と書けるから，

$$Q_1 = \Delta U_{BC} + W_{BC}$$

$$= \frac{3}{2} nR\Delta T + 0$$

$$= \frac{3}{2}(nRT_C - nRT_B)$$

状態方程式を用いて，

$$\boldsymbol{Q_1 = \frac{3}{2}(p_C V_B - p_B V_B)}$$

また，D → A についても同様に考えて，

$$\boldsymbol{Q_2} = \Delta U_{DA} + W_{DA} = \frac{3}{2}(nRT_A - nRT_D) + 0$$

$$\boldsymbol{= \frac{3}{2}(p_A V_A - p_D V_A)}$$

問 3

サイクルが 1 周したとき，同じ状態に戻るため，内部エネルギーの変化は 0 である。よって，熱力学第一法則より，（サイクル 1 周の間に気体がした仕事）＝（サイクル 1 周の間に加えた熱量）という式が成り立つので，

$$\boldsymbol{W_{\mathrm{a}} = Q_1 + Q_2}$$

（別解）

それぞれの過程でした仕事を求め，それらを足し合わせて求める。

B → C，D → A は定積変化より，

$$W_{\mathrm{BC}} = W_{\mathrm{DA}} = 0$$

熱力学第一法則より，

$$Q = \Delta U + W$$

また，A → B，C → D は断熱変化より，$Q = 0$ であるから，

$$W = Q - \Delta U = 0 - \Delta U$$

$$\therefore \quad W = -\Delta U$$

が成り立つ。よって，

$$W_{\mathrm{AB}} = -\Delta U_{\mathrm{AB}} = -\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{B}} - T_{\mathrm{A}}) = -\frac{3}{2}(p_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}})$$

$$W_{\mathrm{CD}} = -\Delta U_{\mathrm{CD}} = -\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{C}}) = -\frac{3}{2}(p_{\mathrm{D}}V_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{C}}V_{\mathrm{B}})$$

以上より，

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{a}} &= W_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{BC}} + W_{\mathrm{CD}} + W_{\mathrm{DA}} \\ &= -\frac{3}{2}(p_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}) + 0 - \frac{3}{2}(p_{\mathrm{D}}V_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{C}}V_{\mathrm{B}}) + 0 \\ &= -\frac{3}{2}\{(p_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}) + (p_{\mathrm{D}}V_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{C}}V_{\mathrm{B}})\} \\ &= \frac{3}{2}(p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{D}}V_{\mathrm{A}}) + \frac{3}{2}(p_{\mathrm{C}}V_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{B}}) \\ &= Q_1 + Q_2 \end{aligned}$$

問 4

$\mathrm{A} \to \mathrm{B}$，$\mathrm{C} \to \mathrm{D}$ は断熱変化より，$pV^{\frac{5}{3}}$ は一定だから，

$$\boldsymbol{p_{\mathrm{A}}} = \left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right)^{\frac{5}{3}} p_{\mathrm{B}} \boldsymbol{= r_{\mathrm{a}}{}^{-\frac{5}{3}} p_{\mathrm{B}}}$$

$$\boldsymbol{p_{\mathrm{D}}} = \left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\right)^{\frac{5}{3}} p_{\mathrm{C}} \boldsymbol{= r_{\mathrm{a}}{}^{-\frac{5}{3}} p_{\mathrm{C}}}$$

問 5

グラフより，$p_{\mathrm{C}} > p_{\mathrm{B}}$，$p_{\mathrm{D}} > p_{\mathrm{A}}$ であるから，

$$Q_1 = \frac{3}{2}(p_{\mathrm{C}} - p_{\mathrm{B}})V_{\mathrm{B}} > 0$$

$$Q_2 = \frac{3}{2}(p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{D}})V_{\mathrm{A}} < 0$$

よって，$Q_{\mathrm{a}} = Q_1$ となる。これと問 3 の式を熱効率の式に代入すると，

$$e_{\mathrm{a}} = \frac{W_{\mathrm{a}}}{Q_{\mathrm{a}}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta e_{\mathrm{a}}} &= 1 - e_{\mathrm{a}} \\
&= -\frac{Q_2}{Q_1} \\
&= -\frac{\frac{3}{2}(p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{D}})V_{\mathrm{A}}}{\frac{3}{2}(p_{\mathrm{C}} - p_{\mathrm{B}})V_{\mathrm{B}}} \\
&= \frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}} \cdot \frac{r_{\mathrm{a}}{}^{-\frac{5}{3}}(p_{\mathrm{C}} - p_{\mathrm{B}})}{p_{\mathrm{C}} - p_{\mathrm{B}}} \\
&= r_{\mathrm{a}} \cdot r_{\mathrm{a}}{}^{-\frac{5}{3}} \\
&\boldsymbol{= r_{\mathrm{a}}{}^{-\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

II.

問 6

E → C は定圧変化より，仕事 W_{EC} は，

$$W_{\mathrm{EC}} = p_{\mathrm{C}}\Delta V = p_{\mathrm{C}}(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{E}})$$

状態方程式より，

$$p_{\mathrm{C}}V_{\mathrm{B}} = nRT_{\mathrm{C}}$$

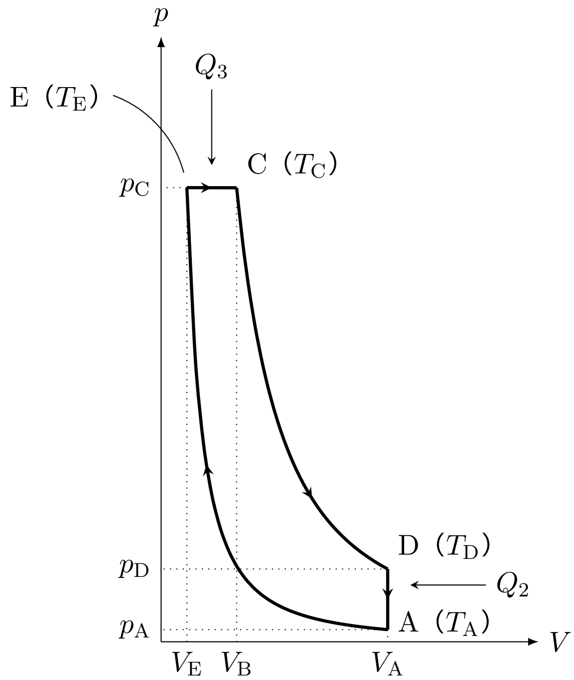
$$p_{\mathrm{C}}V_{\mathrm{E}} = nRT_{\mathrm{E}}$$

よって，内部エネルギーの変化 ΔU_{EC} は，

$$\Delta U_{\mathrm{EC}} = \frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{E}}) = \frac{3}{2}p_{\mathrm{C}}(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{E}})$$

以上を熱力学第一法則に代入して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q_3} &= \Delta U_{\mathrm{EC}} + W_{\mathrm{EC}} \\ &= \frac{3}{2}p_{\mathrm{C}}(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{E}}) + p_{\mathrm{C}}(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{E}}) \\ &\boldsymbol{= \frac{5}{2}p_{\mathrm{C}}(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{E}})} \end{aligned}$$



問 7

$V_{\rm B} > V_{\rm E}$ なので，問 6 より $Q_3 > 0$，よって，$Q_{\rm b} = Q_3$ である。問 3 と同様にサイクルが 1 周することを考えると，（サイクル 1 周の間に気体がした仕事）＝（サイクル 1 周の間に加えた熱量）であるから，

$$W_{\rm b} = Q_3 + Q_2$$

よって，

$$e_{\rm b} = \frac{W_{\rm b}}{Q_{\rm b}} = \frac{Q_3 + Q_2}{Q_3} = 1 + \frac{Q_2}{Q_3}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\Delta e_{\rm b} &= 1 - e_{\rm b}\\ &= -\frac{Q_2}{Q_3}\\ &= -\frac{\frac{3}{2}(p_{\rm A} - p_{\rm D})V_{\rm A}}{\frac{5}{2}p_{\rm C}(V_{\rm B} - V_{\rm E})}\\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{(p_{\rm D} - p_{\rm A})V_{\rm A}}{p_{\rm C}(V_{\rm B} - V_{\rm E})}\end{aligned}$$

$p_{\rm A}$，$p_{\rm D}$ を $V_{\rm A}$，$V_{\rm B}$，$V_{\rm E}$，$p_{\rm C}$ を用いて表す。$\rm C \to D$ は断熱変化より，

$$p_{\rm D} = \left(\frac{V_{\rm B}}{V_{\rm A}}\right)^{\frac{5}{3}} p_{\rm C}$$

また，$\rm A \to E$ も断熱変化より，

$$p_{\rm A} = \left(\frac{V_{\rm E}}{V_{\rm A}}\right)^{\frac{5}{3}} p_{\rm C}$$

よって，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta e_{\rm b}} &= \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{p_{\rm D}}{p_{\rm C}} - \frac{p_{\rm A}}{p_{\rm C}}\right)\cdot\frac{V_{\rm A}}{V_{\rm B} - V_{\rm E}}\\ &= \frac{3}{5}\cdot\left\{\left(\frac{V_{\rm B}}{V_{\rm A}}\right)^{\frac{5}{3}} - \left(\frac{V_{\rm E}}{V_{\rm A}}\right)^{\frac{5}{3}}\right\}\cdot\frac{\frac{V_{\rm A}}{V_{\rm E}}}{\frac{V_{\rm B}}{V_{\rm E}} - 1}\\ &= \frac{3}{5}\cdot\left\{\left(\frac{V_{\rm B}}{V_{\rm E}}\right)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{V_{\rm E}}{V_{\rm A}}\right)^{\frac{5}{3}} - \left(\frac{V_{\rm E}}{V_{\rm A}}\right)^{\frac{5}{3}}\right\}\cdot\frac{\frac{V_{\rm A}}{V_{\rm E}}}{\frac{V_{\rm B}}{V_{\rm E}} - 1}\\ &= \frac{3}{5}\cdot r_{\rm b}^{-\frac{5}{3}}\left(s^{\frac{5}{3}} - 1\right)\cdot\frac{r_{\rm b}}{s - 1}\\ &\boldsymbol{= \frac{3}{5}\cdot\frac{s^{\frac{5}{3}} - 1}{s - 1}r_{\rm b}^{-\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

（別解）

状態方程式より，

$$\Delta e_{\mathrm{b}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{p_{\mathrm{D}} V_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{C}} V_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{C}} V_{\mathrm{E}}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{E}}}$$

T_{C}，T_{D}，T_{E} を T_{A} で表す。ボイル・シャルルの法則より，

$$T_{\mathrm{C}} = \frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{E}}} T_{\mathrm{E}}$$

また，$\mathrm{A} \to \mathrm{E}$ は断熱変化より，

$$T_{\mathrm{E}} = \left(\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{E}}} \right)^{\frac{2}{3}} T_{\mathrm{A}}$$

問 1 と状態 B，E の状態方程式より，

$$T_{\mathrm{D}} = \frac{p_{\mathrm{C}}}{p_{\mathrm{B}}} T_{\mathrm{A}} = \frac{\dfrac{nRT_{\mathrm{E}}}{V_{\mathrm{E}}}}{\dfrac{nRT_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{B}}}} T_{\mathrm{A}} = \frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{E}}} \cdot \frac{T_{\mathrm{E}}}{T_{\mathrm{B}}} T_{\mathrm{A}}$$

ここで，$\mathrm{B} \to \mathrm{E}$ は断熱変化より，$T_{\mathrm{B}} {V_{\mathrm{B}}}^{\frac{5}{3}} = T_{\mathrm{E}} {V_{\mathrm{E}}}^{\frac{5}{3}}$ が成り立つから，

$$T_{\mathrm{D}} = \frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{E}}} \cdot \left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{E}}} \right)^{\frac{2}{3}} T_{\mathrm{A}} = \left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{E}}} \right)^{\frac{5}{3}} T_{\mathrm{A}}$$

以上より，

$$\begin{aligned}
\Delta e_{\mathrm{b}} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{E}}} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{\left(\dfrac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{E}}} \right)^{\frac{5}{3}} T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{A}}}{\dfrac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{E}}} T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{E}}} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{\left(\dfrac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{E}}} \right)^{\frac{5}{3}} - 1}{\dfrac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{E}}} - 1} \cdot \frac{T_{\mathrm{A}}}{\left(\dfrac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{E}}} \right)^{\frac{2}{3}} T_{\mathrm{A}}} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{s^{\frac{5}{3}} - 1}{s - 1} {r_{\mathrm{b}}}^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Ⅲ.

問 8

問 3，問 7 と同様に（サイクル 1 周の間に気体がした仕事）$=$（サイクル 1 周の間に加えた熱量）であり，B → C で気体が外部から吸収した熱量が Q_1 なので，C → B で気体が外部から吸収した熱量は $-Q_1$ となる。よって，

$$\boldsymbol{W_{\mathrm{C}} = Q_3 - Q_1}$$

問 9

p-V 図で，体積が減少するため，B → E と V 軸で囲まれた面積が負の仕事。体積が増加するため，E → C と V 軸で囲まれた面積が正の仕事であり，C → B は定積変化なので外部に仕事をしない。よって，p-V 図においてサイクル B → E → C → B が囲む面積だけ気体は外部に正の仕事をするから，（a）$\boldsymbol{W_{\mathrm{C}} > 0}$ である。

また，

$$e_{\mathrm{a}} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$e_{\mathrm{b}} = 1 + \frac{Q_2}{Q_3}$$

であり，$W_{\mathrm{C}} > 0$ と問 8 より，

$$Q_3 > Q_1 \ (> 0)$$

よって，

$$\frac{1}{Q_1} > \frac{1}{Q_3}$$

$Q_2 < 0$ であるから，（c）$\boldsymbol{e_{\mathrm{a}} < e_{\mathrm{b}}}$ とわかる。

（森田涼介，岡田和也，一丸友美，三澤颯大）