2016 年度 大阪大学 前期 数学

1 整数と 2 次方程式

出題範囲	整数の性質／2 次関数
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	(1) はグラフを考えればすんなり解ける。ときどき使う手法であるから，しっかり押さえておこう。(2) がドツボにはまりやすく，(1) の誘導がわかりづらい。「割り切れる」を「倍数」と読み替えて，上手く式で表せたかどうかが分かれ目となるであろう。

解答

(1)【証明】$f(x) = x^2 - kax + a - k\,(a > 0, k \geqq 1)$ とおくと，

$a > 0$ より

$$f\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2} + k + a - k = \frac{1}{a^2} + a > 0$$

$a > 0$，$k = 1$ より

$$f(1) = 1 - ka + a - k = (1 + a)(1 - k) \leqq 0$$

よって，放物線 $y = f(x)$ は $-\frac{1}{a} < x \leqq 1$ で x 軸と共有点をもつので，$f(x) = 0$ は $-\frac{1}{a} < s \leqq 1$ を満たす実数解 s をもつ。 (証明終)

(2) 以下，a，n はそれぞれ $a \geqq 3$，$n \geqq 2$ を満たす整数とする。

$n^2 + a$ が $an + 1$ で割り切れるとき，$n^2 + a$ と $an + 1$ はともに自然数なので，$n^2 + a = k(an + 1)$(k は自然数) と書ける。これを変形して

$$n^2 - kan + a - k = 0$$

k は自然数なので，$k \geqq 1$ であり，a は 3 以上の整数なので，$a > 0$ である。よって，n は $f(x) = 0$ の解の 1 つである。さらに (1) より，$f(x) = 0$ は $-\frac{1}{a} < s \leqq 1 < n$ を満たす実数解 s をもつので，$f(x) = 0$ は異なる 2 解 s，n をもつ。解と係数の関係より

$$s + n = ka \Leftrightarrow s = ka - n$$

であり，k，a，n はすべて整数なので，s は整数。また

$$-\frac{1}{3} \leqq -\frac{1}{a} < s \leqq 1$$

を満たしているので $s=0, 1$ である。

(i) $s=0$ の場合

$f(s)=f(0)=0$ より，$a-k=0 \Longleftrightarrow k=a$

このとき，$n=ka-s=a^2(\geqq 2)$

(ii) $s=1$ の場合

$f(s)=f(1)=0$ より

$$1-ka+a-k=0 \Leftrightarrow (1+a)(1-k)=0$$

$a \geqq 3$ より $a+1 \neq 0$ なので，$k=1$ である。このとき，$n=ka-s=a-1(\geqq 2)$

以上より

$$n=a^2,\ a-1$$

解説

(1) $f(x)=0$ の解を $y=f(x)$ と x 軸の共有点として考え，$-\dfrac{1}{a}<s \leqq 1$ におけるグラフの様子を調べることで答えを導いている。

(2) 一見 (1) と (2) は関連がないように見えるが，うまく式変形を行えば (2) で (1) が使えることに気づく。「整数」という条件をうまく使って調べる範囲を絞っていこう。答えが出たら $n \geqq 2$ のチェックも忘れずに行うこと。

（不死原大知，沈有程，青木徹）

2016 年度 大阪大学 前期 数学

2　2 次関数と積分

出題範囲	2 次関数／積分
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	2 次関数を題材にした図形的な問題。ここでは定数分離の方法を用いる解法がおすすめである。(1) で丁寧な場合分けをしてグラフを書こう。(2) では直線の傾きを利用して線分の長さを求めると楽である。(2) 以降は計算力も要求されている。

解答

(1) 曲線 $y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-2x$ と直線 $y=-x+t$ の交点の個数を考えるので，これらを連立して

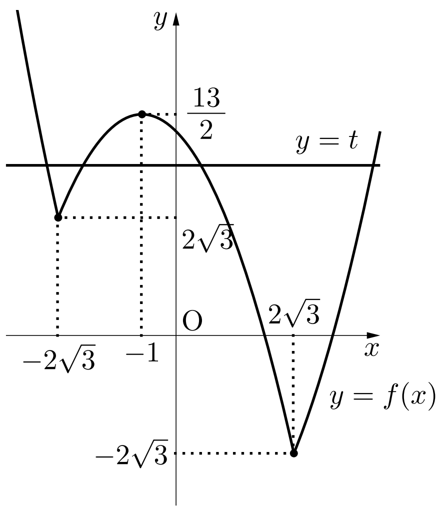
$$\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-2x=-x+t \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-x=t$$

が得られる。そこで，$f(x)=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-x$ とおき，$y=f(x)$ のグラフと $y=t$ のグラフの交点の個数を考える。絶対値を外すと[1]

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-x-6=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{13}{2} & (x<-2\sqrt{3}, x>2\sqrt{3})\\ -\frac{1}{2}x^2-x+6=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{13}{2} & (-2\sqrt{3}\leqq x\leqq 2\sqrt{3})\end{cases}$$

[1] 定数分離している。必須テクニックであるから，必ず押さえておこう。

これより，$y=f(x)$ のグラフと $y=t$ のグラフの関係は以下のようになる。



この図より，交点が異なる 4 点となる t の範囲は

$$2\sqrt{3} < t < \frac{13}{2}$$

(2) $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ の x 座標をそれぞれ x_1, x_2, x_3, x_4 とする。直線 L の傾きは -1 であるので[2]

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\right| = \sqrt{2}(x_2 - x_1)$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\right| = \sqrt{2}(x_3 - x_2)$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}\right| = \sqrt{2}(x_4 - x_3)$$

[2] $1 : 1 : \sqrt{2}$ の直角三角形を考えてみるとよい。この考え方ができれば，$\mathrm{P}_1 \sim \mathrm{P}_4$ の y 座標を求める必要がなくなり，時間短縮につながる。

これらを，与えられた条件式に代入して

$$\frac{(x_2 - x_1) + (x_4 - x_2)}{x_3 - x_2} = 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

さて，x_1 と x_4 は

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 6 = t \iff x^2 - 2x - 2t - 12 = 0$$

の 2 解なので

$$x_1 = 1 - \sqrt{13 + 2t},\ x_4 = 1 + \sqrt{13 + 2t}$$

である。また，x_2 と x_3 は

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 6 = t \iff x^2 + 2x + 2t - 12 = 0$$

の 2 解なので

$$x_2 = -1 - \sqrt{13 - 2t},\ x_3 = -1 + \sqrt{13 - 2t}$$

である。これらを ① に代入して

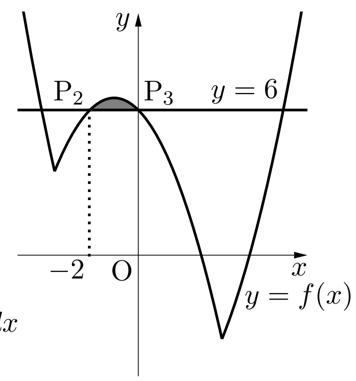
$$\frac{\{(-1 - \sqrt{13 - 2t}) - 1 - \sqrt{13 + 2t}\} + \{(1 + \sqrt{13 + 2t}) - (-1 + \sqrt{13 - 2t})\}}{(-1 + \sqrt{13 - 2t}) - (-1 - \sqrt{13 - 2t})} = 4$$

$$\frac{\sqrt{13 + 2t}}{\sqrt{13 - 2t}} = 5$$

両辺ともに正なので 2 乗し，$13 - 2t$(ただし，$t \fallingdotseq \dfrac{13}{2}$) を両辺にかけて

$$13 + 2t = 25(13 - 2t) \quad \text{よって} \quad t = 6$$

(3) $t=6$ のとき，$x_2=-2, x_3=0$ である。$-2 \leqq x \leqq 0$ では曲線 C が線分 $\mathrm{P_2P_3}$ の上側にある。よって，右図の網掛け部の面積を求めればよい。その面積は



$$\int_{-2}^{0}\left\{-\frac{1}{2}x^2-2x+6-(-x+6)\right\}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x(x+2)dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2^3$$
$$=\frac{2}{3}$$

解説

(1) 絶対値を含む関数と直線の交点の個数を求める問題では，定数分離して，$y=f(x)$ のグラフと $y=t$ のグラフの交点の個数を考える方法が有効である。絶対値を外す際の場合分けを慎重に行おう。

(2) 直線 L の傾きを利用できると思いつけば，x 座標だけが必要であることがわかる。条件式を見て，解と係数の関係を使おうと考えるかもしれないが，必要なのは x_3-x_2 や x_4-x_1 であるからかえって使いづらい。そこで，ここでは直接方程式を解いてしまう方法を採用した。

(3) (2) まで解けていれば，2 次関数の積分をするだけで答えは求められる。$\dfrac{1}{6}$ 公式を使うと計算が楽になる。

（井上輝義，不死原大知，沈有程）

2016 年度 大阪大学 前期 数学

3　三角関数と確率

出題範囲	三角関数／場合の数と確率
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	仰々しい見た目をしているが，先に下準備をしておくと楽に処理できる。(2) は一見すると整数問題の基本パターンのように見えるが，未知数が多くなってしまうので，ここは一気に求めようとせず，1 つひとつ調べるほうが賢明である。ところどころ考えなくてはならない部分があるが，これくらいはぜひとも完答したい。

解答

(イ)，(ウ) より

$$\begin{aligned} f_{2n+1}(x) &= f_{2n}(-x) \\ &= f_{2n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+x\right) \qquad \cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2n+2}(x) &= f_{2n+1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right) \\ &= f_{2n}\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+x\right) \qquad \cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

(1) ① を 2 回用いて

$$\begin{aligned} f_5(x) &= f_3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+x\right) \\ &= f_1\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+x\right)\right) \\ &= f_1\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+x\right) \end{aligned}$$

よって，$a=2, b=3$ のとき

$$f_5(0) = f_1\left(\frac{5}{3}\right) = \sin\frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) ② を 2 回用いて

$$\begin{aligned} f_6(x) &= f_4\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+x\right) \\ &= f_2\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+x\right)\right) \\ &= f_2\left(-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+x\right) \end{aligned}$$

(イ) より

$$\begin{aligned} f_2\left(-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+x\right) &= f_1\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+x\right)\right) \\ &= f_1\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}-x\right) \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} f_6(0) &= f_1\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right) \\ &= \sin\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)\pi \end{aligned}$$

を得る。よって，$f_6(0)=0$ となるのは $\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}$ が整数となるときである。

a，b は 1 から 6 までの整数のいずれかなので，$\dfrac{3}{a}$，$\dfrac{3}{b}$ のとり得る値は以下のとおり。

a，b	1	2	3	4	5	6
$\dfrac{3}{a}$，$\dfrac{3}{b}$	3	$\dfrac{3}{2}$	1	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{2}$

このうち，$\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}$ が整数となるような a，b の組を調べると

$$(a,b)=(1,1),(1,3),(2,2),(2,6),(3,1),(3,3),(6,2),(6,6)$$

の 8 通り。したがって，求める確率は

$$\frac{8}{6^2}=\frac{2}{9}$$

解説

(1) $f_5(x)\to f_4(x)\to f_3(x)\to\cdots$ と順番にさかのぼって関数を求めてもよいが，解答のようにあらかじめ $f_{2n+1}(x)$ と $f_{2n-1}(x)$，$f_{2n+2}(x)$ と $f_{2n}(x)$ の関係を調べておくと，全体の計算量が少なくすむ。

(2) $\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}$ が整数となるような $(a.b)$ の値の組み合わせの数を求めることになるが，a と b の値の組み合わせの総数は $6^2=36$ 通りしかないので，解答のように 1 つひとつ調べていくのが手早い。

（神藤駿介，不死原大知，沈有程）