2015 年度 大阪大学 前期 物理

〔1〕 衝突を繰り返す単振動

出題範囲	単振動・運動量保存則・エネルギー保存則・はねかえり係数
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	大阪大学らしく，数学を使って解く問題が含まれている。基本的には単振動と運動量保存則の問題だが，計算が大変な問題もあるため，計算ミスに気をつけてほしい。 Ⅰでは，変位が x のときにはたらく力を求め，単振動の周期を求める。床の形が 2 次関数で与えられているから，接線方向の力を求めるときは，迷わず微分して傾きを求めよう。 Ⅱは，2 つの小球を転がして衝突させる問題。問 3 は，計算ですぐに求まるタイプの問題ではないので，わからなかった人は特に，とりあえず図を描くという習慣をつけよう。問 6 は，c が求まったら数学を使ってグラフをかくのが一番安全だと思われる。また問 4，5，7 は，ほぼ時間も手間もかからない問題となっているため，落とさないようにしてほしい。 Ⅲは，小球をはなすタイミングをずらす問題だが，問 10 は結局 $x=0$ で衝突するよう設定されているので，そこまで難しくない。問 9 は計算ミスをしないように気をつけてほしい。問 10 は，衝突のたびに移動距離が e 倍されることを利用すれば，比較的簡単に解ける。

解答

Ⅰ. 問 1 $b=2ag$　　**問 2** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{b}}$

Ⅱ. 問 3 0　　**問 4** $\begin{cases} \text{小球 1：} -\sqrt{b}x_0 \quad \text{または} \quad -\sqrt{2ag}x_0 \\ \text{小球 2：} -\sqrt{b}cx_0 \quad \text{または} \quad -\sqrt{2ag}cx_0 \end{cases}$

問 5 $\begin{cases} \text{運動量の保存則：} m_1v+m_2cv=m_1W \\ \text{運動エネルギーの保存則：} \dfrac{1}{2}m_1v^2+\dfrac{1}{2}m_2(cv)^2=\dfrac{1}{2}m_1W^2 \end{cases}$

問 6 $c=\dfrac{2}{1-r}$，　c の値がとる範囲：$c<0,\ 2<c$

問 7 $W=-2v$　　**問 8** 小球 1：x_0，　小球 2：$-x_0$

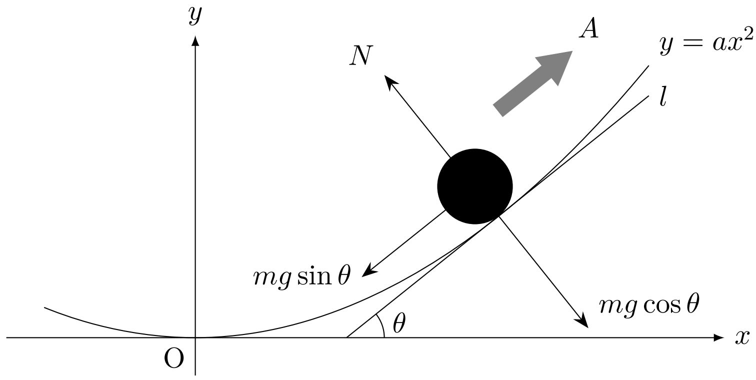
Ⅲ. 問 9 $\begin{cases} \text{力学的エネルギー：} mb\left\{(ex_0)^2+(1-e^2){x_s}^2\right\} \quad \text{または} \quad 2mag\left\{(ex_0)^2+(1-e^2){x_s}^2\right\} \\ \text{力学的エネルギーが最小になる } x_s \text{：} 0 \end{cases}$

問 10 $x_0\left(1+2e+2e^2+2e^3\right)\quad\left(=\dfrac{1+e-2e^4}{1-e}x_0\right)$

解説

I.

問 1



接線方向の力を考えるため，接線 l を引き，l と x 軸の正方向がなす角を θ とする。図より，$F = -mg\sin\theta$ と表せることがわかる。ここで，$y' = 2ax$ より，接線 l の傾きは $2ax$ である。一方，l の傾きは $\tan\theta$ とも表せることから，$\tan\theta = 2ax$ である。いま，θ は十分小さく，$\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta \fallingdotseq \theta$ であるから，

$$F = -mg\sin\theta \fallingdotseq -mg\tan\theta = -mg \cdot 2ax = -m \cdot 2ag \cdot x$$

$F = -mbx$ と比較して，$\boldsymbol{b = 2ag}$ とわかる。

問 2

小球の加速度を A とおくと，運動方程式は，

$$mA = F = -mbx \equiv -kx \quad (\text{注 } 1)$$

小球は単振動するため，その角振動数を ω とおくと，$A = -\omega^2 x$ と表せる。これと上の式から，$\omega = \sqrt{b}$ と書ける。よって，求める周期を T とおくと，

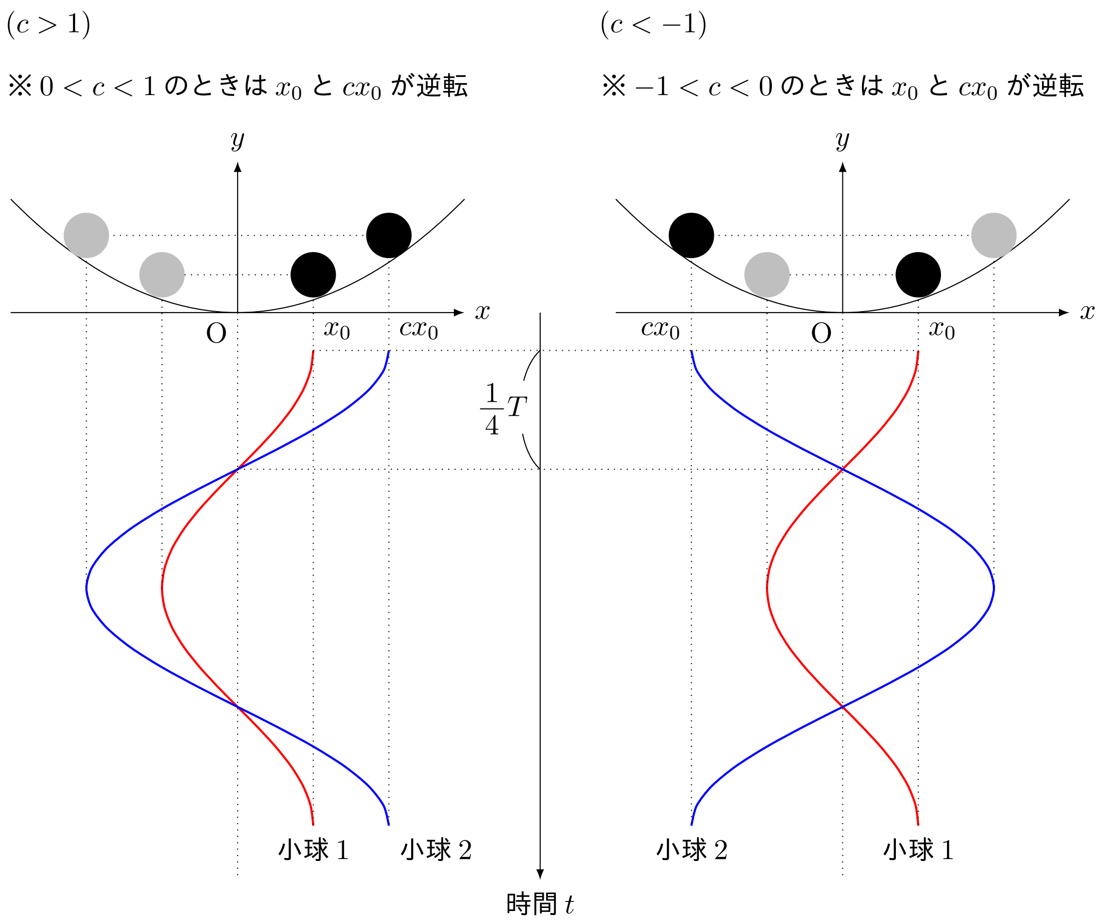
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{\sqrt{b}}}$$

※注 1

$\equiv$ という記号は，「左辺を右辺とおく」という意味である。したがって，この場合は $k = mb$ とおいたのである。運動方程式の形から，この問題で扱う運動は，ばね定数 k（$= mb$）のばねによる単振動と見なせる。

II.

問 3



問 2 より，単振動の周期 T は小球をはなす位置 x_0 によらず一定である。つまり，小球をどこではなしても，$x=0$ には時間 $\frac{1}{4}T$ 経過後に達する。したがって，2 つの小球を同時にはなせば（$c \fallingdotseq 1$（注 2）ならば），図のように最初に衝突する位置の x 座標は **0** であることがわかる。

※注 2

当然ではあるが，$c=1$ ならば 2 つの小球は常に接しながら運動することになり，「衝突」はしない。

問 4

衝突は $x=0$ で起こるから，単振動の性質より，2 つの小球の速さは衝突直前に最大となっている。小球 1，小球 2 の衝突直前の速度をそれぞれ v_1，v_2 とおく。単振動において，速さの最大値を $v_{\max}$，振幅を $x_{\max}$ とおく

と，$v_{\max} = \omega x_{\max}$ と表せることから，

$$|v_1| = |\omega x_0| = \sqrt{b}|x_0|$$

$$|v_2| = |\omega c x_0| = \sqrt{b}|cx_0|$$

$x > 0$ から転がせば $x = 0$ で速度は負に，$x < 0$ から転がせば $x = 0$ で速度は正になることから，

$$v_1 = \boldsymbol{-\sqrt{b}x_0 = -\sqrt{2ag}x_0}$$

$$v_2 = \boldsymbol{-\sqrt{b}cx_0 = -\sqrt{2ag}cx_0}$$

（別解）

2 つの小球をはなしたときと衝突直前のエネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}k_1{x_0}^2 = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2$$

$$\frac{1}{2}k_2(cx_0)^2 = \frac{1}{2}m_2{v_2}^2$$

$k = mb$ から，$k_1 = m_1 b$，$k_2 = m_2 b$ となることに注意して，

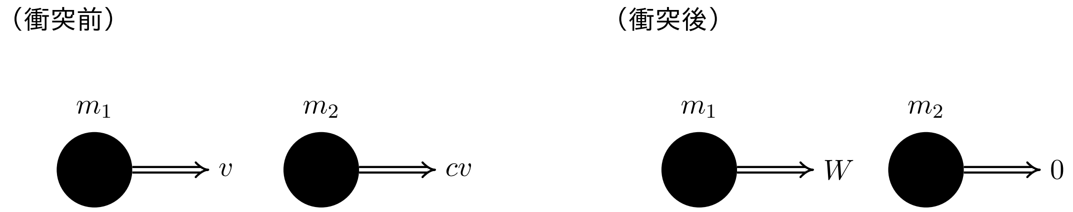
$$|v_1| = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}|x_0| = \sqrt{b}|x_0|$$

$$|v_2| = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}|cx_0| = \sqrt{b}|cx_0|$$

符号の判定は本解と同様。

問 5

$v_1 = v$（$= -\sqrt{b}x_0$）のとき，問 4 より $v_2 = cv$ となる。



運動量保存則より，

$$\boldsymbol{m_1 v + m_2 cv = m_1 W} \quad \cdots\cdots①$$

エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m_1v^2+\frac{1}{2}m_2(cv)^2=\frac{1}{2}m_1W^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

問 6

①の両辺を m_1 で，②の両辺を $\frac{1}{2}m_1$ で割り，それぞれ v，v^2 でまとめると，

$$① \Leftrightarrow W=v\left(1+c\frac{m_2}{m_1}\right)$$

$$② \Leftrightarrow W^2=v^2\left(1+c^2\frac{m_2}{m_1}\right)$$

$r=\frac{m_2}{m_1}$ を代入して，

$$① \Leftrightarrow W=v(1+cr) \qquad \cdots\cdots ①'$$

$$② \Leftrightarrow W^2=v^2(1+c^2r) \qquad \cdots\cdots ②'$$

①$'$ を②$'$ に代入して，

$$v^2(1+cr)^2=v^2(1+c^2r)$$

$$1+2cr+c^2r^2=1+c^2r$$

$$2cr+(r-1)c^2r=0$$

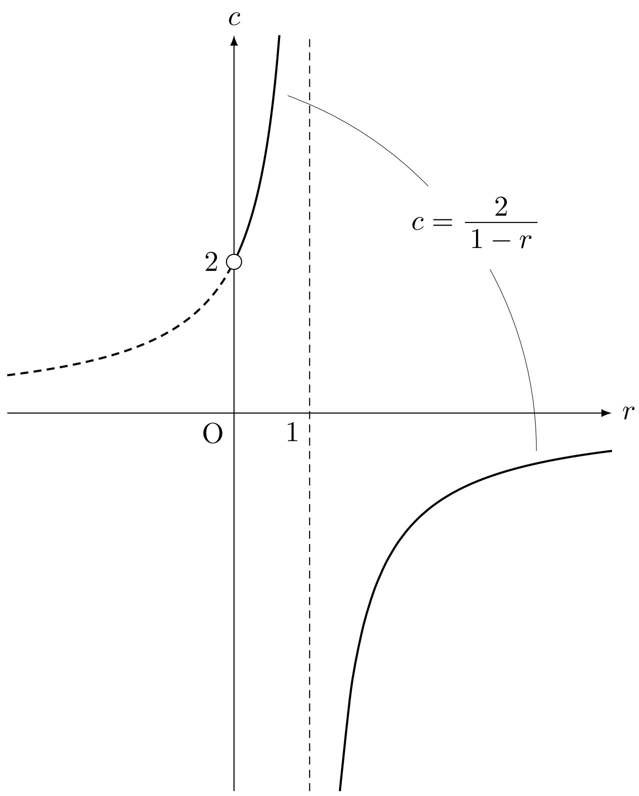
$$cr\{2+(r-1)c\}=0$$

いま，$r=\frac{m_2}{m_1}$ と $m_1\fallingdotseq m_2$ より，$r>0$ かつ $r\fallingdotseq 1$ である。また，問題文中に「最初の衝突の直後，小球 2 が静止した」とあるから，小球 2 は衝突前は運動していなければならないので（$v_2=-\sqrt{b}cx_0\fallingdotseq 0$ より），$c\fallingdotseq 0$（注 3）である。よって，

$$2+(r-1)c=0$$

$$\therefore \quad c=\frac{2}{1-r} \qquad \cdots\cdots ③$$

$c = \dfrac{2}{1-r}$（$r>0$，$r \fallingdotseq 1$）のグラフは以下のようになり，c の値がとる範囲は $\boldsymbol{c<0,\ 2<c}$ である。



（別解）

$$③ \Leftrightarrow r = 1 - \frac{2}{c}$$

よって，

$$r = 1 - \frac{2}{c} > 0$$

$$\therefore \quad \frac{2}{c} < 1$$

$$\begin{cases} \mathrm{c} > 0 \text{ のとき，} \mathrm{c} > 2 \\ \mathrm{c} < 0 \text{ のとき，} \mathrm{c} < 2 \end{cases}$$

となるから，$c<0,\ 2<c$ となる。

※注 3

①，②を数学的に解くだけなら，$c=0$ という解が出てくる。しかし，物理的に考えれば $c=0$ とは，最初から小球 2 が原点で静止していたということである。問題文から，「最初の衝突の直後，小球 2 が静止した」とあるので，$c=0$ が成立すると仮定すると，小球 2 はまったく動くことなく小球 1 をはねかえしたことになる。

運動量保存則より，

$$m_1 v = m_1 W$$

はねかえり係数の式より，

$$1 = \frac{-(W-0)}{v-0}$$

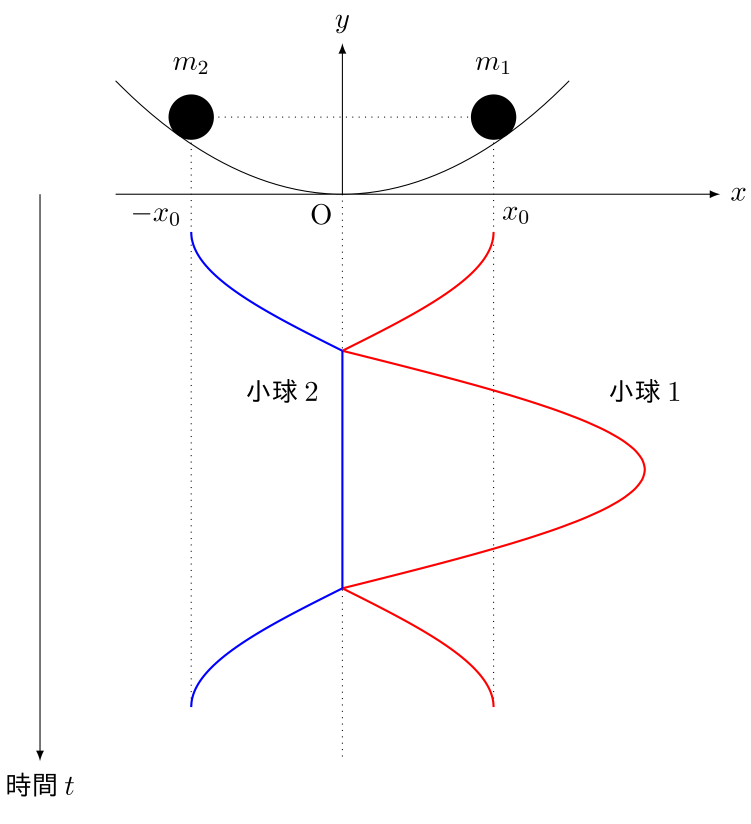
2 式より，$W = v$ かつ $W = -v$ となり，$W = 0$ となってしまう。これは，小球 1 も最初から原点で静止していたということになって，物理的に意味がない。さらに，2 つの小球の最初の位置が一致し，$c = 1$ となることからも不適。

問 7

$c = -1$ のとき，③より $r = 3$ である。よって，①$'$ より，

$$\boldsymbol{W = -2v}$$

問 8



エネルギー保存則を考えると，2 回目の衝突直前の小球 1 の速さは，1 回目の衝突直後の速さと等しいため W となる。2 回目の衝突直後の小球 1，2 の速度をそれぞれ ${v_1}'$，${v_2}'$ とおくと，2 回目の衝突前後の運動量保存則より，

$$m_1(-W) = m_1{v_1}' + m_2{v_2}' \qquad \cdots\cdots ④$$

はねかえり係数の式より，

$$1 = \frac{-({v_1}' - {v_2}')}{(-W) - 0} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$r = 3$ より，$m_2 = 3m_1$，また，問 7 より $W = -2v$ だから，

$$④ \Leftrightarrow {v_1}' + 3{v_2}' = 2v \qquad \cdots\cdots ④'$$

$$⑤ \Leftrightarrow {v_1}' - {v_2}' = -2v \qquad \cdots\cdots ⑤'$$

2 式を解いて，

$${v_1}' = -v,\ {v_2}' = v$$

このことから，2 回目の衝突直後の 2 つの小球はそれぞれ 1 回目の衝突直前と向きが反対で速さが等しくなる。よって，運動の対称性を考えると，2 つの小球の運動は上図のようになる。小球 1，2 について求める x をそれぞれ x_1，x_2 とすると，

$$x_1 = \boldsymbol{x_0},\ x_2 = \boldsymbol{-x_0}$$

（別解）

まず，${v_1}'$，${v_2}'$ の求め方について書く。④，⑤とともに，エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m_1W^2 = \frac{1}{2}m_1{v_1}'^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}'^2 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

も成り立つ。④，⑤，⑥のうち，2 式を使えば ${v_1}'$，${v_2}'$ は求まる。④，⑤を使うパターンは示してあるため，④と⑥，⑤と⑥をそれぞれ使って求める。

$m_2 = 3m_1$，$W = -2v$ から，

$$⑥ \Leftrightarrow {v_1}'^2 + 3{v_2}'^2 = 4v^2 \qquad \cdots\cdots ⑥'$$

また，④$'^2$ と ⑤$'^2$ より，

$$v_1{'}^2 + 6v_1{'}v_2{'} + 9v_2{'}^2 = 4v^2 \qquad \cdots\cdots ④''$$

$$v_1{'}^2 - 2v_1{'}v_2{'} + v_2{'}^2 = 4v^2 \qquad \cdots\cdots ⑤''$$

④と⑥を使う。④$''$ − ⑥$'$ より，

$$6v_1{'}v_2{'} + 6v_2{'}^2 = 6v_2{'}(v_1{'} + v_2{'}) = 0$$

$\therefore\quad v_2{'} = 0$ または $v_1{'} = -v_2{'}$

小球 2 が静止していたところに小球 1 が衝突したから，$v_2{'} \fallingdotseq 0$ である。よって，$v_1{'} = -v_2{'}$ とわかる。これと ④$'$ より，$v_1{'} = -v$，$v_2{'} = v$ である。

⑤と⑥を使う。⑤$''$ − ⑥$'$ より，

$$-2v_1{'}v_2{'} - 2v_2{'}^2 = -2v_2{'}(v_1{'} + v_2{'}) = 0$$

$v_2{'} \fallingdotseq 0$ から，$v_1{'} = -v_2{'}$ で，これと⑤$'$ より，$v_1{'} = -v$，$v_2{'} = v$ とわかる。

次に，x_1，x_2 についての別解を示す。原点での速度が出たので，原点と最大変位点で比較してエネルギー保存則を立てる。

$$\frac{1}{2}m_1(-v)^2 = \frac{1}{2}k_1{x_1}^2$$

$$\frac{1}{2}m_2v^2 = \frac{1}{2}k_2{x_2}^2$$

$k_1 = m_1b$，$k_2 = m_2b$，$v = -\sqrt{b}x_0$ から，

$$|x_1| = \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}|v| = \sqrt{\frac{1}{b}}\sqrt{b}|x_0|$$

$$|x_2| = \sqrt{\frac{m_2}{k_2}}|v| = \sqrt{\frac{1}{b}}\sqrt{b}|x_0|$$

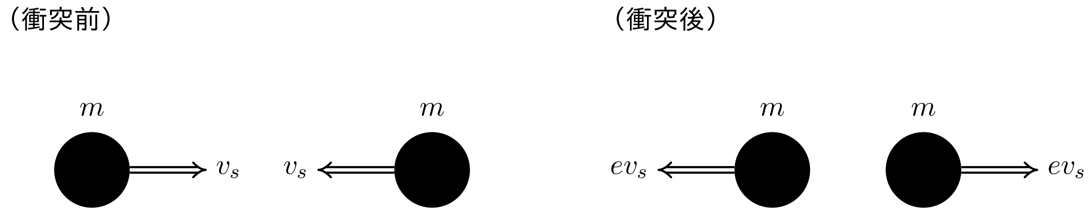
2 つの小球は原点で衝突してはねかえるから，最初にいた側（$x < 0$ または $0 < x$）にいる。よって，

$$x_1 = x_0,\ x_2 = -x_0$$

Ⅲ.

問 9

　2 つの小球を同時にはなすわけではないから，必ずしも $x=0$ で衝突するわけではないことに注意する。エネルギー保存則を考えると，$x=x_s$ での 2 つの小球の速さは等しく，これを v_s とおく（速度ではなく速さであることに注意）。対称性とはねかえり係数が e であることから，衝突直後の 2 つの小球の速さはともに ev_s である。



　よって，衝突直後の 2 つの小球の力学的エネルギーを U とおくと，

$$U=\left\{\frac{1}{2}k{x_s}^2+\frac{1}{2}m(ev_s)^2\right\}\times 2$$

　はなしたときと衝突直前のエネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}k{x_0}^2=\frac{1}{2}k{x_s}^2+\frac{1}{2}m{v_s}^2$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}m{v_s}^2=\frac{1}{2}k{x_0}^2-\frac{1}{2}k{x_s}^2$$

　これを代入して，

$$\begin{aligned}U&=2\times\left\{\frac{1}{2}k{x_s}^2+e^2\left(\frac{1}{2}k{x_0}^2-\frac{1}{2}k{x_s}^2\right)\right\}\\&=2\times\left\{\frac{1}{2}k(ex_0)^2+\frac{1}{2}k(1-e^2){x_s}^2\right\}\\&=k\{(ex_0)^2+(1-e^2){x_s}^2\}\end{aligned}$$

　よって，

$$U=\boldsymbol{mb\left\{(ex_0)^2+(1-e^2){x_s}^2\right\}}=\boldsymbol{2mag\left\{(ex_0)^2+(1-e^2){x_s}^2\right\}}$$

　$0<e<1$ より，これを最小にする x_s は，**0** である。

（別解）

　はなしたときの小球 1 つの重力による位置エネルギーは $mg\cdot a{x_0}^2$ であり，エネルギー保存則より，$x=x_s$ での小球 1 つの運動エネルギーは $mg\cdot a{x_0}^2-mg\cdot a{x_s}^2$ と表される。衝突すると速さが e 倍になるから，運動エ

ネルギーは e^2 倍になる。これと重力による位置エネルギー $mg \cdot a{x_s}^2$ を足し合わせると，

$$\frac{1}{2}U = e^2(mg \cdot a{x_0}^2 - mg \cdot a{x_s}^2) + mg \cdot a{x_s}^2$$

$$= mag\left\{(ex_0)^2 + (1-e^2){x_s}^2\right\}$$

求めたいのは 2 つの小球の力学的エネルギーなので，2 倍して，

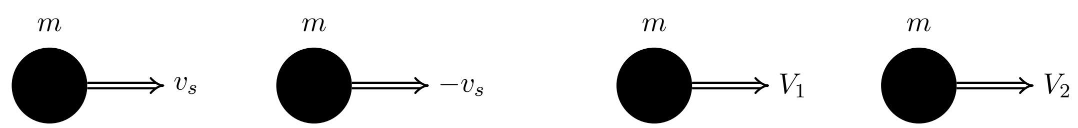
$$U = 2mag\left\{(ex_0)^2 + (1-e^2){x_s}^2\right\} = mb\left\{(ex_0)^2 + (1-e^2){x_s}^2\right\}$$

◆**Check!!**

質量と速さが等しい 2 物体の衝突

衝突直後の 2 つの小球の速さがともに ev_s であることを示す。衝突直後の小球 1，2 の速度をそれぞれ V_1，V_2 とおく。

（衝突前）　　　　（衝突後）



運動量保存則より，

$$mv_s + m(-v_s) = mV_1 + mV_2 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

はねかえり係数の式より，

$$e = \frac{-(V_1 - V_2)}{v_s - (-v_s)} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

以上を用いると，

$$⑦ \Leftrightarrow V_1 + V_2 = 0$$

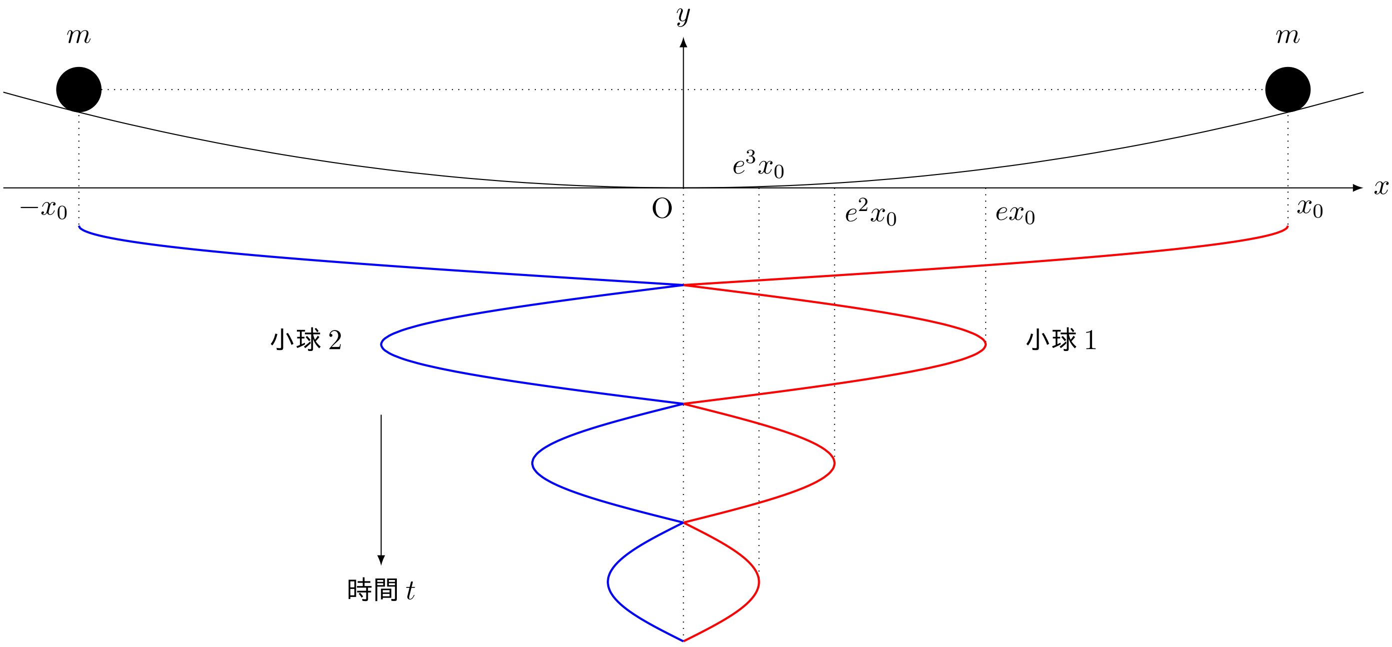
$$⑧ \Leftrightarrow V_1 - V_2 = -2ev_s$$

よって，

$$V_1 = -ev_s,\ V_2 = ev_s$$

問 10

問 9 の Check!! より，衝突のたびに速さは e 倍される。また，対称性と $x_s = 0$ より，2 つの小球は常に原点で衝突する。問 4 より，速さの最大値（原点での速さ）$v_{\max}$ と振幅（最大変位の大きさ）$x_{\max}$ の間には，$v_{\max} = \omega x_{\max}$ の関係が成り立つから，衝突のたびに最大変位点の x 座標は e 倍される。よって，2 つの小球は以下のように運動する。



図より，4 回衝突するまでに小球 1 が移動した全道のりを L とすると（この移動は x 軸上の移動と見なしてよいから），

$$
\begin{aligned}
L &= x_0 + 2ex_0 + 2e^2x_0 + 2e^3x_0 \\
&= \boldsymbol{x_0\left(1 + 2e + 2e^2 + 2e^3\right)} \\
&= x_0\left\{2\left(1 + e + e^2 + e^3\right) - 1\right\} \\
&= x_0\left(2\frac{1-e^4}{1-e} - 1\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1 + e - 2e^4}{1-e}x_0}
\end{aligned}
$$

（森田涼介，岡田和也，一丸友美，仲里佑利奈）

2015 年度 大阪大学 前期 物理

〔2〕　RLC 並列回路

出題範囲	交流回路
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	問 1〜3 はコイルとコンデンサーについての標準的な問題，問 4 以降は RLC 回路についてのやや難易度の高い問題となっている。問 1 で誘導起電力を 2 通りの式で表し，自己インダクタンスを求める方法がわからなかった人は，自力でできるようにしておこう。問 4 はリアクタンスの式を覚えている人はすぐに解けただろう。問 7 はヒントが与えられているとはいえ，計算力が問われるため，最も差がつく問題だったと思われる。全体としてはやや難しいものの，交流を扱ったものとしては標準的な問題である。この分野は演習が不足しがちなので，自力で解けるようになるまで繰り返し解いてほしい。

解答

問 1　$L=\dfrac{\pi\mu N^2a^2}{l}$〔H〕　**問 2**　$C_1=\varepsilon\dfrac{bx}{d}$〔F〕　**問 3**　$C=(2M-1)C_1$〔F〕

問 4　抵抗：$\dfrac{V_2}{R}$〔A〕，　コイル：$\dfrac{V_2}{\omega_1 L}$〔A〕，　コンデンサー：$\omega_1 CV_2$〔A〕

問 5　(a)，　$Z=R$〔Ω〕，　$I_2=\dfrac{V_2}{R}$〔A〕　**問 6**　$\dfrac{1}{{\omega_1}^2L}$〔F〕

問 7　$\varDelta\omega=\dfrac{\sqrt{3}}{RC}$〔rad/s〕　**問 8**　(b)

解説

問 1

このコイルに電流 I を流したときに生じる誘導起電力を V とする。コイルの自己誘導より，

$$V=-L\frac{\varDelta I}{\varDelta t}$$

また，磁束を ϕ とおくと，ファラデーの電磁誘導の法則より，

$$V=-N\frac{\varDelta\phi}{\varDelta t}$$

と表せる。ここで，磁束密度を B，磁束が通過する断面積を S，磁界を H とすると，

$$\phi = BS = \mu H \cdot \pi a^2 = \pi\mu a^2 H$$

となる。いま，このコイルはソレノイドであるから，

$$H = nI \quad (n：単位長さあたりの巻き数)$$

と表すことができ，$n = \dfrac{N}{l}$ であるから，

$$\phi = \pi\mu a^2 \cdot \frac{N}{l} I = \frac{\pi\mu N a^2}{l} I$$

よって，

$$V = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\pi\mu N^2 a^2}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

以上より，

$$V = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\pi\mu N^2 a^2}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{L = \frac{\pi\mu N^2 a^2}{l}} \text{〔H〕}$$

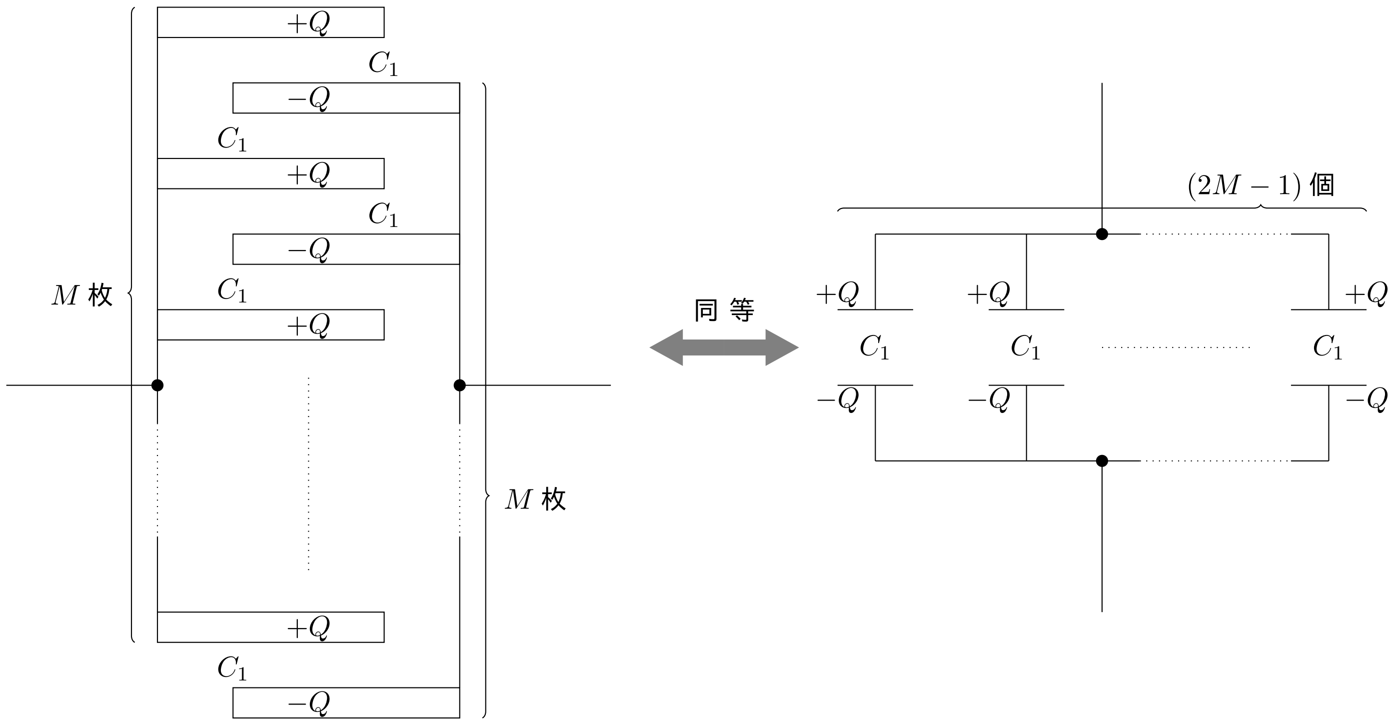
問 2

コンデンサーの電気容量の式より，

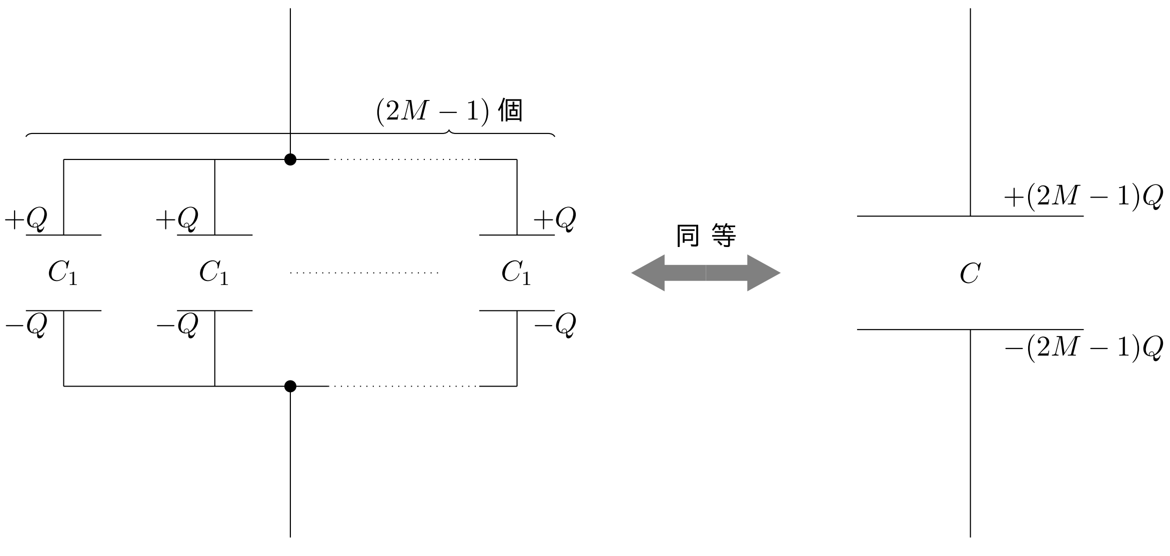
$$\boldsymbol{C_1} = \varepsilon\frac{S}{d} \boldsymbol{= \varepsilon\frac{bx}{d}} \text{〔F〕}$$

問 3

2 枚の極板でできた 1 つのコンデンサーに蓄えられる電荷を Q とする。また，図 3 の左側の電極に正電荷が，右側の電極に負電荷がたまるとする。



すると，このコンデンサー全体は，上図のように，電荷 Q を蓄えた電気容量 C_1 のコンデンサーが $(2M-1)$ 個並列接続されたものと同等になる。これを 1 つのコンデンサーとみなすと，下図のようになる。



よって，電位差について，

$$\frac{Q}{C_1} = \frac{(2M-1)Q}{C}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{C = (2M-1)C_1}\ 〔\mathrm{F}〕$$

問 4

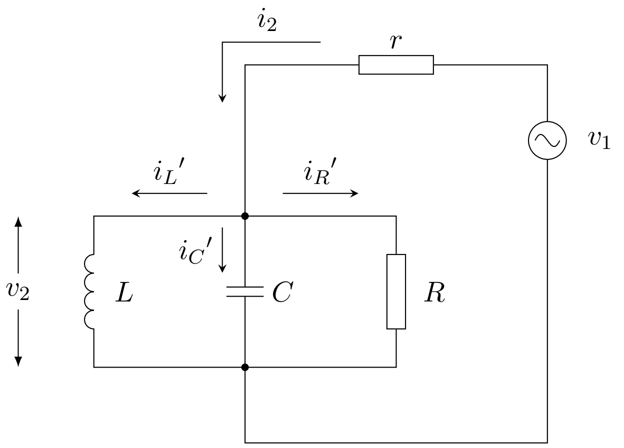
抵抗の抵抗値は R，コイルとコンデンサーのリアクタンスはそれぞれ $\omega_1 L$，$\dfrac{1}{\omega_1 C}$ であるから，求める電流の最大値をそれぞれ i_R，i_L，i_C とおくと，

$$V_2 = Ri_R = \omega_1 L i_L = \frac{1}{\omega_1 C} i_C$$

$$\therefore \quad i_R = \boldsymbol{\frac{V_2}{R}}\ 〔\mathrm{A}〕, \quad i_L = \boldsymbol{\frac{V_2}{\omega_1 L}}\ 〔\mathrm{A}〕, \quad i_C = \boldsymbol{\omega_1 C V_2}\ 〔\mathrm{A}〕$$

（別解）

電源の交流電圧を v_1，RLC 並列回路の交流電圧を v_2 とし，回路全体に流れる交流電流を i_2 とする。また，RLC 並列回路の抵抗，コイル，コンデンサーに流れる交流電流をそれぞれ $i_R{}'$，$i_L{}'$，$i_C{}'$ とする。



交流の角周波数は ω_1 であるから，適切な t を設定して，$v_2 = V_2 \sin \omega_1 t$ と書ける。コンデンサーが蓄えた電荷を q とおくと，RLC 交流回路の電圧について，

$$v_2 = Ri_R{}' = L\frac{di_L{}'}{dt} = \frac{q}{C}$$

よって，抵抗について，

$$i_R{}' = \frac{1}{R} v_2 = \frac{V_2}{R} \sin \omega_1 t$$

また，コイルについて，

$$v_2 = L\frac{di_L{}'}{dt}$$

$$\therefore \quad i_L{}' = \frac{1}{L}\int v_2\ dt = \frac{1}{L}\int (V_2 \sin\omega_1 t)\ dt$$

いま，$v_2 = V_2 \sin\omega_1 t$ となるように t を設定しているので，

$$i_L{}' = -\frac{V_2}{\omega_1 L}\cos\omega_1 t$$

コンデンサーについても，$\dfrac{dq}{dt} = i_C{}'$ であるから，

$$i_C{}' = \frac{dq}{dt} = \frac{Cdv_2}{dt} = CV_2\frac{d}{dt}(\sin\omega_1 t) = \omega_1 CV_2 \cos\omega_1 t$$

以上より，

$$i_R{}' = \frac{V_2}{R}\sin\omega_1 t$$

$$i_L{}' = -\frac{V_2}{\omega_1 L}\cos\omega_1 t$$

$$i_C{}' = \omega_1 CV_2 \cos\omega_1 t$$

したがって，$i_R{}'$ の最大値は $\dfrac{V_2}{R}$〔A〕，$i_L{}'$ の最大値は $\dfrac{V_2}{\omega_1 L}$〔A〕，$i_C{}'$ の最大値は $\omega_1 CV_2$〔A〕となる。

問 5

Z は RLC 交流回路のインピーダンスであるから，$V_2 = ZI_2$ が成り立つ。よって，Z が最大のときに，V_2 は最大になるので，**（a）**。

いま，Z は，

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\omega_1 C - \dfrac{1}{\omega_1 L}\right)^2}}$$

と表され，変数は C であるから，Z が最大になるときの C を求めると，

$$\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L} = 0$$

$$\therefore \quad C = \frac{1}{\omega_1{}^2 L}$$

このとき，$\boldsymbol{Z = R}$〔Ω〕である。また，

$$\boldsymbol{I_2} = \frac{V_2}{Z} \boldsymbol{= \frac{V_2}{R}}\ 〔\mathrm{A}〕$$

（別解）

Z を導出する。回路図より，

$$\begin{aligned} i_2 &= {i_R}' + {i_C}' + {i_L}' \\ &= \frac{V_2}{R}\sin\omega_1 t + \omega_1 C V_2 \cos\omega_1 t - \frac{V_2}{\omega_1 L}\cos\omega_1 t \\ &= V_2\left\{\frac{1}{R}\sin\omega_1 t + \left(\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L}\right)\cos\omega_1 t\right\} \\ &= V_2\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L}\right)^2}\sin(\omega_1 t + \alpha) \end{aligned}$$

よって，

$$i_2 = V_2\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L}\right)^2}\sin(\omega_1 t + \alpha) = I_2 \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

ただし，α は，$\tan\alpha = R\left(\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L}\right)$ を満たす実数とする。

したがって，

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L}\right)^2}} I_2 = Z I_2$$

と書ける。よって，Z が最大のとき，V_2 は最大となる。

問 6

問題文より，ω_1 で送信している放送局の番組を聞くには，V_2 が最大でなければならないから，求める C の値は，問 5 より，

$$C = \boldsymbol{\frac{1}{{\omega_1}^2 L}}\text{〔F〕}$$

問 7

$\omega = \omega_1$ のとき，$\dfrac{V_2}{I_2}(=Z)$ は最大となり，$Z = R$ である。また，$\omega = \omega_2$，ω_3 のとき，$Z = \dfrac{R}{2}$ であるから，このωを求めると，

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{R}{2}$$

$$\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 = \frac{3}{R^2}$$

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = \pm\frac{\sqrt{3}}{R}$$

$$RCL\omega^2 \pm \sqrt{3}L\omega - R = 0$$

$$\therefore \quad \omega = \frac{\pm\sqrt{3}L \pm \sqrt{3L^2 + 4R^2CL}}{2RCL} \quad \text{（複号任意）}$$

ここで，$\omega_2 > \omega_3 > 0$ と，$\sqrt{3L^2 + 4R^2CL} > \sqrt{3}L$ より，

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{3}L + \sqrt{3L^2 + 4R^2CL}}{2RCL}$$

$$\omega_3 = \frac{-\sqrt{3}L + \sqrt{3L^2 + 4R^2CL}}{2RCL}$$

よって，

$$\boldsymbol{\Delta\omega} = \omega_2 - \omega_3 = \frac{2\sqrt{3}L}{2RCL} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{RC}} \text{〔rad/s〕}$$

問 8

ωが変化すると V_2 が変化し，それに伴って $\dfrac{V_2}{I_2}$ も変化する。また，$\omega = \omega_1$ のときに V_2 は最大値 $V_{\max}$ となり，受信したい放送局の番組が聞こえる。しかし，ある放送局の電波の周波数 ω' が ω_1 に近く，V_2 の値が $V_{\max}$ に近くなってしまうと，その電波も受信してしまい，2 つの放送局の番組が同時に聞こえてしまう。受信したい電波の周波数（本問の場合は ω_1）に近い周波数の電波 ω' が飛んできても受信しないためには，$\omega = \omega'$ のとき，V_2 が $V_{\max}$ と大きく異なっていればよい。これはつまり，ωの変化が小さくても，V_2 が大きく変化するということである。言い換えれば，同じ V_2 の変化量に対して，ωの変化量ができるだけ小さいほうが，混信を避けられるということである。よって，V_2 の変化に対する，ωの変化の度合いを示す $\Delta\omega$ が小さいほうが，混信を避けられる。したがって，答えは **(b)** 。

（別解）

式で書き表す。$\omega = \omega_1$ のとき，$V_2 = V_{\max}$ である。$\omega = \omega' \fallingdotseq \omega_1$ のとき，$V_2 = V' \fallingdotseq V_{\max}$ となると，混信してしまう。混信しないためには，$\omega = \omega' \fallingdotseq \omega_1$ のときでも，$V_2 = V'$ が $V_{\max}$ と大きく異なっていればよい。これはつまり，少し ω が変化するだけで V_2 が大きく変化すれば（$\dfrac{\varDelta V_2}{\varDelta\omega}$ が大きければ），混信を避けられるということである。いま，$\varDelta V_2$ は一定より，「$\dfrac{\varDelta V_2}{\varDelta\omega}$ が大きい」$\Leftrightarrow$「$\varDelta\omega$ が小さい」であるから，$\varDelta\omega$ が小さいほうが，混信を避けられる。

（森田涼介，岡田和也，一丸友美，仲里佑利奈）

2015 年度 大阪大学 前期 物理

〔3〕 ピストンの中の気体のふるまい

出題範囲	気体の法則・気体の状態変化
難易度	★★☆☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	Ⅰは力のつり合い，理想気体の状態方程式，熱力学第一法則を扱う標準的な問題である。複雑な計算もなく，問 3 も定積変化で外部に仕事をしないことから，実際は内部エネルギーの変化を求めるだけなので，ここまでは手を止めることなくスラスラ解けなければならない。 Ⅱは定圧，定積，等温，断熱のどれにも当てはまらない変化を扱う問題。このタイプの問題では，圧力，体積，温度がそれぞれどのように変化するのかを考えることが大切である。問 4 は方針の立て方自体はⅠとさほど変わりないが，計算がやや煩雑なので正確さが求められる。問 5 は問 4 が解けていれば問題ないだろう。問 6 は数学的に考える問題だが，やることはただの平方完成なので，落ち着いて解きたい。問 7 はグラフから仕事を求める必要があり，差が付く問題だろう。 第 3 問全体としては，前半は標準的な問題，後半は難問ではないが計算力や思考力が問われる出題となっており，いかに前半に時間をかけず，後半落ち着いて取り組めるかで差が付いただろう。

解答

問 1 $p_1 = p_0 + \dfrac{Mg}{S}$, $V_1 = \dfrac{p_0 S}{p_0 S + Mg} V_0$

問 2 $\left(1 + \dfrac{Mg}{p_0 S}\right) T_0$

問 3 $\dfrac{3MgV_0}{2S}$

問 4 $\dfrac{V_0 + V_2 - V}{V_2} p_0$

問 5 $\dfrac{(V_0 + V_2 - V)V}{V_0 V_2} T_0$

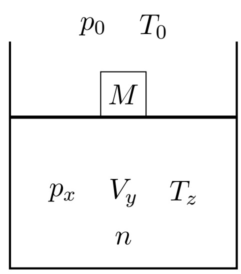
問 6 体積：$\dfrac{V_0 + V_2}{2}$, 温度：$\dfrac{(V_0 + V_2)^2}{4V_0 V_2} T_0$

問 7 $\dfrac{{V_0}^2 - {V_2}^2}{2V_2} p_0$

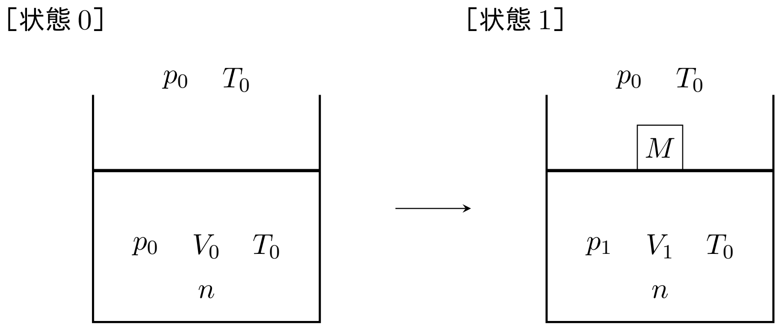
解説

気体定数を R，ピストン中の気体の物質量を n とする。また，単原子分子理想気体だから，定圧モル比熱 $C_V = \dfrac{3}{2}R$ である。以降は，諸々の物理量を右図のように表し，この状態を「状態 N」と呼ぶことにする。

［状態 N］



I.



問 1

状態 1 でピストンにかかる力のつり合いより，

$$p_0 S + Mg = p_1 S$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S}}$$

状態方程式は，

状態 0 : $p_0 V_0 = nRT_0$

状態 1 : $p_1 V_1 = nRT_0$

2 式より，

$$\frac{p_0 V_0}{p_1 V_1} = \frac{nRT_0}{nRT_0}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{V_1} = \frac{p_0}{p_1} V_0 \ \boldsymbol{= \frac{p_0 S}{p_0 S + Mg} V_0}$$

（別解）

V_1 について，ボイル・シャルルの法則より，

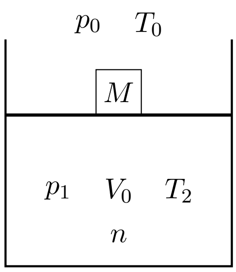
$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_0}$$

$$\therefore \quad V_1 = \frac{p_0}{p_1} V_0$$

問 2

ピストンについて，力のつり合いは保たれるから，気体の圧力は p_1 でー定である。

［状態 2］



状態方程式は，

$$\text{状態 } 2：p_1V_0 = nRT_2$$

状態 0 と比較して，

$$\frac{p_1V_0}{p_0V_0} = \frac{nRT_2}{nRT_0}$$

$$\therefore \quad T_2 = \frac{p_1}{p_0}T_0 = \frac{p_0 + \dfrac{Mg}{S}}{p_0}T_0 = \boldsymbol{\left(1 + \frac{Mg}{p_0S}\right)T_0}$$

（別解）

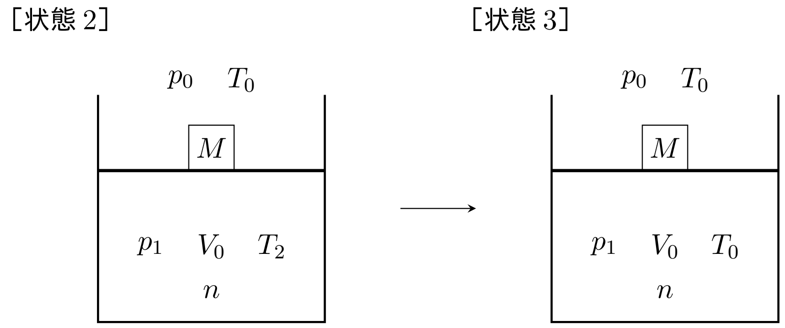
ボイル・シャルルの法則より，状態 0 と比較して，

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_1V_0}{T_2}$$

$$\therefore \quad T_2 = \frac{p_1}{p_0}T_0$$

本解，別解ともに状態 1 と状態 2 を比較してもよい。

問 3



状態 2 →状態 3 の間に，気体が吸収した熱量を Q_1，気体がした仕事を W_1，気体の内部エネルギーの変化量を ΔU_1 とする。いま，状態 2 →状態 3 の間に，気体が放出した熱量を求めるから，求める値は $-Q_1$ である。

熱力学第一法則より，

$$Q_1 = W_1 + \Delta U_1$$

ここで，ピストンは固定されていて気体は仕事をしないから，$W_1 = 0$ である。

また，気体の内部エネルギーの増分は，

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= nC_V \Delta T \\ &= n \cdot \frac{3}{2} R(T_0 - T_2) \\ &= \frac{3}{2} nR \cdot \left(-\frac{Mg}{p_0 S} T_0\right) \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{Mg}{p_0 S} \cdot nRT_0\end{aligned}$$

ここで，状態 0 の状態方程式を用いて，

$$\Delta U_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{Mg}{p_0 S} \cdot p_0 V_0 = -\frac{3MgV_0}{2S}$$

よって，

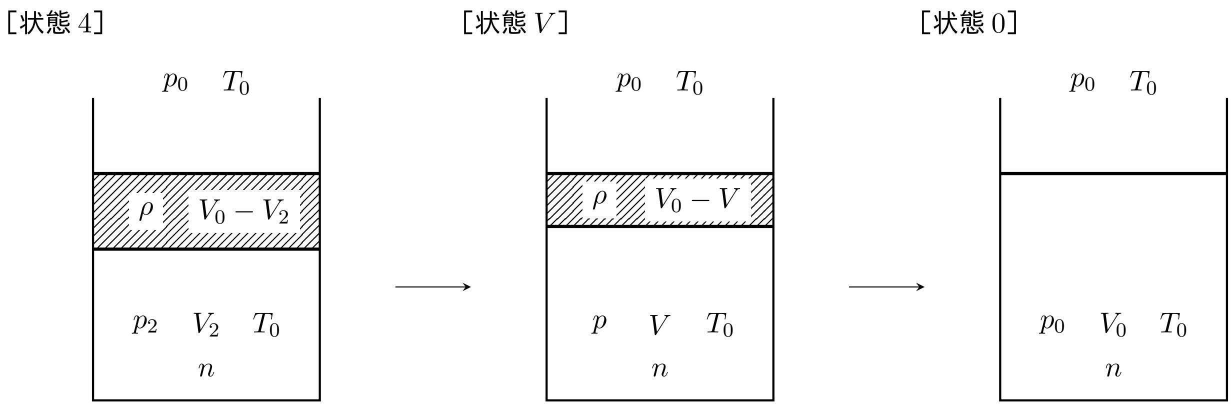
$$Q_1 = W_1 + \Delta U_1 = 0 + \left(-\frac{3MgV_0}{2S}\right) = -\frac{3MgV_0}{2S}$$

したがって，求める熱量は，

$$-Q_1 = \boldsymbol{\frac{3MgV_0}{2S}}$$

II.

液体の密度を ρ とする。



問 4

状態 V，状態 4 でそれぞれピストンにかかる力のつり合いより，

$$p_0 S + \rho(V_0 - V)g = pS$$

$$p_0 S + \rho(V_0 - V_2)g = p_2 S$$

2 式とも $p_0 S$ を移項して辺々割って，

$$\frac{\rho(V_0 - V)g}{\rho(V_0 - V_2)g} = \frac{(p - p_0)S}{(p_2 - p_0)S}$$

$$\frac{V_0 - V}{V_0 - V_2} = \frac{p - p_0}{p_2 - p_0}$$

$$p = p_0 + \frac{V_0 - V}{V_0 - V_2}(p_2 - p_0)$$

状態方程式は，

状態 4：$p_2 V_2 = nRT_0$

状態 0 と比較して，

$$\frac{p_2 V_2}{p_0 V_0} = \frac{nRT_0}{nRT_0}$$

$$\therefore \quad p_2 = \frac{V_0}{V_2} p_0$$

よって，

$$
\begin{aligned}
p &= p_0 + \frac{V_0 - V}{V_0 - V_2}\left(\frac{V_0}{V_2}p_0 - p_0\right) \\
&= p_0 + \frac{V_0 - V}{V_0 - V_2} \cdot \frac{V_0 - V_2}{V_2}p_0 \\
&= p_0 + \frac{V_0 - V}{V_2}p_0 \\
&= \boldsymbol{\frac{V_0 + V_2 - V}{V_2}p_0}
\end{aligned}
$$

（別解）

力のつり合いより，

$$p_0 S + \rho(V_0 - V)g = pS$$

$$\therefore \quad p = p_0 + \frac{\rho(V_0 - V)g}{S}$$

ここで，$p = p_2$ のとき，$V = V_2$ より，

$$p_0 S + \rho(V_0 - V_2)g = p_2 S$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{(p_2 - p_0)S}{(V_0 - V_2)g}$$

状態方程式は，

$$\text{状態 } 4 : p_2 V_2 = nRT_0$$

状態 0 と比較して，

$$\frac{p_2 V_2}{p_0 V_0} = \frac{nRT_0}{nRT_0}$$

$$\therefore \quad p_2 = \frac{V_0}{V_2}p_0$$

よって，

$$\rho = \frac{(p_2 - p_0)S}{(V_0 - V_2)g} = \frac{\left(\frac{V_0}{V_2}p_0 - p_0\right)S}{(V_0 - V_2)g} = \frac{\frac{V_0 - V_2}{V_2}p_0 S}{(V_0 - V_2)g} = \frac{p_0 S}{V_2 g}$$

以上より，

$$
\begin{aligned}
p &= p_0 + \frac{\rho(V_0 - V)g}{S} \\
&= p_0 + \frac{p_0 S}{V_2 g} \cdot \frac{(V_0 - V)g}{S} \\
&= p_0 + \frac{V_0 - V}{V_2} p_0 \\
&= \frac{V_0 + V_2 - V}{V_2} p_0
\end{aligned}
$$

問 5

状態方程式は，

$$\text{状態 } V : pV = nRT$$

状態 0 と比較して，

$$
\begin{aligned}
\frac{pV}{p_0 V_0} &= \frac{nRT}{nRT_0} \\
\therefore \quad T &= \frac{pV}{p_0 V_0} T_0 \\
&= \frac{V_0 + V_2 - V}{V_2} p_0 \cdot \frac{V}{p_0 V_0} T_0 \\
&= \boldsymbol{\frac{(V_0 + V_2 - V)V}{V_0 V_2} T_0}
\end{aligned}
$$

問 6

問 5 より，

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{(V_0 + V_2 - V)V}{V_0 V_2} T_0 = \frac{T_0}{V_0 V_2} \{-V^2 + (V_0 + V_2)V\} \\
&= \frac{T_0}{V_0 V_2} \left\{ -\left(V - \frac{V_0 + V_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_0 + V_2}{2} \right)^2 \right\} \quad (V_2 \leqq V \leqq V_0)
\end{aligned}
$$

よって，$V = \boldsymbol{\frac{V_0 + V_2}{2}}$ のとき，T は最大値 $T_{\max} = \frac{T_0}{V_0 V_2} \cdot \left(\frac{V_0 + V_2}{2} \right)^2 = \boldsymbol{\frac{(V_0 + V_2)^2}{4 V_0 V_2} T_0}$ をとる。

問 7

状態 4 →状態 0 の間に，気体が吸収した熱量を Q_2，気体がした仕事を W_2，気体の内部エネルギーの増分を ΔU_2 とする。熱力学第一法則より，

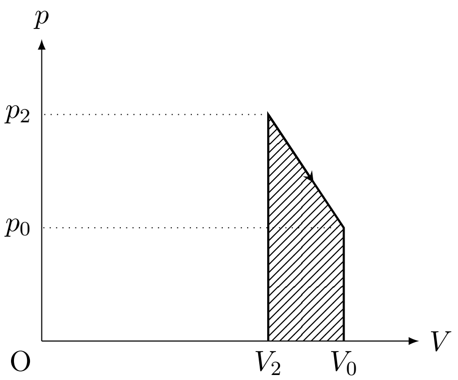
$$Q_2 = W_2 + \Delta U_2$$

$$\Delta U_2 = nC_V \Delta T = n \cdot \frac{3}{2} R(T_0 - T_0) = 0$$

次に，W_2 を求める。状態 4 →状態 0 の変化は定圧変化でも定積変化でもないので，p-V 図を描いて，グラフが囲む面積から仕事を求める。

$$p = \frac{V_0 + V_2 - V}{V_2} p_0 = -\frac{p_0}{V_2} V + \frac{p_0(V_0 + V_2)}{V_2}$$

であるから，グラフは以下のようになる。



よって，

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{p_2 + p_0}{2}(V_0 - V_2) \\ &= \frac{V_0 - V_2}{2} \cdot \left(\frac{V_0}{V_2} p_0 + p_0 \right) \\ &= \frac{V_0 - V_2}{2} \cdot \frac{V_0 + V_2}{V_2} p_0 \\ &= \frac{{V_0}^2 - {V_2}^2}{2V_2} p_0 \end{aligned}$$

以上より，求める熱量は，

$$Q_2 = W_2 + \Delta U_2 = \frac{{V_0}^2 - {V_2}^2}{2V_2} p_0 + 0 = \boldsymbol{\frac{{V_0}^2 - {V_2}^2}{2V_2} p_0}$$

（ 森田涼介，岡田和也，岡部律心，仲里佑利奈 ）