2015 年度 大阪大学 前期 数学

1 微積分と不等式評価

出題範囲	極限／数Ⅲ積分
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	関数の数列の極限を題材にした問題である。(1) で最初に置換ができないと先に進めない。不等式評価が簡単にできるような形まで変形することがポイントである。式変形をいろいろ試しながら，どの形なら不等式評価がうまくいくかを考えるのがよいだろう。

解答

(1)【証明】

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \quad (x \geqq 0)$$

$I_n = \displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx$ において $\dfrac{x}{n} = t$ と置換すると，$x = nt$，$dx = n\,dt$ であるから，積分区間に注意して

$$\begin{aligned}\int_0^n f_n(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{t}{1+nt}\log(1+t)\cdot n\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{nt}{1+nt}\log(1+t)\,dt \\ &= \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)\,dt\end{aligned}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq 1$ から，$0 \leqq 1-\dfrac{1}{1+nt} < 1$，$\log(1+t) \geqq 0$ であるので

$$\left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t) \leqq \log(1+t)$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^n f_n(x)\,dx &= \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)\,dt \\ &\leqq \int_0^1 \log(1+t)\,dt = \int_0^1 \log(1+x)\,dx\end{aligned}$$

(証明終)

(2)
$$\int_0^n f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)\,dt$$
$$= \int_0^1 \log(1+t)\,dt - \int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt$$

ここで

$$\int_0^1 \log(1+t)\,dt = \int_0^1 (1+t)'\log(1+t)\,dt$$
$$= \Big[(1+t)\log(1+t)\Big]_0^1 - \int_0^1 dt$$
$$= \Big[(1+t)\log(1+t) - t\Big]_0^1$$
$$= 2\log 2 - 1$$

したがって，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt$ が $n\to\infty$ で収束することを示せばよい。$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$\log(1+t) \leqq \log 2$ であるので

$$\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt \leqq \int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log 2\,dt$$

すると

$$\log 2\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\,dt = \log 2\cdot\frac{1}{n}\Big[\log(1+nt)\Big]_0^1 = \log 2\cdot\frac{\log(1+n)}{n}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n}\cdot\frac{\log(1+n)}{1+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+1}{1}\cdot\frac{\log(1+n)}{1+n}$$
$$= 1\cdot 0 = 0$$

また，$0 \leqq t \leqq 1$ では，$\dfrac{1}{1+nt}\log(1+t) \geqq 0$ であるから

$$\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt \geqq 0$$

である。

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt \leqq \int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log 2\,dt = \log 2\cdot\frac{\log(1+n)}{n}$$

であり，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt = 0$$

よって，I_n は収束し，その極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \log(1+t)\,dt - \int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt\right) = 2\log 2 - 1 - 0$$
$$= 2\log 2 - 1$$

である。

解説

(1) このままの形で扱うのは大変なので，置換を考えたい。目標となる不等式の右辺に $\log(1+x)$ が現れていることを考えると，$\dfrac{x}{n}$ を丸ごと 1 つの文字で置換するとよいのではないだろうか，と想像できるとよい。実際に積分区間もそれでつじつまが合う (置換のヒントを，証明する不等式の積分区間から得てもよいだろう)。その後左辺を

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)\,dt$$

というように，和 (差) の形までもっていくと，$\left(1 - \dfrac{1}{1+nt}\right)$ の部分を評価すればよいので考えやすい。

(2) とりあえず I_n を計算できるところまで計算してしまうのがよい。$\displaystyle\int_0^1 \log(1+t)\,dt$ は具体的に求まるので，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt$ をどうするかが問題である。直接積分するのは難しいが，ここで問題文にある不等式が役に立つ。それを使えば，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt \leqq \int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log 2\,dt$ という不等式が導けて，この右辺の積分は計算できるから極限が求まるだろう，という方針である。計算した結果の $\log 2 \cdot \dfrac{\log(1+n)}{n}$ の極限は，問題文にある式を用いればわかる。$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt \geqq 0$ は明らかであるので，はさみうちの原理によって 0 に収束することが示せる。よって，元の I_n も収束することがわかる。

（井上輝義，河合敬宏，辻啓吾）

2015 年度 大阪大学 前期 数学

2 三角関数を利用した不等式の証明

出題範囲	三角関数
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	仰々しい見た目をしていて，手の出しようがないと思うかもしれない。愚直に式を x, y のまままいじっていろいろと変形してみても先が見えない。ここで，条件 $\lvert x\rvert \leqq 1$, $\lvert y\rvert \leqq 1$ に注目して，$x = \cos\theta$, $y = \sin\phi$ などと，三角関数で表せばよいことに気づこう。特に与えられた不等式に $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1-y^2}$ があるので，さらに思いつきやすいだろう。与えられた不等式を三角関数で表したあとは，うまく式変形すればおのずと示すことができる。

解答

【証明】$\lvert x\rvert \leqq 1$，$\lvert y\rvert \leqq 1$ より，$x = \cos\theta$, $y = \sin\phi$ とおく。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$, $0 \leqq \phi < 2\pi$ とする。このとき，与えられた不等式は以下のように書き換えられる。

$$0 \leqq \cos^2\theta + \sin^2\phi - 2\cos^2\theta\sin^2\phi + 2\cos\theta\sin\phi\sqrt{1-\cos^2\theta}\sqrt{1-\sin^2\phi} \leqq 1$$

これを示せばよい。

$$P = \cos^2\theta + \sin^2\phi - 2\cos^2\theta\sin^2\phi + 2\cos\theta\sin\phi\sqrt{1-\cos^2\theta}\sqrt{1-\sin^2\phi}$$

とおくと，以下，複号同順として

$$\begin{aligned}
P &= \cos^2\theta + \sin^2\phi - 2\cos^2\theta\sin^2\phi + 2\cos\theta\sin\phi\sqrt{1-\cos^2\theta}\sqrt{1-\sin^2\phi} \\
&= \cos^2\theta(1-\sin^2\phi) + \sin^2\phi(1-\cos^2\theta) + 2\cos\theta\sin\phi\,\lvert\sin\theta\rvert\,\lvert\cos\phi\rvert \\
&= \cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi\sin^2\theta \pm 2\cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi \\
&= (\cos\theta\cos\phi \pm \sin\theta\sin\phi)^2 \\
&= \{\cos(\theta \mp \phi)\}^2
\end{aligned}$$

θ, ϕ は互いに独立に変動するので，$-1 \leqq \cos(\theta \mp \phi) \leqq 1$ であり，

$$0 \leqq P \leqq 1$$

よって，$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$ は $\lvert x\rvert \leqq 1$，$\lvert y\rvert \leqq 1$ で成り立つ。　(証明終)

解説

$\lvert x\rvert \leqq 1$, $\lvert y\rvert \leqq 1$ に注目して，$x = \cos\theta$, $y = \sin\phi$ などと，三角関数で表す方法は時々問われるのでおさえておこう。

別解

【証明】 $0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq x^2+y^2-2x^2y^2 & \cdots\cdots ① \\ 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1-(x^2+y^2-2x^2y^2) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq |x| \leqq 1$，$0 \leqq |y| \leqq 1$ より，$0 \leqq x^2 \leqq 1$，$0 \leqq y^2 \leqq 1$ である。

x^2 を固定して，$k(y^2)=x^2+y^2-2x^2y^2=(1-2x^2)y^2+x^2\ (0 \leqq y^2 \leqq 1)$ とおく。

(i) $0 \leqq x^2 \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$1-2x^2 \geqq 0$ より，$k(0) \leqq k(y^2) \leqq k(1) \quad \Leftrightarrow x^2 \leqq k(y^2) \leqq 1-x^2$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq x^2 \leqq 1$ のとき

$1-2x^2 \leqq 0$ より，$k(1) \leqq k(y^2) \leqq k(0) \quad \Leftrightarrow 1-x^2 \leqq k(y^2) \leqq x^2$

(i)，(ii) と $0 \leqq x^2 \leqq 1$ より，$0 \leqq |x| \leqq 1$，$0 \leqq |y| \leqq 1$ のとき，常に $0 \leqq k(y^2) \leqq 1$ が成立する。

次に，xy の値で場合分けをする。

(I) $xy \geqq 0$ のとき

① の左辺は 0 以下，右辺は 0 以上なので，① は常に成立する。

② の両辺はともに 0 以上なので

$$② \Leftrightarrow \left(2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 \leqq \{1-(x^2+y^2-2x^2y^2)\}^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2y^2(1-x^2)(1-y^2) \leqq 1-2(x^2+y^2-2x^2y^2)+x^4+y^4+4x^4y^4+2x^2y^2-4x^2y^4-4x^4y^2$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-1)^2 \geqq 0$$

よって，② は常に成立する。

(II) $xy \leqq 0$ のとき

② の左辺は 0 以下，右辺は 0 以上なので，② は常に成立する。

① の両辺はともに 0 以上なので

$$① \Leftrightarrow \left(-2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 \leqq (x^2+y^2-2x^2y^2)^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2y^2(1-x^2)(1-y^2) \leqq x^4+y^4+4x^4y^4+2x^2y^2-4x^2y^4-4x^4y^2$$
$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 \geqq 0$$

よって，① は常に成立する。

以上より，(I)，(II) の場合ともに，① かつ ② が成立するので，題意は示された。 (証明終)

別解解説

ルートがある項を移行して 2 乗するという，誰でも思いつくことができる解法で示した。不等式の両辺の正負は

常に確認しておこう。

（侯明程，河合敬宏，江崎ゆり子）

2015 年度 大阪大学 前期 数学

3 無理数であることの証明

出題範囲	式と照明
難易度	★☆☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	(1)，(2) ともに背理法を用いた典型的な問題である。無理数であることの証明は，一度その無理数を有理数と仮定して矛盾を導くのが最もオーソドックスである。特に (1) の証明は非常に有名なものなので覚えておくといいだろう。

解答

(1)【証明】$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$(a，b は互いに素な正の整数) と仮定する。

ここで，両辺に b を掛けたうえで 2 乗すると $2b^2=a^2$ であるので，a は 2 を素因数にもつ。よって，$a=2a'$ とおける。

$$2b^2=4a'^2$$
$$\Leftrightarrow b^2=2a'^2$$

よって，b も 2 を素因数にもつことになり，これは a と b が互いに素であることに反する。

したがって，$\sqrt{2}$ は無理数である。 (証明終)

【証明】$\sqrt[3]{3}=\frac{c}{d}$(c，d は互いに素な正の整数) と仮定する。

両辺に d を掛けたうえで 3 乗すると $3d^3=c^3$ であるので，c は 3 を素因数にもつ。

よって $c=3c'$ とおける。

$$3d^3=27c'^3$$
$$\Leftrightarrow d^3=9c'^3$$

よって，d も 3 を素因数にもつことになり，これは c と d が互いに素であることに反する。

したがって，$\sqrt[3]{3}$ は無理数である。 (証明終)

(2)【証明】$\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q=r$ ($(p,q)\neq(0,0)$，r は 0 でない有理数) と仮定する。

ここでさらに，$p=0$ と仮定すると，$q\neq 0$ である必要があるので $\sqrt[3]{3}=\frac{r}{q}=$ (有理数) となり矛盾する。

よって，$p\neq 0$ となる。

$\sqrt[3]{3}q=r-\sqrt{2}p$ であるので，両辺を 3 乗して，

$$\begin{aligned}3q^3 &= r^3 - 3\sqrt{2}pr^2 + 6p^2r - 2\sqrt{2}p^3 \\ &= r^3 + 6p^2r - (3pr^2 + 2p^3)\sqrt{2}\end{aligned}$$

$p \neq 0$ より

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6p^2r - 3q^3}{p(3r^2 + 2p^2)}$$

ここで，右辺は有理数であるが，左辺は (1) より無理数であるので，矛盾する。

よって，仮定の $(p, q) \neq (0, 0)$ は誤りであり，$p = q = 0$ である。 (証明終)

解説

(1) 背理法を用いて証明している。a，b および c，d が互いに素であることが重要である。

(2) (1) と同様に背理法を用いて証明している。証明に際しては，(1) で示したことを利用する。

「$(p, q) \neq (0, 0)$」と「$p \neq 0$，$q \neq 0$」の違いに注意したい。

別解

(1)【証明】$\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ (a，b は正の整数) と仮定する。

ここで，両辺に b を掛けたうえで 2 乗すると $2b^2 = a^2$ であるので，a は 2 を素因数にもつ。よって，$a = 2a_1$ とおける。

$$2b^2 = 4{a_1}^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 2{a_1}^2$$

したがって，b も 2 を素因数にもつので，$b = 2b_1$ とおける。

同様にして，a_1 も 2 を素因数にもつことがわかるので，$a_1 = 2a_2$ とおける。

以下，同様の操作を繰り返すことで次の漸化式が得られる。

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n a \\ b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n b \end{cases}$$

ここで，上の操作を考えると a_n，b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ はすべて正の整数である。しかし，a，b はある有限の正の整数であることから，十分大きな n に対して，

$$a_n < 1, b_n < 1$$

が成立することより矛盾が生じる。

よってこのような正の整数の組 (a, b) は存在せず，$\sqrt{2}$ は無理数である。 (証明終)

$\sqrt[3]{3}$ についても同様。

別解解説

(1) **解答** のように，分母分子が互いに素であることを利用しないものとして，**別解** に示した無限降下法というものがある。有名な考え方であるので，余力があればこれについても理解しておくとよいだろう。

（青木徹，河合敬宏，辻啓吾）

2015 年度 大阪大学 前期 数学

4 球と回転体

出題範囲	空間図形・数Ⅲ積分／微分
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	$V(t)$ を求める際，幾何学的に求めるのも手だが，球は円の回転体であることを考えれば，数 II 程度の積分で計算できる。後者のほうがミスを防げるだろう。

解答

(1) xyz 座標を設定して考える。

時刻 $t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ において，P の座標は $(t, 0, 0)$，Q の座標は $(-t, 0, 0)$ である。

よって，時刻 t における，球 A と球 B の方程式はそれぞれ次のようになる。

$$A : (x-t)^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$$

$$B : (x+t)^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$$

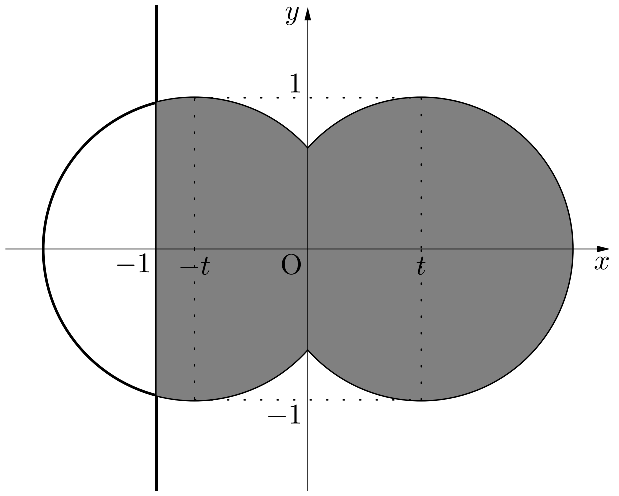
それぞれの式で $z=0$ としたものは，球 A と球 B を xy 平面で切ったときに xy 平面上に現れる円であり，それぞれ A'，B' とすると，

$$A' : (x-t)^2 + y^2 \leqq 1 \Leftrightarrow y^2 \leqq 1-(x-t)^2$$

$$B' : (x+t)^2 + y^2 \leqq 1 \Leftrightarrow y^2 \leqq 1-(x+t)^2$$

である。これらを図示すると次のようになる。求める体積は，図における塗りつぶし部分を，x 軸を回転軸として回転させた立体の体積である。

したがって



$$\begin{aligned}
V(t) &= \pi\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}\,dx + \pi\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}\,dx \\
&= \pi\left[x-\frac{(x+t)^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \pi\left[x-\frac{(x-t)^3}{3}\right]_{0}^{t+1} \\
&= \frac{\pi}{3}(-t^3-3t^2+6t+4)
\end{aligned}$$

(2) $$V'(t) = \frac{\pi}{3}(-3t^3-6t+6) = -\pi(t^2+2t-2)$$

であるから，

$$\begin{aligned}
V'(t) = 0 &\Leftrightarrow t^2+2t-2=0 \\
&\Leftrightarrow t = -1\pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

よって，増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

よって，$V(t)$ の最大値は，

$$V\left(-1+\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\right)\pi$$

である。

解説

空間図形に関する良問である。回転体の体積を求めるには，一般に，回転軸に垂直な平面で回転体を切ったときの断面積を求めれば解くことができる。しかし，本問においては，円を 1 回転させると球ができることに着目することで楽に解ける。具体的には，球を「xy 平面上での円を回転させたもの」と捉えよう。これにより y^2 が x の式で表されるから，あとは回転体の体積の求積問題になる。

（鈴木陽大，河合敬宏，青木徹）

2015 年度 大阪大学 前期 数学

5 マス埋めの場合の数

出題範囲	数列／場合の数
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	(1) のような問題は、一度 2×2 のように小さめのマスで実験してみると良い。背理法・数学的帰納法を用いる方向性が存在するが，見通しを誤るとどちらも煩雑となる。(2) は，(1) がわかればすぐ漸化式を立てられるので，あとはそれを解くのみである。

解答

$k,l\,(1\leqq k,l\leqq n)$ に対して，(k,l) は $n\times n$ のマスの k 行目，l 列目にあるマスのことを，$f(k,l)$ は (k,l) に書いてある数字を表すとする。

(1)【証明】$n\times n$ のマスで，条件 p を満たし，第 n 行目，第 n 列目ともに 0 と 1 が交互に現れない部分があると仮定する。

すると，ある $k,l(1\leqq k,l\leqq n-1)$ に対し，

$$f(k,n)=f(k+1,n)$$

$$f(n,l)=f(n,l+1)$$

を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。この $f(k,n)$，$f(n,l)$ をそれぞれ x，y とする。

ここで，(k,n)，$(k+1,n)$，$(k,n-1)$，$(k+1,n-1)$ の作る 2×2 のマスを考えると，条件 p より，$f(k,n-1)=f(k+1,n-1)=1-x$ とわかる。

$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\cdots$	$1-x$	x
$\cdots$	$1-x$	x
$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$

同様に (n,l)，$(n,l+1)$，$(n-1,l)$，$(n-1,l+1)$ の作る 2×2 のマスを考えると，条件 p より，$f(n-1,l)=f(n-1,l+1)=1-y$ とわかる。

さらに，$(k,n-1)$，$(k+1,n-1)$，$(k,n-2)$，$(k+1,n-2)$ の作る 2×2 のマスを考えると，条件 p より，$f(k,n-2)=f(k+1,n-2)=x$ とわかる。

同様のことを順次考えていくと，全ての $1 \leqq i, j \leqq n$ に対し，$f(k,i) = f(k+1,i)$，$f(j,l) = f(j,l+1)$ となることがわかる。

$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\cdots$	$f(k,l)$	$f(k+1,l)$	$\cdots$	$1-x$	x
$\cdots$	$f(k,l+1)$	$f(k+1,l+1)$	$\cdots$	$1-x$	x
$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\cdots$	$1-y$	$1-y$	$\cdots$		
$\cdots$	y	y	$\cdots$		

ここで，先ほどの議論より $f(k,l) = f(k,l+1) = f(k+1,l) = f(k+1,l+1)$ が成立する。これらの作る 2×2 のマスは明らかに条件 p を満たさない。

以上より，条件 p を満たす $n \times n$ のマスは，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れる。 (証明終)

(2) 2×2 のマスが条件 p を満たす場合は以下の 6 通りに限られる。

1	1
0	0

1	0
1	0

1	0
0	1

0	1
1	0

0	1
0	1

0	0
1	1

よって，$a_2 = 6$ である。

(i) $k \times k$ のマスにおいて，k 行目，もしくは k 列目のみ，0 と 1 が交互に現れる場合に $k \times k$ のマスに入れる数字の入れ方の総数を b_k とすると，これに第 $(k+1)$ 行と第 $(k+1)$ 列を付け加えた $(k+1) \times (k+1)$ のマスの空きマスを埋めるパターンは，2 通りである。[1]

[1] 別解 (ii) 参照

(ii) また，k 行目，もしくは k 列目ともに 0 と 1 が交互に現れる場合 $k \times k$ のマスに入れる数字の入れ方の総数は $(a_k - b_k)$ であり，これに第 $(k+1)$ 行と第 $(k+1)$ 列を付け加えた $(k+1) \times (k+1)$ のマスの空きマスを埋めるパターンは，1 通りの入れ方が (ii) を満たし，2 通りの入れ方が (i) を満たす。

よって，以下の漸化式が成立する。

$$\begin{cases} b_{k+1} = 2b_k + 2(a_k - b_k) \\ a_{k+1} - b_{k+1} = a_k - b_k \end{cases} \quad (k \geqq 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{k+1} = 2a_k \\ b_{k+1} - b_k = a_{k+1} - a_k \end{cases} \quad (k \geqq 2)$$

$$\Leftrightarrow a_{k+2} - 3a_{k+1} + 2a_k = 0 \quad (k \geqq 2)$$

この式を変形すると，

$$\begin{cases} a_{k+2} - 2a_{k+1} = a_{k+1} - 2a_k & \cdots\cdots\ ① \\ a_{k+2} - a_{k+1} = 2\left(a_{k+1} - a_k\right) & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

ここで，$a_2 = 6$，$b_2 = 4$ より，最初の漸化式に代入すると $a_3 = 14$

① より，

$$a_{n+1} - 2a_n = a_3 - 2a_2 = 2 \qquad \cdots\cdots\ ③$$

② より，数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は第 2 項 $14 - 6 = 8$，公比 2 の等比数列である

から，

$$a_{n+1} - a_n = 2^{n-2} \cdot 8 = 2^{n+1} \qquad \cdots\cdots\ ④$$

④−③ より，

$$a_n = 2^{n+1} - 2$$

解説

背理法を用いた解答である。条件 p を満たさない 2×2 のマスは，(k, l)，$(k+1, l)$，$(k, l+1)$，$(k+1, l+1)$ のマスであろうという予想がつく。

別解

(1)【証明】数学的帰納法を用いて証明する。

（i）2×2 のマスが条件 p を満たす場合は以下の 6 通りに限られる。

1	1
0	0

1	0
1	0

1	0
0	1

0	1
1	0

0	1
0	1

0	0
1	1

よって第 2 行，第 2 列のいずれかには 0 と 1 が交互に現れる。

(ii) $k \times k$ のマスに，条件 p を満たすように 0 と 1 を入れたとする。

(ii−1) 特に第 k 行のみに 0 と 1 が交互に現れていると仮定する。

ここで，このマスに第 $(k+1)$ 行目，第 $(k+1)$ 列目を加えると，

以下のようになる。

第 $(k-1)$ 行目	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
第 k 行目	$\cdots$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	$\cdots$
第 $(k+1)$ 行目	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

ここで，第 k 列に関して，表の一部が以下のように連続で同じ数字が現れる部分がある。

	第 $(k-1)$ 列目	第 k 列目	第 $(k+1)$ 列目
第 $(l-1)$ 行目	$\cdots$	1	
第 l 行目	$\cdots$	1	
第 $(l+1)$ 行目	$\cdots$	0	

このとき，この表は条件 p を考えると次のように埋まる。

	第 $(k-1)$ 列目	第 k 列目	第 $(k+1)$ 列目
第 $(l-1)$ 行目	$\cdots$	1	0
第 l 行目	$\cdots$	1	0
第 $(l+1)$ 行目	$\cdots$	0	1

このように，第 k 列目において，1 や 0 が連続すると，隣の第 $(k+1)$ 列目のマスの数字が決定し，順次その上下のマスも決定する。その数字は第 k 列目の数字の逆である。

すると，第 $(k+1)$ 列は，第 1 行目から第 k 行目までは一通りに決定される。

ここで，この列の第 $(k+1)$ 行目は決定できない。なぜなら，図のように，第 k 行，第 $(k+1)$ 行，第 k 列，第 $(k+1)$ 列が作る 2×2 のマスのうち，数字が埋まっているマスの数は 2 つで，それらの数字の合計は 1 となる。残りの 2 つのマスへの数字の入れ方

が 2 通り存在するからである。

	第 $(k-1)$ 列目	第 k 列目	第 $(k+1)$ 列目
第 $(k-1)$ 行目	$\cdots$	0	1
第 k 行目	$\cdots$	1	0
第 $(k+1)$ 行目	$\cdots$		

しかし，上図を参照するとともに，元の $k \times k$ のマスにおいて第 k 行に 0 と 1 が交互に現れていることを考えると，この $(k+1) \times (k+1)$ のマスにおいても第 k 行に 0 と 1 が交互に現れているとわかる。

ここで，第 $(k+1)$ 行目の各マスに入る数字は，ある 1 つのマスを入れると条件 p に従って順次決まる。

例えば第 $(k+1)$ 行，第 1 列目のマスに 0 を入れるとその隣は 1 に，さらにその隣は $0 \cdots$ というように 1 と 0 が交互に現れることが帰納的にわかり，すべてのマスが埋まり，特に第 $(k+1)$ 行のみ 0 と 1 が交互に現れる。(第 $(k+1)$ 行，第 1 列目のマスに 1 を入れたときも同様)

(ii−2) 特に第 k 列のみに 0 と 1 が交互に現れている $k \times k$ のマスを仮定したとき，(ii-1) と同様のことが $(k+1) \times (k+1)$ のマスにも成り立つ。

(ii−3) 第 k 行，第 k 列ともに 0 と 1 が交互に現れている $k \times k$ のマスを仮定したとき，

(第 k 行 k 列のマスの数字)=(第 $(k+1)$ 行 $(k+1)$ 列のマスの数字)

というようにすると順次マスが埋まり，条件 p を満たし，第 $(k+1)$ 行，第 $(k+1)$ 列ともに 0 と 1 が交互に現れている $(k+1) \times (k+1)$ のマスが出来上がる。

(第 k 行 k 列のマスの数字)$\fallingdotseq$(第 $(k+1)$ 行 $(k+1)$ 列のマスの数字)

というようにしたうえで，第 $(k+1)$ 行 $(k+1)$ 列のマスに隣接するマスの一方に 1 を入れると他のマスの数字は順次決まり，第 $(k+1)$ 行，第 $(k+1)$ 列の一方のみが 0 と 1 が交互に現れている $(k+1)\times(k+1)$ のマスが出来上がる。

以上 (i)，(ii) より，条件 p を満たす $n\times n$ のマスは，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れる。 (証明終)

別解解説

(1) こちらの解答のほうが，(1) と (2) のつながりがわかりやすい。証明は解答に比べて難航するが，こちらの考え方も理解しておきたい。

（青木徹，河合敬宏，松下祐樹）