2015 年度 大阪大学 前期 数学

1 三角関数を利用した不等式の証明

出題範囲	三角関数
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	仰々しい見た目をしていて，手の出しようがないと思うかもしれない。愚直に式を x, y のままいじっていろいろと変形してみても先が見えない。ここで，条件 $\lvert x\rvert \leqq 1$, $\lvert y\rvert \leqq 1$ に注目して，$x=\cos\theta$, $y=\sin\phi$ などと，三角関数で表せばよいことに気づこう。特に与えられた不等式に $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1-y^2}$ があるので，さらに思いつきやすいだろう。与えられた不等式を三角関数で表したあとは，うまく式変形すればおのずと示すことができる。

解答

【証明】$\lvert x\rvert \leqq 1$, $\lvert y\rvert \leqq 1$ より，$x=\cos\theta$, $y=\sin\phi$ とおく。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$, $0\leqq\phi<2\pi$ とする。このとき，与えられた不等式は以下のように書き換えられる。

$$0 \leqq \cos^2\theta+\sin^2\phi-2\cos^2\theta\sin^2\phi+2\cos\theta\sin\phi\sqrt{1-\cos^2\theta}\sqrt{1-\sin^2\phi} \leqq 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

これを示せばよい。

$$② = \cos^2\theta+\sin^2\phi-2\cos^2\theta\sin^2\phi+2\cos\theta\sin\phi\sqrt{1-\cos^2\theta}\sqrt{1-\sin^2\phi}$$

とおくと，以下，複号同順として

$$\begin{aligned} ② &= \cos^2\theta+\sin^2\phi-2\cos^2\theta\sin^2\phi+2\cos\theta\sin\phi\sqrt{1-\cos^2\theta}\sqrt{1-\sin^2\phi} \\ &= \cos^2\theta(1-\sin^2\phi)+\sin^2\phi(1-\cos^2\theta)+2\cos\theta\sin\phi\,\lvert\sin\theta\rvert\,\lvert\cos\phi\rvert \\ &= \cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\phi\sin^2\theta\pm2\cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi \\ &= (\cos\theta\cos\phi\pm\sin\theta\sin\phi)^2 \\ &= \{\cos(\theta\mp\phi)\}^2 \end{aligned}$$

θ, ϕ は互いに独立に変動するので，$-1\leqq\cos(\theta\mp\phi)\leqq 1$ であり，

$$0 \leqq ② \leqq 1$$

よって，① が成立することが示された。 (証明終)

解説

$|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$ に注目して，$x = \cos\theta$, $y = \sin\phi$ などと，三角関数で表す方法は時々問われるのでおさえておこう。

別解

【証明】

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 & \cdots\cdots\text{①} \\ 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1 - (x^2 + y^2 - 2x^2y^2) & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq |x| \leqq 1$, $0 \leqq |y| \leqq 1$ より，$0 \leqq x^2 \leqq 1$, $0 \leqq y^2 \leqq 1$ である。

x^2 を固定して，$k(y^2) = x^2 + y^2 - 2x^2y^2 = (1-2x^2)y^2 + x^2 \quad (0 \leqq y^2 \leqq 1)$ とおく。

(i) $0 \leqq x^2 \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$1 - 2x^2 \geqq 0$ より，$k(0) \leqq k(y^2) \leqq k(1) \quad \Leftrightarrow x^2 \leqq k(y^2) \leqq 1 - x^2$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq x^2 \leqq 1$ のとき

$1 - 2x^2 \leqq 0$ より，$k(1) \leqq k(y^2) \leqq k(0) \quad \Leftrightarrow 1 - x^2 \leqq k(y^2) \leqq x^2$

(i)(ii) と $0 \leqq x^2 \leqq 1$ より，$0 \leqq |x| \leqq 1$, $0 \leqq |y| \leqq 1$ のとき，常に $0 \leqq k(y^2) \leqq 1$ が成立する。

次に，xy の値で場合分けをする。

(I) $xy \geqq 0$ のとき

① の左辺は 0 以下，右辺は 0 以上なので，① は常に成立する。

② の両辺はともに 0 以上なので

$$\text{②} \Leftrightarrow \left(2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 \leqq \{1 - (x^2 + y^2 - 2x^2y^2)\}^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2y^2(1-x^2)(1-y^2) \leqq 1 - 2(x^2 + y^2 - 2x^2y^2) + x^4 + y^4 + 4x^4y^4 + 2x^2y^2 - 4x^2y^4 - 4x^4y^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 \geqq 0$$

よって，② は常に成立する。

(II) $xy \leqq 0$ のとき

② の左辺は 0 以下，右辺は 0 以上なので，② は常に成立する。

① の両辺はともに 0 以上なので

$$
\begin{aligned}
① &\Leftrightarrow \left(-2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 \leqq (x^2+y^2-2x^2y^2)^2 \\
&\Leftrightarrow 4x^2y^2(1-x^2)(1-y^2) \leqq x^4+y^4+4x^4y^4+2x^2y^2-4x^2y^4-4x^4y^2 \\
&\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

よって，① は常に成立する。

以上より，(I)(II) の場合ともに，① かつ ② が成立するので，題意は示された。 (証明終)

別解解説

ルートがある項を移行して 2 乗するという，誰でも思いつくことができる解法で示した。不等式の両辺の正負は常に確認しておこう。

（侯明程，河合敬宏，江崎ゆり子）

2015 年度 大阪大学 前期 数学

2 図形と積分

出題範囲	図形と方程式／積分
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	易しい問題であり，完答したい。(1) では 2 つの曲線に接するという条件から，判別式を用いて解答する。(2) は純粋に積分するだけで，特にひねりもない。

解答

(1) 直線 $l : y = kx + m$ が放物線 $C_2 : y = -\frac{1}{2}x^2$ に接するので，方程式

$$kx + m = -\frac{1}{2}x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2kx + 2m = 0$$

は重解をもつ。よって，この 2 次方程式の判別式を D とすると，$D = 0$ となるから，$k^2 - 2m = 0$ を満たす。よって

$$k^2 = 2m \qquad \cdots\cdots\ ①$$

直線 l は，円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ にも接するから，方程式

$$x^2 + (kx + m - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (k^2+1)x^2 + 2k(m-1)x + m(m-2) = 0$$

は重解をもつ。よって，この 2 次方程式の判別式を D' とすると，$D' = 0$ となるから，

$$k^2(m-1)^2 - m(m-2)^2(k^2+1) = 0 \qquad \cdots\cdots\ ②$$

をみたす。① かつ ② を満たすような $k(>0)$[1] と m を求める。

[1] 問題文に $k > 0$ という条件がある。

① を ② に代入して整理すると

$$2m(m-1)^2 - m(m-2)(2m+1) = 0$$

$$m\{2(m-1)^2 - (m-2)(2m+1)\} = 0$$

$$m\{(2m^2-4m+2) - (2m^2-3m-2)\} = 0$$

$$m(4-m) = 0$$

$m=0$ のとき，$k=0$ となり不適である。

よって，$m=4$，$k=2\sqrt{2}$ (>0) である。

(2) 直線 l と放物線 C_2 の交点の x 座標は方程式

$$2\sqrt{2}x + 4 = -\frac{x^2}{2}$$

の解だから，これを解くと

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 = 0$$

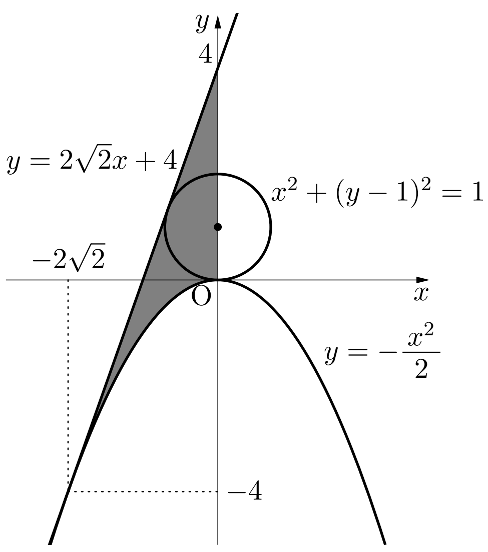
$$\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 = 0$$

よって，$x = -2\sqrt{2}$ である。よって，求める面積は

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{0}\left\{2\sqrt{2}x + 4 - \left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right\}dx = \int_{-2\sqrt{2}}^{0}\left(\frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{2}x + 4\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3 + \sqrt{2}x^2 + 4x\right]_{-2\sqrt{2}}^{0}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3}$$ [2]



[2] 次のように数学 III の積分を用いて計算してもよい。

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{0}\left\{2\sqrt{2}x + 4 - \left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right\}dx$$

$$= \int_{-2\sqrt{2}}^{0}\left\{\frac{1}{2}\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2\right\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}\left(x + 2\sqrt{2}\right)^3\right]_{-2\sqrt{2}}^{0}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

解説

(1) 2 つの曲線の接する直線を求める問題で，どちらの曲線の方程式も 2 次式なので，判別式で十分である。円の方程式から出てきた判別式は丁寧に計算しよう。

(2) 交点を求めて積分するだけである。

別解

(1) 放物線 C_2 の方程式 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ において，導関数は $y'=-x$ であるから，

$x=t$ における接線の方程式は

$$y=-t(x-t)-\frac{1}{2}t^2$$
$$\Leftrightarrow tx+y-\frac{1}{2}t^2=0$$

である。これが直線 l に一致するとき，$k=-t$，$m=\dfrac{1}{2}t^2$ となる。

この直線 l が点 $(0,1)$ を中心とする半径 1 の円 C_1 に接するとき，直線 l と点 $(0,1)$ との距離は 1 である。よって，点と直線の距離の公式より

$$\frac{\left|t\cdot 0+1-\frac{1}{2}t^2\right|}{\sqrt{t^2+1}}=1$$
$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{2}t^2\right)^2=t^2+1$$
$$\Leftrightarrow t^2(t^2-8)=0$$

$k=-t>0$ より，$t=-2\sqrt{2}$ である。よって，直線 l の方程式は

$$y=2\sqrt{2}x+4$$

なので，$k=2\sqrt{2}$，$m=4$ である。

(2) **解答** と同様。

別解解説

(1) 直線 l と放物線 C_2 の接点の x 座標を t とおき，k と m を t で表してから，点と直線の距離の公式によって円と接する条件を求めた。

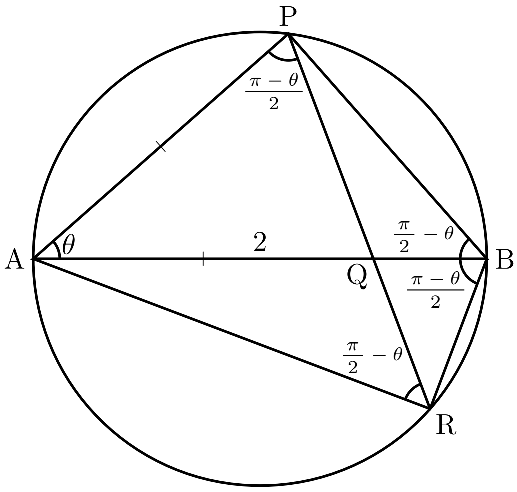
（井上輝義，河合敬宏，松下祐樹）

2015 年度 大阪大学 前期 数学

3 円に内接する三角形

出題範囲	平面図形／三角関数／ベクトル
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	円と三角形をテーマにした問題である。図形の性質を利用する問題では，最初から方針が立たなくても，簡単に分かるところから線分の長さや角度を求めているうちに手がかりが増え，発想につながることがある。図形の性質を使いこなす訓練をしておきたい。

解答



(1) $\angle\mathrm{PAB}=\theta$ とすると，$\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$[1]であるから $\angle\mathrm{PBA}=\frac{\pi}{2}-\theta$ であり，円周角の定理より $\angle\mathrm{ARP}=\frac{\pi}{2}-\theta$ である。また，$\triangle\mathrm{APQ}$ が二等辺三角形であることにより $\angle\mathrm{APQ}=\frac{\pi-\theta}{2}$ であり，さらに，円周角の定理より $\angle\mathrm{ABR}=\frac{\pi-\theta}{2}$ である。$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{RBQ}$ かつ $\angle\mathrm{PQA}=\angle\mathrm{BQR}$[2]だから，2 つの角が等しいので $\triangle\mathrm{APQ}\backsim\triangle\mathrm{RBQ}$ である。よって，$\triangle\mathrm{APQ}$ が二等辺三角形であることにより，$\triangle\mathrm{RBQ}$ も二等辺三角形であり，$\mathrm{RB}=\mathrm{RQ}$ である。すると

$$\mathrm{RQ}=\mathrm{RB}=\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{ABR}=2\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

$$\mathrm{AR}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABR}=2\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

[1] 線分 AB が円 C の直径であることから。

[2] 対頂角であることによる。

であるから △AQR の面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AR} \cdot \mathrm{RQ} \cdot \sin \angle \mathrm{ARQ} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\
&= \sin(\pi-\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\
&= \sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

(2) S が最大となるとき，$\sin 2\theta = 1$，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{4}$ である。すると，△APB に注目して，$\mathrm{AP} = \mathrm{AB}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ である。△APQ は二等辺三角形だから，$\mathrm{AQ} = \mathrm{AP} = \sqrt{2}$ がわかり，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である。

また，△APQ について，点 A から線分 PQ に下ろした垂線の足を M とすると，△APQ は二等辺三角形だから，M は線分 PQ の中点である。また，線分 AM は ∠PAQ を二等分するので，$\angle \mathrm{PAM} = \angle \mathrm{QAM} = \sin\frac{\theta}{2}$ である。よって

$$
\mathrm{PQ} = 2\mathrm{AM} = 2\mathrm{AP}\sin\frac{\theta}{2} = 2\mathrm{AQ}\sin\frac{\theta}{2} = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}
$$

また，(1) で求めたことから

$$
\mathrm{RQ} = 2\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{8}
$$

である。よって $\mathrm{PQ} : \mathrm{RQ} = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8} : 2\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} : 1$ である。

点 R は，線分 PQ を $\left(\sqrt{2}+1\right) : 1$ に外分するから

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AR}} &= \frac{-\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \left(\sqrt{2}+1\right)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{\left(\sqrt{2}+1\right)-1} \\
&= \frac{-\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}
\end{aligned}
$$

解説

(1) 直接面積を求めるか，三角形から三角形を引き算するか，迷うところではあるが，この問題では AR と RQ と $\angle\mathrm{ARQ}$ をまず求めて，そこから直接面積を求めることができる。活躍するのは円周角の定理や，相似図形の存在である。図形の性質を駆使して，解答のような流れに持ち込みたい。見通しがなくても，わかるところから線分の長さや角度を求めていくことで方針が立つこともある。

(2) 点 P，Q，R が同一直線上にあることに注目しよう。解答のように点 R が線分 PQ を外分していると考えてもよいし，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の実数倍として計算することもできる。いずれにせよ PQ の長さを求める必要があるが，ここでも二等辺三角形という性質がポイントになる。また，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の実数倍だから，AQ の長さを求めれば解答にたどり着くことができる。

（井上輝義，河合敬宏，松下祐樹）