2016 年度 京都大学 前期 物理

問題 I　二体運動

出題範囲	二体運動
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	台の上で球が運動する，よくみられるような設定の二体問題である。ばねが最も縮んだときに球と台が同じ速度であることや，(4)の解は(2)の方程式のもう 1 つの解であることに気づくと解くのが楽になり，間違えにくくなる。問 1 では，グラフをかくうえでのポイント（速度の比等）はきっちりと押さえてかいておこう。

解答

ア 0

イ $\dfrac{mg}{\cos\theta}$

ウ $mg\tan\theta$

エ $g\tan\theta$

オ $Mg\tan\theta$

カ $(m+M)g\tan\theta$

キ $V_0+\sqrt{2\dfrac{M}{M+m}gh}$

ク $V_0-\dfrac{m}{M}\sqrt{2\dfrac{M}{M+m}gh}$

ケ V_0

コ V_0

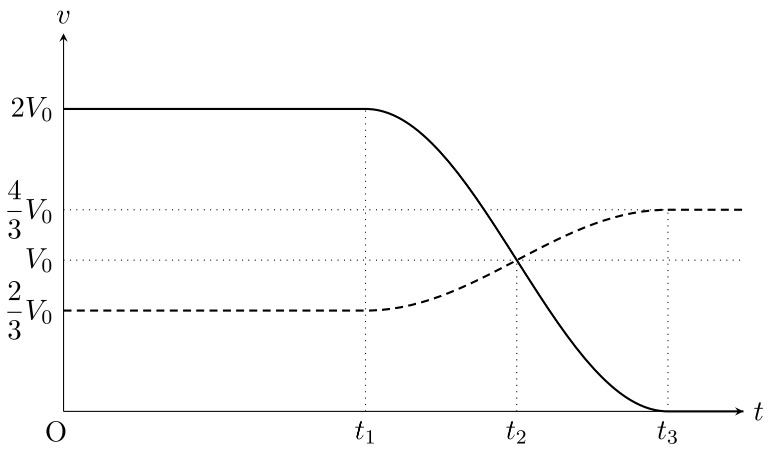
サ $\sqrt{\dfrac{2mgh}{k}}$

シ $V_0-\sqrt{\dfrac{M}{M+m}\cdot 2gh}$

ス $\dfrac{1}{\tan\theta}\sqrt{\dfrac{M}{M+m}\dfrac{2h}{g}}$

セ $\sqrt{\dfrac{M}{M+m}\cdot 2gh}$

問 1



解説

I

(1)

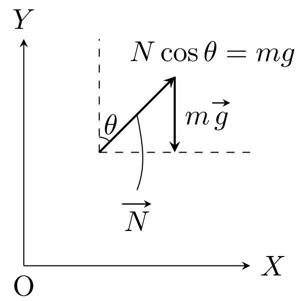
台 Q から見た球 P の床に平行な方向に X' 軸，鉛直方向に Y 軸をとる（X' 軸は糸を引っ張る方向を正とし，Y 軸は上向きを正とする)。球 P は台 Q に対して静止している。また、台 Q にはたらく力は台 Q から見た球 P の運動方程式を考えると，球 P にはたらく力は重力と慣性力であるので，

$$X'\text{軸方向：}0 = -m\,|a_{\mathrm{Q}}| + N\sin\theta$$

$$Y\text{ 軸方向：}0 = -mg + N\cos\theta$$

が成立する（ただし，床から見た床に平行な軸を x 軸として，x 軸方向の加速度を a_{Q} としている)。

ここで，重力と抗力の合力を考えると，鉛直方向が 0 で水平なベクトルであることがわかる（右図)。ゆえに $\underset{\text{ア}}{\underline{\boldsymbol{0}}}$。



なおこのことは，床から見て球 P が鉛直方向には運動せず，水平方向に運動することからもわかる。

また，上記の運動方程式より，

$$N = \underset{\text{イ}}{\underline{\boldsymbol{\frac{mg}{\cos\theta}}}}$$

が得られる。

抗力と重力の合力の大きさは，先ほどの図から $N\sin\theta$ に等しいので，

$$\begin{aligned} N\sin\theta &= \frac{mg}{\cos\theta}\cdot\sin\theta \\ &= \underset{\text{ウ}}{\underline{\boldsymbol{mg\tan\theta}}} \end{aligned}$$

ここで，床から見ると球 P にはたらく力は抗力と重力の合力であるので，求める球 P の加速度は，

$$ma_{\mathrm{P}} = mg\tan\theta$$

$$\therefore\quad a_{\mathrm{P}} = \underset{\text{エ}}{\underline{\boldsymbol{g\tan\theta}}}$$

である。

したがって，球 P と台 Q の加速度が等しいことから，台 Q にはたらいている合力は，

$$Ma_{\mathrm{Q}} = \underbrace{\boldsymbol{Mg\tan\theta}}_{オ}$$

となる。

ここで，台 Q の X 軸方向の運動方程式は，

$$\begin{aligned} Ma_{\mathrm{Q}} &= F_{\text{引っ張り}} - N\sin\theta \\ &= F_{\text{引っ張り}} - ma_{\text{台 Q}} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad F_{\text{引っ張り}} = \underbrace{\boldsymbol{(m+M)g\tan\theta}}_{カ}$$

なお，このことは台 Q と球 P を一体として考えると明らかであることがわかる（質量が $m+M$ の物体を引っ張ることと同じになるから）。

(2)

糸を切ると球 P と台 Q にはたらく外力は重力と床からの垂直抗力のみになる。したがって，水平方向の運動量保存とエネルギー保存を考える。水平方向の運動量保存則とエネルギー保存則により，

$$mV_0 + MV_0 = mv_1 + MV_1$$

$$\frac{1}{2}mV_0{}^2 + \frac{1}{2}MV_0{}^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_1{}^2 + \frac{1}{2}mV_1{}^2$$

の 2 式が成立する。この連立方程式を解くと，

$$v_1 = \underbrace{\boldsymbol{V_0 + \sqrt{2\frac{M}{M+m}gh}}}_{キ}$$

（$\because$ 球 P は常に X 軸方向の正の向きに力を受けているので，V_0 よりも速度は小さくならないことから複号は $+$ である）

また，このとき，

$$V_1 = \underbrace{\boldsymbol{V_0 - \frac{m}{M}\sqrt{2\frac{M}{M+m}gh}}}_{ク}$$

となる。

（別解）

重心から見て解く。なお，重心系の基本事項をこの問の最後にまとめておくので，もし忘れているならば参考にしてもらいたい。台 Q と球 P の系について，外力は水平方向にはたらいていないので，重心速度は一定に保たれる。よって，エネルギー保存の式は重心から見て考えると，

$$mgh = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(V_1 - v_1)^2$$

となる。

$$\therefore \quad |V_1 - v_1| = \sqrt{\frac{m+M}{M}\cdot 2gh}$$

重心から見た各々の速度は，相対速度を質量の逆比で分配したものに等しい。したがって，

$$v_1 = V_0 + \frac{M}{m+M}\sqrt{\frac{m+M}{M}\cdot 2gh}$$

$$V_1 = V_0 - \frac{m}{m+M}\sqrt{\frac{m+M}{M}\cdot 2gh}$$

である。

(3)

ここでも，運動量保存とエネルギー保存を用いて，

$$mv_2 + MV_2 = mV_0 + MV_0$$

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 + \frac{1}{2}M{V_2}^2 + \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}m{V_0}^2 + \frac{1}{2}M{V_0}^2 + mgh$$

さらにここで重要なのは，ばねが最も縮んでいるとき，球 P と台 Q の相対速度は 0 で，床から見た球 P と台 Q の速度は一致するということである。すなわち，

$$v_2 = V_2$$

が成立する。以上の 3 式より，

$$v_2 = \underbrace{\boldsymbol{V_0}}_{\text{ケ}}$$

$$V_2 = \underbrace{\boldsymbol{V_0}}_{\text{コ}}$$

$$X = \underbrace{\sqrt{\frac{\boldsymbol{2mgh}}{\boldsymbol{k}}}}_{\text{サ}}$$

である（X は明らかに正）。

(4)

このときの運動量保存，エネルギー保存の立式は (2) と同様。異なるのは，球 P の速さが V_0 よりも小さいことであるので，複号は $-$ になって，

$$v_3 = \underset{シ}{\underbrace{\boldsymbol{V_0 - \sqrt{\frac{M}{M+m} \cdot 2gh}}}}$$

となる。

球 P は床に対して静止している。すなわち，

$$v_3 = 0$$

$$\therefore \quad V_0 = \underset{セ}{\underbrace{\boldsymbol{\sqrt{\frac{M}{M+m} \cdot 2gh}}}}$$

また，時間 T だけ，$g\tan\theta$ の加速度で台 Q と球 P を引っ張ると速度 V_0 になるということなので，

$$g\tan\theta \cdot T = V_0 = \sqrt{\frac{M}{M+m} \cdot 2gh}$$

$$\therefore \quad T = \underset{ス}{\underbrace{\boldsymbol{\frac{1}{\tan\theta}\sqrt{\frac{M}{M+m}\frac{2h}{g}}}}}$$

問 1

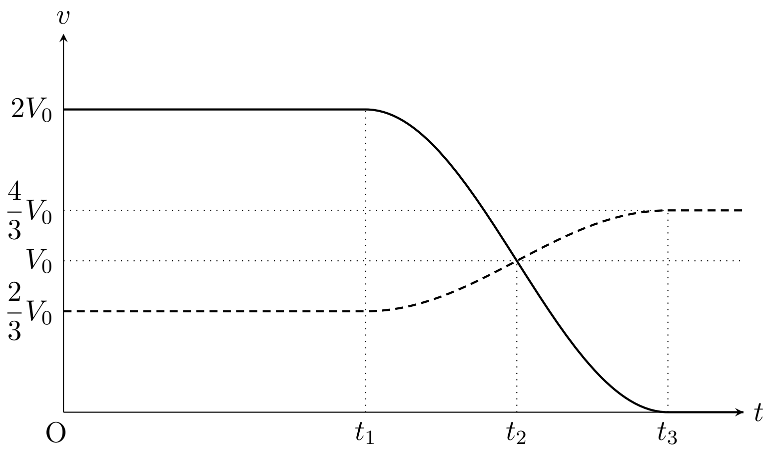
グラフを描くに当たって，注意することは以下の点である。

- 重心から見ると，球 P と台 Q の速さの比が常に 3 : 1
- ばねが縮んでいるときは単振動（sin カーブ）
- 今までの問で速度が確定しているところはグラフに書き込む

以上により，

$$V_0 = \sqrt{\frac{3}{2}gh}$$

に注意して



（シの別解 1）

このとき，球 P と台 Q は弾性衝突をしたと見なせる（ばねを間に挟んでいるので，はねかえり係数が 1 の衝突を行ったといえる）。よって，

$$mv_1 + MV_1 = mv_3 + MV_3$$

$$1 = -\frac{v_3 - V_3}{v_1 - V_1}$$

この連立方程式を解いて，

$$\therefore \quad v_3 = \frac{m-M}{m+M}v_1 + \frac{2M}{m+M}V_1 = V_0 - \sqrt{\frac{M}{M+m}\cdot 2gh}$$

（シの別解 2）

重心系の議論（詳しくは Column を参照）をすると，重心速度は $V_{\rm G} = \dfrac{mv_1 + MV_1}{m+M}$ なので，

$$v_3 - V_{\rm G} = V_{\rm G} - v_1$$

に代入することで

$$v_3 = V_0 - \sqrt{\frac{M}{M+m}\cdot 2gh}$$

を得る。

最後に，二体問題の重心系の議論について 2 つに分けてまとめておく。ただし，二体問題とは大学入試で扱われる 2 物体間（例：小物体 2 つ，小物体と壁，小物体と三角台など）の運動の問題のことである。1 つ目は二体問題が重心の運動と相対的な運動に分けて考えられることを紹介する。2 つ目では，特に衝突において重心運動と相対運動で分けて考える考え方が強力であることを確かめる。加えて，その強さを実感してもらうために簡単な例もつけている。

◆ Column

二体問題（1）：重心運動と相対運動

いま，2 つの質量 m_1, m_2 の物体 1，2 を考え，その位置ベクトルを $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}$ とする。このとき，重心の位置ベクトル $\overrightarrow{R_{\mathrm{G}}}$ は

$$\overrightarrow{R_{\mathrm{G}}} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2}$$

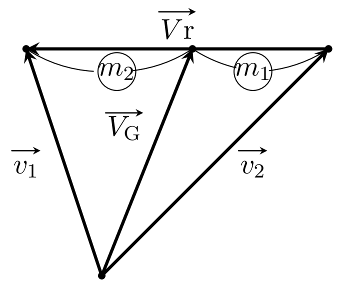
と定義する。このとき，重心の図形的な意味は「物体 1 と 2 を結ぶ線分を $m_2 : m_1$（質量の逆比）に内分する点」であることがわかる。

また，これから重心の速度も定義できる。重心速度 $\overrightarrow{V_{\mathrm{G}}}$ は，物体 1，2 の速度を $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ とすると，

$$\overrightarrow{V_{\mathrm{G}}} = \frac{d\overrightarrow{R_{\mathrm{G}}}}{dt} = \frac{m_1\dfrac{d\overrightarrow{r_1}}{dt} + m_2\dfrac{d\overrightarrow{r_2}}{dt}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2}$$

となる。

いま $\overrightarrow{v_1}$ と $\overrightarrow{v_2}$ の始点を合わせたとき，「重心速度は相対速度 $\overrightarrow{V_{\mathrm{r}}} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$ の表す線分を質量の逆比に内分するベクトル（右図）である」ことがわかる。



ここで，2 つの物体の運動方程式を立ててみよう。物体 1，2 のそれぞれにはたらく外力を $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ とし，2 が 1 に及ぼす内力を $\overrightarrow{f_{12}}$，1 が 2 に及ぼす内力を $\overrightarrow{f_{21}}$ とすれば次の方程式が立つ。

$$m_1\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{f_{12}} \qquad \cdots\cdots①$$

$$m_2\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{f_{21}} \qquad \cdots\cdots②$$

$$\overrightarrow{f_{12}} = -\overrightarrow{f_{21}} \qquad \cdots\cdots③$$

ただし，③は作用・反作用の法則からわかる。

まず，重心運動の方程式を導く。①＋②と③より，

$$m_1\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt}+m_2\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$$

$$\therefore\quad (m_1+m_2)\cdot\frac{m_1\dfrac{d\overrightarrow{v_1}}{dt}+m_2\dfrac{d\overrightarrow{v_2}}{dt}}{m_1+m_2}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$$

$$\therefore\quad M_{\mathrm{total}}\frac{d\overrightarrow{V_{\mathrm{G}}}}{dt}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$$

ここで $M_{\mathrm{total}}=m_1+m_2$ は系の全質量。この式より，重心の運動には外力しか影響しない！ この方程式を**重心運動方程式**という。

次に，相対運動の方程式を求める。②×$\dfrac{1}{m_2}$−①×$\dfrac{1}{m_1}$と③より，

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt}-\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt}&=\frac{1}{m_2}(\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{f_{21}})-\frac{1}{m_1}(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{f_{12}})\\&=\frac{m_1\overrightarrow{F_2}-m_2\overrightarrow{F_1}}{m_1m_2}+\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\overrightarrow{f_{21}}\\\therefore\quad \mu\frac{d\overrightarrow{V_{\mathrm{r}}}}{dt}&=\frac{m_1\overrightarrow{F_2}-m_2\overrightarrow{F_1}}{m_1+m_2}+\overrightarrow{f_{21}}\end{aligned}$$

ここで $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ は系の**換算質量**と呼ばれる。この式より，相対運動は，外力が影響する項 $\dfrac{m_1\overrightarrow{F_2}-m_2\overrightarrow{F_1}}{m_1+m_2}$ と内力が決定することがわかる。この方程式を**相対運動方程式**という。

重心運動方程式において，特に系にはたらく外力がゼロ，もしくはつり合っているとき

$$M_{\mathrm{total}}\frac{d\overrightarrow{V_{\mathrm{G}}}}{dt}=\overrightarrow{0}\qquad\cdots\cdots④$$

となる。

④より，$\dfrac{d\overrightarrow{V_{\mathrm{G}}}}{dt}=\overrightarrow{0}$。すなわち，$\overrightarrow{V_{\mathrm{G}}}=\dfrac{m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1+m_2}$ は時間変化で一定，つまり $m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}$ は時間変化で一定であることが示された。言い換えると，「系に外力がはたらいていない，またはつり合っているとき重心速度は不変で，運動量保存則が成り立つ」ことがわかった。逆が成り立つことも簡単にわかる。

また，相対運動方程式において，系に外力がはたらかないとき，

$$\mu\frac{d\overrightarrow{V_{\mathrm{r}}}}{dt}=\overrightarrow{f_{21}}\qquad\cdots\cdots⑤$$

よって，⑤より，「系に外力がはたらかないとき，内力だけが相対運動に寄与する」ことがわかった！ ただし，逆は成り立たない。相対運動方程式を見ると，$m_1\overrightarrow{F_2}=m_2\overrightarrow{F_1}$ が，内力のみ相対運動に

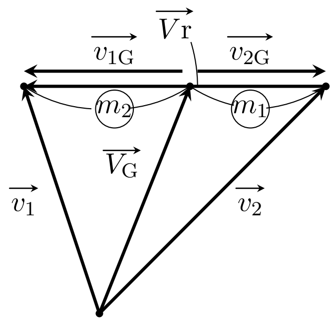
寄与する必要十分条件であることがわかる。

外力がはたらかない，またはつり合っているとき，系の重心速度は一定で全運動量が保存されることがわかったが，全運動エネルギーはどのように振る舞うだろうか？

いま，重心から見た座標系（重心系）を考える。重心系から見た物体 1，2 の速度を $\overrightarrow{v_{1\mathrm{G}}}$，$\overrightarrow{v_{2\mathrm{G}}}$ と書くことにすると，

$$\overrightarrow{v_{1\mathrm{G}}} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{V_\mathrm{G}},\quad \overrightarrow{v_{2\mathrm{G}}} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{V_\mathrm{G}}$$

であり，重心系での全運動量が $m_1\overrightarrow{v_{1\mathrm{G}}} + m_2\overrightarrow{v_{2\mathrm{G}}} = \vec{0}$ であること(♡)と重心から見た速度が相対速度を質量の逆比に内分すること（下図）に注意して，全運動エネルギーは，



$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m_1\overrightarrow{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\overrightarrow{v_2}^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1(\overrightarrow{V_\mathrm{G}} + \overrightarrow{v_{1\mathrm{G}}})^2 + \frac{1}{2}m_2(\overrightarrow{V_\mathrm{G}} + \overrightarrow{v_{2\mathrm{G}}})^2 \\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\overrightarrow{V_\mathrm{G}}^2 + (m_1\overrightarrow{v_{1\mathrm{G}}} + m_2\overrightarrow{v_{2\mathrm{G}}})\cdot\overrightarrow{V_\mathrm{G}} \\
&\qquad + \frac{1}{2}m_1\overrightarrow{v_{1\mathrm{G}}}^2 + \frac{1}{2}m_2\overrightarrow{v_{2\mathrm{G}}}^2 \\
&= \frac{1}{2}M_\mathrm{total}\overrightarrow{V_\mathrm{G}}^2 + 0 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{V_\mathrm{r}}\right)^2 \\
&\qquad + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{V_\mathrm{r}}\right)^2 (\because\ (\heartsuit),\ \text{左図}) \\
&= \frac{1}{2}M_\mathrm{total}\overrightarrow{V_\mathrm{G}}^2 + \frac{1}{2}\mu\overrightarrow{V_\mathrm{r}}^2 \quad (\mu\text{は換算質量}) \\
&\left(\overrightarrow{V}^2 = \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{V} = \left|\overrightarrow{V}\right|^2\right)
\end{aligned}$$

ここで $\frac{1}{2}M_\mathrm{total}\overrightarrow{V_\mathrm{G}}^2$ を**重心運動エネルギー**，$\frac{1}{2}\mu\overrightarrow{V_\mathrm{r}}^2$ を**相対運動エネルギー**という。このことにより，系に外力がはたらかない，またはつり合っているとき，「系の全運動エネルギーは重心運動エネルギーと相対運動エネルギーに分けて考えられる」ということがわかった。これと，外力がはたらかない，またはつり合っているときに重心速度は不変であったことから，「全運動エネルギーの変化は相対運動エネルギーの変化に等しい」ということもわかる。

例えば，外力のはたらかない系ではねかえり係数 e の衝突をするとき，衝突によって失われたエネルギー ΔK は，$V_{\mathrm{r}}=\left|\overrightarrow{V_{\mathrm{r}}}\right|$ としたとき，

$$\begin{aligned}\Delta K &= (\text{相対運動エネルギーの変化})\\ &= \frac{1}{2}\mu {V_{\mathrm{r}}}^2-\frac{1}{2}\mu(eV_{\mathrm{r}})^2\\ &= \frac{1}{2}\mu(1-e^2){V_{\mathrm{r}}}^2\end{aligned}$$

とすぐに求まる。

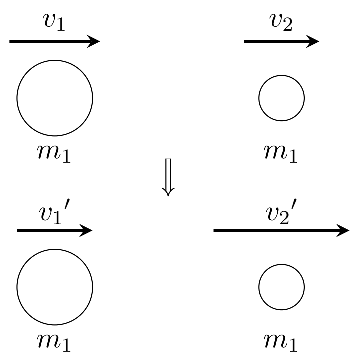
◆ **Column**

二体問題（2）：衝突（散乱）の問題に強くなる

記号は二体問題 (1) と同じもの使う。いま，はねかえり係数を e とすると，衝突の前後では相対速度の大きさが e 倍になる。重心系における物体 1，2 の速度 $\overrightarrow{v_{1\mathrm{G}}}$，$\overrightarrow{v_{2\mathrm{G}}}$ は相対速度ベクトルを質量の逆比に内分する，相対速度と平行なベクトルであることから，「衝突の前後ではそれぞれの物体の，重心系における速度も逆向きに e 倍になる」ということがわかる。注意してほしいのは，この衝突前後で 1，2 の速度が e 倍になるということは，重心系で見ているということが本質的だということである。

理解を深めるために，大学入試でよく扱われる 1 次元の衝突を考えよう。

いま，直線上で，右向きを正として質量 m_1，m_2 の物質 1，2 が速さ v_1，v_2 で図のように衝突するとする（$v_1>v_2$）。はねかえり係数は e とする。衝突後のそれぞれの速さ v_1'，v_2' を求めよう。外力ははたらいていないものとする。



重心系で議論しないならば，次の 2 つの連立方程式を解く必要がある。

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1{v_1}' + m_2{v_2}'$$

$$ {v_2}' - {v_1}' = -e(v_2 - v_1)$$

実際にこれを解いてみると……となると，かなり面倒くさそうで嫌である（受験は時間勝負でもある）。しかし，先ほどの重心系の議論が使えると，この連立方程式を解かなくて済むことがわかる。1 次元の場合，重心から見た速度は衝突前後で逆向きに e 倍になり，逆向きになることと重心系での速度は相対速度を質量の逆比に内分していることを用いて，

$${v_1}' - v_{\rm G} = -e(v_1 - v_{\rm G})$$

$$\begin{aligned}{v_1}' &= v_{\rm G} - e \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(-\left(v_2 - v_1\right)\right)\\ &= \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} - e\cdot\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(v_1 - v_2\right)\\ &= \frac{m_1 - em_2}{m_1+m_2}v_1 + \frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}v_2\end{aligned}$$

と，式変形だけで求まる。${v_2}'$ も同様に計算して（もしくはこの場合対称性から添え字の 1 と 2 を入れ替えて），

$${v_2}' = \frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2 - em_1}{m_1+m_2}v_2$$

と求まる。

以下に簡単な例題で練習しておこう。

（例題）次の問題を重心系の議論で解け。また，重心系を用いない方法で解いてみて比較してみよう。

質量 m，$3m$ の 2 つの物体 1，2 の衝突を考える。衝突直前のそれぞれの速度は右向きを正として $v_1 = v\ (>0)$，$v_2 = 0$ だったとき，衝突直後のそれぞれの速度 ${v_1}'$，${v_2}'$ を m，v を用いて表せ。また衝突によって失われた系のエネルギー ΔW を m，v を用いて表せ。ただし，はねかえり係数を $\dfrac{1}{3}$ とする。

（解答）

重心系を用いた解答のみ示す。衝突直前・直後において外力の存在は無視できる（注）ので，重心速

度 $V_{\mathrm{G}}=\dfrac{mv+0}{m+3m}=\dfrac{1}{4}v$ は一定より，重心系において衝突前後の速度は逆向きに $\dfrac{1}{3}$ 倍になるので，

$$v_1{}'-\frac{1}{4}v=-\frac{1}{3}\left(v-\frac{1}{4}v\right)$$

$$\therefore\quad v_1{}'=0$$

相対速度が逆向きに $\dfrac{1}{3}$ 倍になることより，

$$v_2{}'=\frac{1}{3}v$$

また，失われたエネルギー ΔW は相対運動エネルギーの変化に等しく，

$$\begin{aligned}\Delta W&=\frac{1}{2}\mu(1-e^2)V_{\mathrm{r}}{}^2\\&=\frac{1}{2}\frac{m\cdot 3m}{m+3m}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)(v-0)^2=\frac{1}{3}mv^2\end{aligned}$$

である。□

（注）外力がはたらいていても衝突の直前と直後の間に瞬間的に大きな撃力がはたらくので，外力の寄与は無視できる。

（ 大泉雄司，三澤颯大，岡田和也，松井浩介 ）

2016 年度 京都大学 前期 物理

問題 II　磁場中にある導体棒とコイルを含む回路

出題範囲	電磁誘導・単振動
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	前半は，動く導体棒を含む回路についての方程式を解く問題。最終的には終端速度（この場合は，導体棒の最終的な速度の事）や全体のエネルギー保存を導かせている。素直に誘導に乗るとよい。 後半は一転して回路が変わり，電流と導体棒の単振動の問題になる。回路の方程式，導体棒の運動方程式から単振動の式につなげる。途中で，ばねの単振動の運動方程式と比較させる問いがある。誘導に乗ってもよいが，単振動の運動方程式の一般の形について知っているなら，そのまま解いてから誘導の形に当てはめるとよいかもしれない。

解答

イ　IBl

ロ　$\dfrac{mg - IBl}{M+m}$

ハ　vBl

ニ　$-L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$

ホ　$\dfrac{vBl - RI}{L}$

ヘ　$\dfrac{Rmg}{(Bl)^2}$

ト　$\dfrac{mg}{Bl}$

問 1　解説中に記載

チ　$-\dfrac{IBl}{M}$

リ　$\dfrac{vBl}{L}$

ヌ　$\dfrac{L}{Bl}$

ル　$\dfrac{B^2l^2}{L}$

ヲ　$\dfrac{2\pi\sqrt{ML}}{Bl}$

ワ　①

カ　$\sqrt{{v_0}^2 + \dfrac{L}{M}{I_0}^2}$

ヨ　$\sqrt{{I_0}^2 + \dfrac{M}{L}{v_0}^2}$

問 2　解説中に記載

解説

ローレンツ力から，

$$F = \underbrace{IBl}_{イ}$$

よって，導体棒とおもりの運動方程式は，

$$(M+m)\frac{dv}{dt} = mg - IBl$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt}\left(=\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \underbrace{\boldsymbol{\frac{mg-IBl}{M+m}}}_{\text{ロ}} \qquad \cdots\cdots (1)$$

また，このとき導体棒に生じる誘電起電力は，

$$\underbrace{\boldsymbol{vBl}}_{\text{ハ}}$$

コイルの両端にかかる電圧の大きさは，

$$L\frac{dI}{dt}$$

コイルに生じる起電力は，電流が増加すると電流の向きとは逆の向きに生じることから，

$$\underbrace{\boldsymbol{-L\frac{\Delta I}{\Delta t}}}_{\text{ニ}}$$

である。回路の方程式から，

$$vBl = RI + L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta I}{\Delta t} = \underbrace{\boldsymbol{\frac{vBl-RI}{L}}}_{\text{ホ}} \qquad \cdots\cdots (2)$$

となる。

十分に時間が経過し，速度と電流が一定になったとき，式 (1) から，

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$$

$$\therefore \quad I_0 = \underbrace{\boldsymbol{\frac{mg}{Bl}}}_{\text{ト}}$$

また，式 (2) から，

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0$$

$$\therefore \quad v_0 = \frac{RI_0}{Bl} = \underbrace{\boldsymbol{\frac{Rmg}{(Bl)^2}}}_{\text{ヘ}}$$

となる。

問 1

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E_{\mathrm{m}}}{\Delta t} &= Mv\frac{\Delta v}{\Delta t} + mv\frac{\Delta v}{\Delta t} - mg\frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= (M+m)v\frac{mg - IBl}{M+m} - mgv \\ &= -IBlv\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E_{\mathrm{C}}}{\Delta t} &= LI\frac{\Delta I}{\Delta t} \\ &= I(Blv - RI) \\ &= IBlv - RI^2\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{m}}}{\Delta t} + \frac{\Delta E_{\mathrm{C}}}{\Delta t} = -RI^2$$

この等式は，運動エネルギーとコイルのもつエネルギーの単位時間あたりの減少量は，抵抗の単位時間あたりの消費電力と等しいことを意味している（エネルギー保存）。

速度と電流が一定になったときにスイッチを閉じると，電流は抵抗を流れなくなる。また，おもりが外れるため，導体棒にかかる力はローレンツ力のみになる。したがって，

導体棒の運動方程式： $M\dfrac{dv}{dt} = -IBl$

回路の方程式： $vBl = L\dfrac{dI}{dt}$

以上より，

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \underbrace{\boldsymbol{-\frac{IBl}{M}}}_{チ} \qquad \cdots\cdots (3)$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \underbrace{\boldsymbol{\frac{vBl}{L}}}_{リ} \qquad \cdots\cdots (4)$$

ここで，変数 I（電流）を変数 x（ばねの伸び）に置き換えることで，ばねに繋がれた質点の運動の式に帰着させることを考える。ただし，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = v$ が成立するように置き換えたい。そこで，式 (4) を変形すると，

$$\frac{L}{Bl}\frac{\Delta I}{\Delta t} = v$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta\left(\dfrac{L}{Bl}I\right)}{\Delta t} = v$$

となるので，

$$x = \underbrace{\boldsymbol{\frac{L}{Bl}}}_{ヌ} I$$

という変数変換を行えばよいとわかる。実際にこの式で I を x に置き換えると式 (4) は

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

となり，式 (3) は

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{B^2l^2}{ML}x$$

となる。

さらにこれらの 2 式から v を消去すると，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{M} \times \underbrace{\boldsymbol{\frac{B^2l^2}{L}}}_{ル} \times x$$

となる。よって，この単振動の角振動数 ω は

$$\omega = \frac{Bl}{\sqrt{ML}}$$

であり，周期は，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{Bl}{\sqrt{ML}}} = \underbrace{\boldsymbol{\frac{2\pi\sqrt{ML}}{Bl}}}_{ヲ}$$

であることがわかる。

（別解）

単振動を表す微分方程式の一般の形を知っているならば，ばねの運動に見立てずとも周期は求まる。

式 (3)，式 (4) は，瞬間的変化率を考えている限り

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{IBl}{M} \qquad \cdots\cdots (5)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{vBl}{L} \qquad \cdots\cdots (6)$$

である。式 (6) を v について解いて式 (5) に代入すると，

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -\frac{(Bl)^2}{ML}I$$

である。式 (5) を I について解いて式 (6) に代入すると，

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{(Bl)^2}{ML}v$$

である。よって，I，v はともに角振動数 $\dfrac{Bl}{\sqrt{ML}}$，周期 $\dfrac{2\pi\sqrt{ML}}{Bl}$ の単振動をする。

本解では $x = \dfrac{L}{Bl}I$ を使って，変数 I を見慣れた変数 x に置き換えて x の単振動を導き，その結果を式 (3)，式 (4) に代入して I，v についての単振動を導いている。

◆ Column

単振動を表す微分方程式

ある物理量 X の単振動を表す微分方程式は

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -aX \quad （ただし，a は正の実数）$$

である。実際，この式の一般解は

$$X = A\sin(\sqrt{a}t + \alpha) \quad （ただし，A，\alpha は任意の定数。実際には初期条件から決定される）$$

であることが知られており，これは角振動数 $\omega = \sqrt{a}$ の単振動である。

次に，各々の単振動の式を考える。ϕ_0 を初期位相として，

$$v = v_1 \sin(\omega t + \phi_0)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{\Delta v}{\Delta t}\left(= \frac{dv}{dt}\right) &= \omega v_1 \cos(\omega t + \phi_0) \\ &= v_1 \frac{BL}{\sqrt{ML}} \cos(\omega t + \phi_0)\end{aligned}$$

である。式 (3) に代入して，

$$I = -v_1\sqrt{\frac{M}{L}}\cos(\omega t + \phi_0) = v_1\sqrt{\frac{M}{L}}\sin\left(\omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。以上より，速度の位相は電流の位相よりも

$\dfrac{\pi}{2}$ だけ進んでいる（①）
　　　　　　　　　　　　$\sim$ ワ

とわかる。

また，$t=0$ のときに各々 v_0，I_0 であったので，

$$v_0 = v_1 \sin\phi_0$$

$$I_0 = -v_1\sqrt{\frac{M}{L}}\cos\phi_0$$

以上から ϕ_0 を消去して，

$$v_1 = \underbrace{\boldsymbol{\sqrt{{v_0}^2 + \frac{L}{M}{I_0}^2}}}_{\text{カ}}$$

また，

$$I_1 = \underbrace{\boldsymbol{\sqrt{{I_0}^2 + \frac{M}{L}{v_0}^2}}}_{\text{ヨ}}$$

である。

問 2

問題文の数値をカ，ヨの結果に代入すると $v_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$，$I_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{A}$ である。よって，このときの v と I は，

$$v = \sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{T} + \phi_0\right)$$

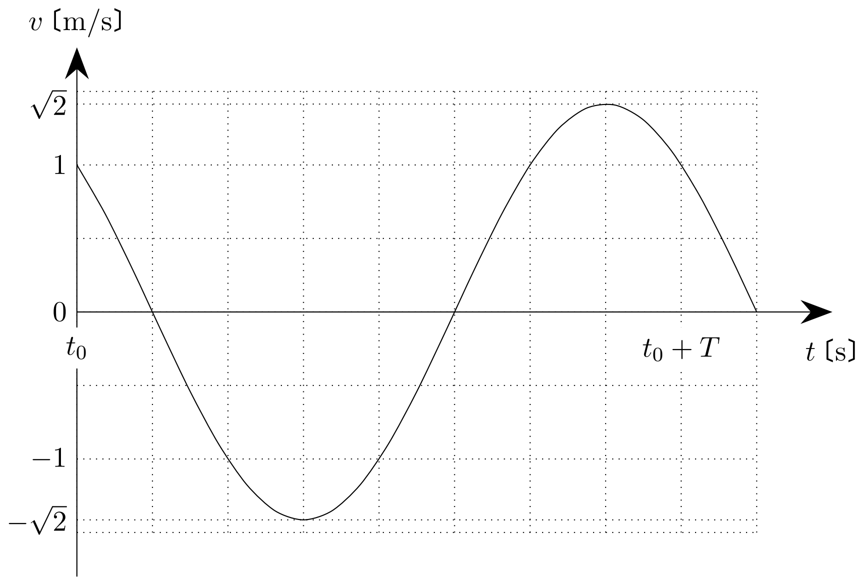
$$I = -\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{T} + \phi_0\right)$$

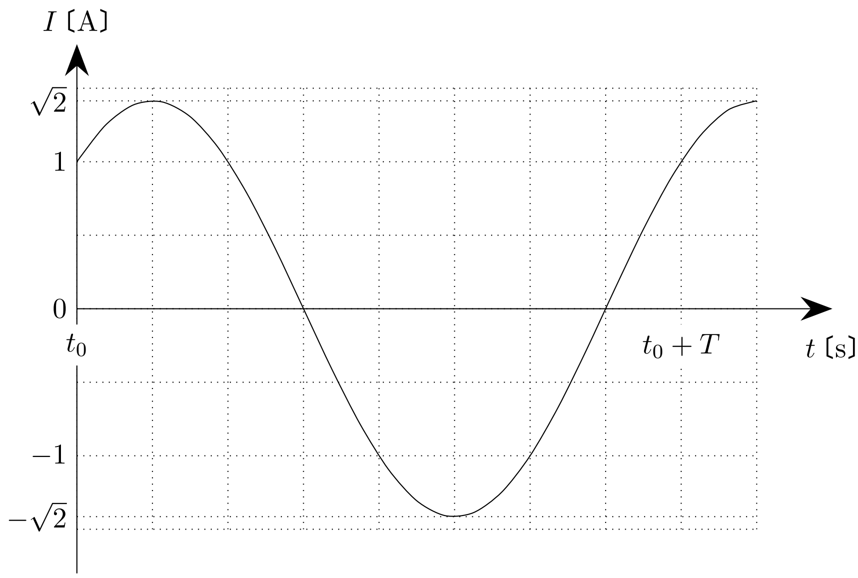
となる。さらに，$t=0$ のときの $v_0 = v_1\sin\phi_0$，$I_0 = -I_1\cos\phi_0$ に問題文の数値を代入して計算すると，

$$\sin\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\phi_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

以上より，グラフは次のようになる。





（ 大泉雄司，松井浩介，山崎裕太郎，仲里佑利奈 ）

2016 年度 京都大学 前期 物理

問題 III　U 字管の中の気体と液体の変化

出題範囲	気体とピストン
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	U 字管の中に液体を入れて，気体を変化させる問題。この系統の問題で重要なのは，水面が h だけ下がると液面の差は $2h$ 増えることである（ただし，液体が U 字管の左右にまたがってあるときに限る）。間違えやすいので注意すること。この問題では，気体の圧力は大気圧と液面差による水圧の和につねに等しいことと，気体の状態方程式，熱力学の法則をおもに用いる。

解答

あ　$P_1 - \rho g h$　　**い**　$P_1 + 2\rho g x$　　**う**　$P_1 S$

え　$\rho g S$　　**お**　$\dfrac{3}{2}P_1 S + 3\rho g S l$　　**か**　$3\rho g S$

き　$\dfrac{5}{2}P_1 S + 3\rho g S l$　　**く**　$4\rho g S$　　**け**　$\dfrac{2Q}{5nR}$

こ　$\dfrac{2}{5}Q$　　**さ**　$\rho g S \Delta y$　　**し**　$-\dfrac{5}{3}\dfrac{P_3 S^2}{V_3}\Delta y$

す　$\rho g V_3 < \dfrac{5}{3}P_3 S$

問 1　解説中に記載

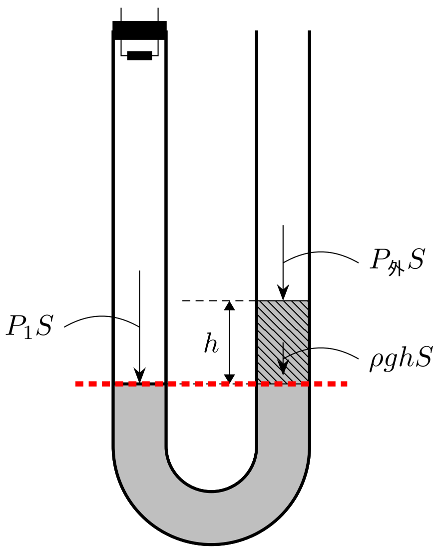
解説

(1)

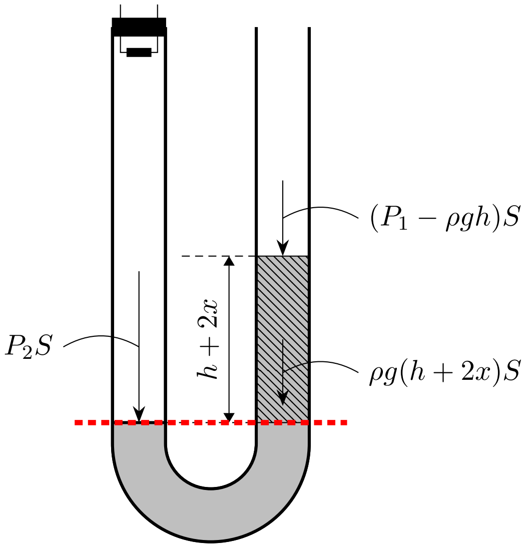
大気圧を $P_{外}$ とする。ピストンの力のつり合いより，

$$P_1 S = P_{外} S + \rho g h S$$

$$\therefore\quad P_{外} = \underset{あ}{\underline{P_1 - \rho g h}}$$



(2)



ピストンが x だけ下がったので，右の管の液面は x だけ上昇し，左右の管の液面の高さの差は $2x$ だけ広がる。ピストンが下がった後の気体の圧力を P_2 とすると，

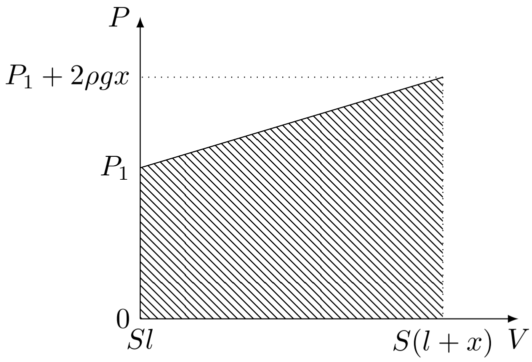
$$P_2S=(P_1-\rho gh)S+\rho g(h+2x)S$$

$$\therefore\quad P_2=\underbrace{\boldsymbol{P_1+2\rho gx}}_{\text{い}}$$

が成り立つ。

これ以降，気体の圧力を表す変数を P，気体の体積を表す変数を V，気体の温度を表す変数を T とする。

変化の間に気体がした仕事 W_{OUT} は右の P-V 図における斜線部の面積であり，



$$W_{\mathrm{OUT}}=\frac{1}{2}\times(P_1+P_1+2\rho gx)\times Sx$$

$$=\underbrace{\boldsymbol{P_1S}}_{\text{う}}x+\underbrace{\boldsymbol{\rho gS}}_{\text{え}}x^2$$

となる。気体の内部エネルギー変化 $\varDelta U$ は，

$$\varDelta U=\frac{3}{2}\varDelta(nRT)$$

$$=\frac{3}{2}\varDelta(PV)\quad(\because PV=nRT)$$

$$=\frac{3}{2}\{(P_1+2\rho gx)S(l+x)-P_1Sl\}$$

$$=\left(\underbrace{\boldsymbol{\frac{3}{2}P_1S+3\rho gSl}}_{\text{お}}\right)x+\underbrace{\boldsymbol{3\rho gS}}_{\text{か}}x^2$$

となる。ここで，気体に加えられた熱量を Q_{IN} とすると，熱力学第一法則より，

$$\varDelta U=-W_{\mathrm{OUT}}+Q_{\mathrm{IN}}$$

が成り立つ。よって，加えられた熱量は，

$$Q_{\mathrm{IN}}=\left(\underbrace{\boldsymbol{\frac{5}{2}P_1S+3\rho gSl}}_{\text{き}}\right)x+\underbrace{\boldsymbol{4\rho gS}}_{\text{く}}x^2$$

となる。

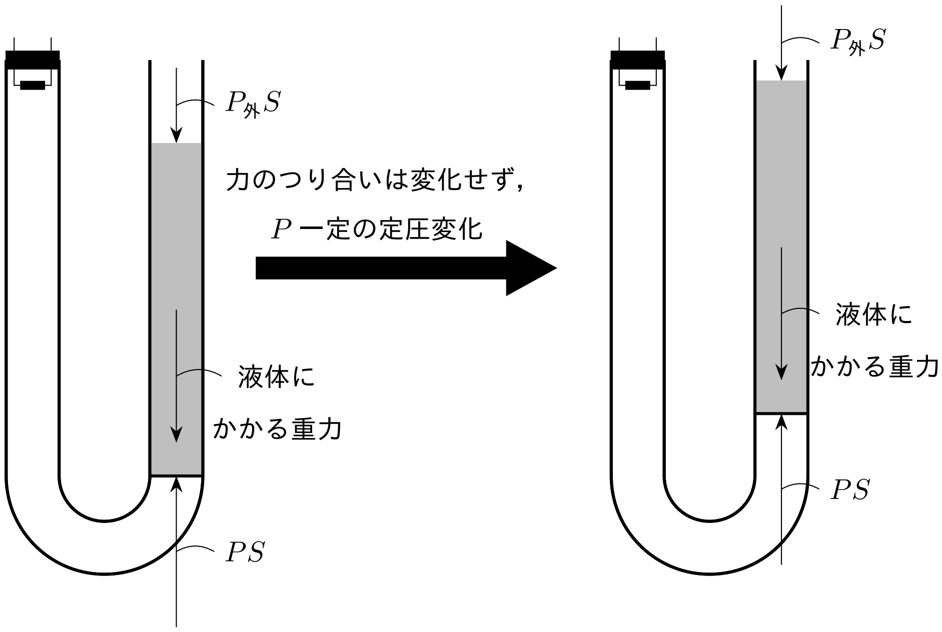
（別解）

気体がした仕事 W_{OUT} を求める際に積分計算を用いてもよい。ピストンが変数 X だけ下がったときの圧力は $P = P_1 + 2\rho g X$ と表されるので，

$$W_{\text{OUT}} = \int_0^x PS\ dX$$
$$= \int_0^x (P_1 + 2\rho g X)S\ dX$$
$$= P_1 Sx + \rho g S x^2$$

となる（積分はグラフの面積を求めるものなので，別解も実は本解と同じことをしている。ただし，別解の方法は，圧力が体積の 1 次関数で表せないような複雑な場合でも，積分計算さえできれば使うことができる）。

(3)



単原子分子理想気体が定圧変化しているので，

$$Q = \frac{5}{2} nR\Delta T$$

$$\therefore\quad \Delta T = \boldsymbol{\frac{2Q}{5nR}}$$ け

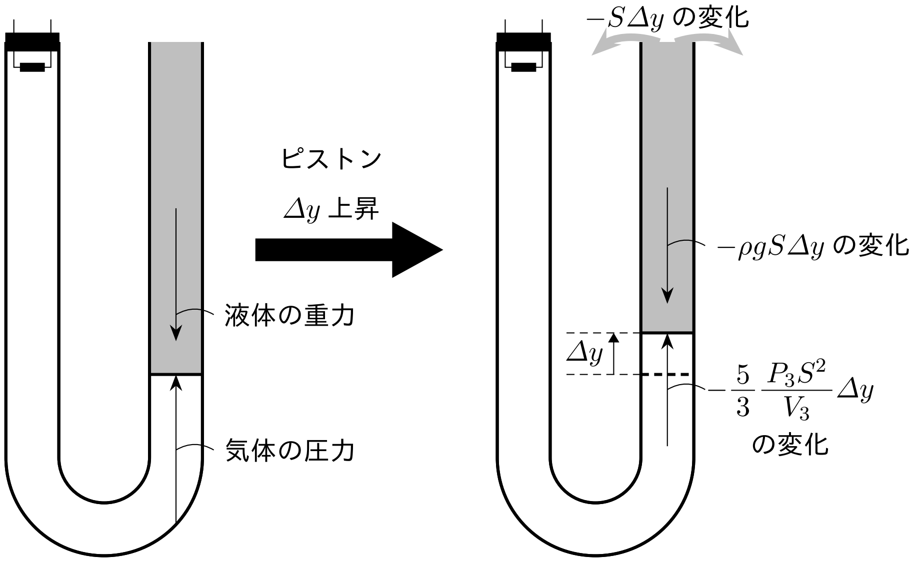
また，気体のした仕事は

$$P\Delta V = nR\Delta T$$

$$= \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{Q}$$ こ

である。

(4)



ピストンが上昇するとピストン上部にある液体の量は

$$S\Delta y$$

だけ減るので，

$$\boldsymbol{\rho g S\Delta y}$$ さ

だけ液体の及ぼす力は変化する。なお，この力の変化はピストンの位置の変化（Δy）を大きくするはたらきがあることから，符号は正であることに注意。

ここで，気体について，断熱変化の式を考えると，

$$P_3{V_3}^{\frac{5}{3}} = P(V_3 + S\Delta y)^{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore \quad P = P_3\left(1 + \frac{S\Delta y}{V_3}\right)^{-\frac{5}{3}}$$

よって，

$$P \fallingdotseq P_3\left(1-\frac{5}{3}\frac{S\Delta y}{V_3}\right)$$

が成り立つ。ゆえに，

$$(P-P_3)S = \underbrace{\boldsymbol{-\frac{5}{3}\frac{P_3S^2}{V_3}\Delta y}}_{\text{し}}$$

また，ピストンが安定する条件は，問題文から，

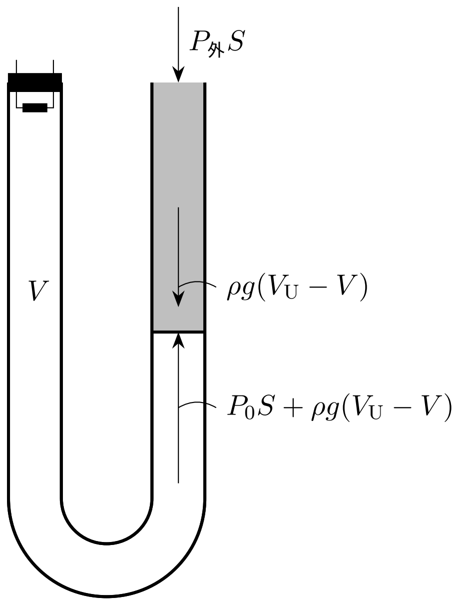
$$g\rho S\Delta y - \frac{5}{3}\frac{P_3S^2}{V_3}\Delta y < 0$$

$$\therefore\quad \underbrace{\boldsymbol{\rho g V_3 < \frac{5}{3}P_3S}}_{\text{す}}$$

問 1

まず，この問いで考えるピストンの上昇と (4) で考えたピストンの上昇は別の現象であることに注意する。(4) の上昇はつり合いの安定性を調べるためのいわば仮想的な変化で，「断熱的に」「微小変位だけ」変化させている。一方，この問いの上昇は実際の変化であり，「加熱によって」「すべての液体があふれ出るまで」変化させる。その変化の途中でつり合いの安定性が破れるかどうかを問うているのである。

さて，この問いにおける気体の圧力 P と体積 V の関係を調べる。断熱変化でないため，(4) のように $PV^{\frac{5}{3}}$ が一定として立式することはできない。そこで，U 字管の全体積を V_{U} として，ピストンにはたらく力のつり合いを考えると，



$$PS = P_0S + \rho g(V_{\mathrm{U}}-V)$$

$$\therefore\quad P = P_0 + \frac{\rho g(V_{\mathrm{U}}-V)}{S}$$

となる。

また，(4) と同様に考えると，変化の途中のある状態（圧力 P，体積 V）におけるつり合いの安定性の条件は

$$\rho g V < \frac{5}{3}PS$$

$$\therefore\quad P > \frac{3}{5}\frac{\rho g}{S}V$$

である。

変化の様子と安定性の条件の関係を P-V 図上で調べてみる。変化の過程は右下がりの直線で表され，安定性の条件は直線 $P = \dfrac{3}{5}\dfrac{\rho g}{S}V$ の上側の領域で表される。下に示す図 A のように，変化の最後（すべての液体があふれ出る）まで安定性の条件が破れないのは，変化の最後の点が安定性の条件を満たすときで，

$$P_{外} > \frac{3}{5}\frac{\rho g}{S}V_{\mathrm{U}}$$

である。一方，右下の図 B のように，変化の途中で安定性の条件が破れるのは，変化の最後の点が安定性の条件を満たさないときで，

$$P_{外} < \frac{3}{5}\frac{\rho g}{S}V_{\mathrm{U}}$$

である。よって，変化の途中で安定性が破れるか否か，またどこで安定性の条件が破れるかは ρ や S の値に依存する。

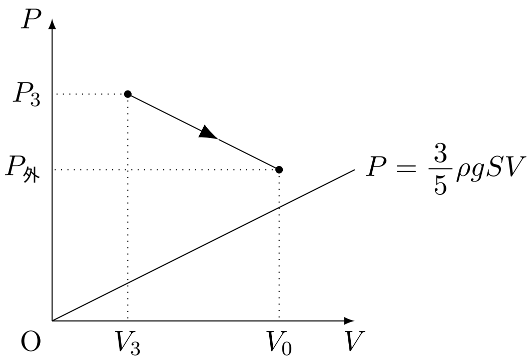


図 A：安定性が破れない場合

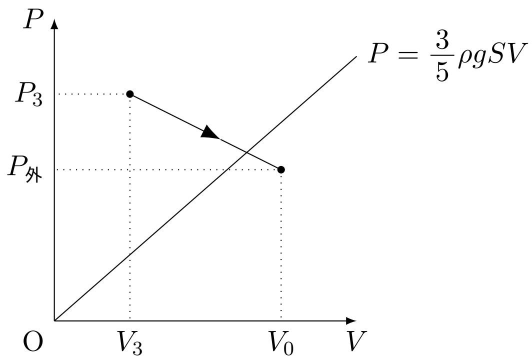


図 B：安定性が破れる場合

最後に安定性の条件が破れると何が起こるのかを考える。単純に，安定性が破れるのだから，それ以上加熱をしなくともピストンが一気に上昇すると考えても，結果は間違っていない。しかし，安定性の条件が断熱変化に復元力がはたらくか否かの条件であるのに対し，起こっているのは加熱変化であるという問題が残されている。この問題は「十分ゆっくりな加熱過程ではないため，気体が平衡状態でなくなり断熱的に変化していると見なせる状況が起こる」と考えることで解決される。そのため，結局断熱変化の安定性の条件を用いてよいのである。

以上をまとめると，解答は次のようになる。「**熱を加えて気体を膨張させると，液体があふれ出るために，気体の圧力が下がる。すると，ρ や S の値によっては，ピストンのつり合いの安定性の条件（圧力）$> \dfrac{3}{5}\dfrac{\rho g}{S}$（体積）が破れることがあり，その場合それ以上加熱しなくてもピストンは一気に上昇する。**」

（大泉雄司，松井浩介，岡田和也，仲里佑利奈）