2016 年度 京都大学 前期 数学

1　関数の最大値と極限

出題範囲	数Ⅲ微分
難易度	★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	与えられた関数を微分して，それを因数分解することで関数の最大値を求める典型問題である。三角関数を含む微積分は計算ミスを起こしやすいので気をつけて計算しよう。また，(2) で用いる公式は頻出なので忘れないようにしよう。

解答

(1)
$$\begin{aligned} f_n'(\theta) &= (n-1)(1+\cos\theta)\cos\theta\sin^{n-2}\theta - \sin^n\theta \\ &= \sin^{n-2}\theta(n\cos^2\theta + n\cos\theta - \cos\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= \sin^{n-2}\theta\{n\cos\theta(1+\cos\theta) - (1+\cos\theta)\} \\ &= (n\cos\theta - 1)(1+\cos\theta)\sin^{n-2}\theta \end{aligned}$$

ここで，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，$1+\cos\theta > 1$, $\sin^{n-2}\theta \geqq 0$ である。

このとき，$\cos\alpha = \dfrac{1}{n}$ となる実数 α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ一つ存在し，

$f_n(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f_n'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f_n(\theta)$	0	↗	極大	↘	1

よって，$f_n(\theta)$ は $\theta = \alpha$ のとき最大となり，

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}} \geqq 0$ であるから

$$M_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

(2)
$$(M_n)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n\cdot\frac{n-1}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}^{\frac{1-\frac{1}{n}}{2}}$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(M_n)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}^{\frac{1-\frac{1}{n}}{2}} \\ &= e\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} \qquad \cdots\cdots\cdot(※) \\ &= \sqrt{e}\end{aligned}$$

解説

(1) 関数を微分して最大値を求める典型的な問題である。微分した関数を因数分解して，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において符号が一定ではない部分を考えれば，増減表を用いて簡単に解くことができる。

(2) (1) で求めた関数の極限を求める問題である。自然対数の絡んだ公式

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

を用いることで，(※) の部分は次のように導くことができる。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}^{\frac{1-\frac{1}{n}}{2}}$ について

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{e} \quad (n^2 = t \text{ と置換した。})$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}^{\frac{1-\frac{1}{n}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

（松岡駿，松下祐樹）

2016 年度 京都大学 前期 数学

2 素数 p，q を用いて p^q+q^p と表される素数

出題範囲	整数
難易度	★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	因数分解をすることが容易ではない問題では，p, q の偶奇や，3 で割った余り，5 で割った余り，$\cdots$ といった方法で場合分けをすることが多い。また，合同式に深い理解があれば，別解のような解答も可能となり，時間に余裕が持てただろう。いずれの解法にせよ標準的な整数問題であり，難関大志望者なら手早く完答することを目標としてほしい。

解答

$p^q+q^p=r$ とおく。

p，q の偶奇が一致するとき，

$$p^q+q^p=(\text{奇数})+(\text{奇数})=(\text{偶数})$$

もしくは

$$p^q+q^p=(\text{偶数})+(\text{偶数})=(\text{偶数})$$

のようになり，偶数となる。p^q+q^p は，p，q について単調増加関数であるので，r の最小値は $8(p=q=2$ のとき$)$ となる。偶数の素数は 2 のみであるので，偶奇の一致する素数の組 p，q は存在しない。

以上より，p，q の偶奇は一致しない。

ここで，偶数の素数が 2 のみであることと，$r=p^q+q^p$ は p と q の入れ替えに関して対称性があることから，$p=2$ とすると，

$$r=2^q+q^2$$

ここで $q \geqq 3$ であるが，$q=3$ のとき

$$q^2 \equiv 0 \pmod 3$$

であり，$q \geqq 5$ のとき，$q \equiv \pm 1 \pmod 3$ ゆえ

$$q^2 \equiv 1 \pmod 3 \qquad \cdots\cdots ①$$

また，$2 \equiv -1 \pmod 3$ より

$$2^q \equiv (-1)^q \pmod 3$$

いま，q は奇数であるから，

$$2^q \equiv -1 \pmod 3 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，② より，$q \geqq 5$ のとき，

$$q^2 + 2^q \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$$

$r \geqq 8$ であるから $r \neq 3$ となる。よって，このとき r は素数ではない。

したがって，r が素数となる可能性があるのは $q = 3$ のときのみである。このとき

$$r = 2^3 + 3^2 = 17$$

となり，確かに素数である。

以上より，素数 p, q を用いて $p^q + q^p$ と表される素数は 17 のみである。

解説

p と q の偶奇が一致する組み合わせが存在しないことはすぐにわかるだろう。このことから p, q の一方が 2 とわかる (以下，$p = 2$ とする)。ここまでわかったら，あとは定石通り，余りに注目しよう。ここでは，$2^q + q^2$ を 3 で割った余りを調べる。余りが 0 となるとき，その数は 3 を除き素数ではない。このような方法はよく使うので，必ず覚えておこう。

別解

② の導出までは同様。

$q \geqq 3$ において，② より

$$\begin{aligned} q^2 + 2^q &\equiv q^2 - 1 \pmod 3 \\ &\equiv (q+1)(q-1) \pmod 3 \end{aligned}$$

よって，$q \geqq 5$ において $r \equiv 0 \pmod 3$ となる。$r \geqq 8$ であるから $r \neq 3$ となる。よって，このとき r は素数ではない。

したがって，r が素数となる可能性があるのは $q = 3$ のときのみである。このとき

$$r = 2^3 + 3^2 = 17$$

となり，確かに素数である。

以上より，素数 p, q を用いて $p^q + q^p$ と表される素数は 17 のみである。

別解解説

素数かどうかを判定するときに強力な武器となるのは因数分解である。別解では合同式を変形することで因数分解に持ち込むという手法をとった。

（青木徹，松岡駿）

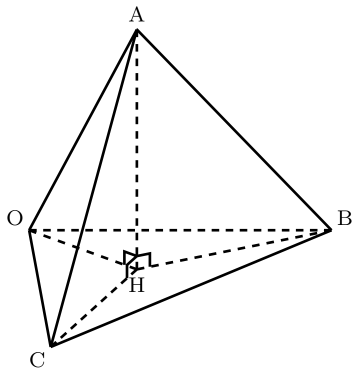
2016 年度 京都大学 前期 数学

3 正四面体に関する証明

出題範囲	空間図形
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	正四面体の示し方がパッと思い付かず慌てた人もいるかもしれないが，単純に各辺がすべて等しいことを示せばよい。頂点から底面への垂線の足が，底面である三角形の外心となるときに成り立つ重要な定理を利用することに気づけば，難なく解ける問題である。

解答

【証明】図のように点 A から面 OBC に下ろした垂線の足を H とすると，[1]



[1] 辺の長さが等しいことを示す際，与えられた条件を駆使して三角形の合同を示す，というやり方は頻出である。しっかり身に付けておこう。

$$\angle \mathrm{AHO} = \angle \mathrm{AHB} = \angle \mathrm{AHC} = 90^\circ \qquad \cdots\cdots\ ①$$

点 H は OBC の外心でもあるので，

$$\mathrm{OH} = \mathrm{BH} = \mathrm{CH} \qquad \cdots\cdots\ ②$$

辺 AH が共通であることと，①，② も考えて，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

$$\triangle \mathrm{AOH} \equiv \triangle \mathrm{ABH} \equiv \triangle \mathrm{ACH}$$

よって

$$\mathrm{AO} = \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \qquad \cdots\cdots\ ③$$

同様に，点 B から面 OCA に垂線を下ろして考えると，

$$\mathrm{BO} = \mathrm{BC} = \mathrm{BA} \qquad \cdots\cdots ④$$

同様に，点 C から面 OAB に垂線を下ろして考えると，

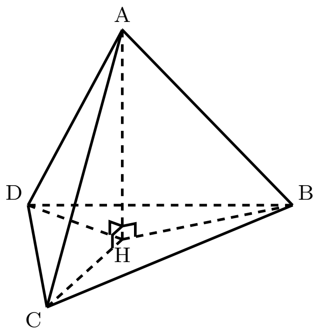
$$\mathrm{CO} = \mathrm{CA} = \mathrm{CB} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が示され，③，④，⑤ より，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$$

を得る。したがって，6 辺の長さがすべて等しいので，四面体 OABC は正四面体である。 (証明終)

解説



図のように，任意の四面体 ABCD において頂点 A から面 BCD に下ろした垂線の足 H が △BCD の外心となるとき，3 つの三角形 △AHB，△AHC，△AHD は互いに合同であり，それゆえ AB = AC = AD が成り立つ。この性質はとても重要なのでおさえておきたい。証明は解答のとおりである。

本問では，この性質を各頂点に適用することで，四面体のすべての辺の長さが等しいことが示される。各点における証明の流れはまったく同じであるから，点 A について考えてあとは「同様に」とまとめてしまって構わないだろう。

2016 年度の文系数学第 4 問で類似の問題が出題されているので，そちらも解けるようになっておこう。

（侯明程，松岡駿）

2016 年度 京都大学 前期 数学

4 与えられた領域を回転させてできる立体の体積

出題範囲	空間図形／体積
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	方程式によって定まる立体の体積を求める問題は，解法が決まっているということを肝に銘じてほしい。本問の場合，具体的な空間図形の概形を容易に把握できなかった人もいただろう。しかし，そもそも体積を求める上で，その立体の概形がわかっている必要はない。体積を求める手順は，① 回転軸に垂直に切った断面の面積を求め，② それを軸について積分する，というものであった。したがって，断面の平面図形さえわかれば立体の求積ができるということである。このタイプの求積問題に不慣れな人は典型問題の演習を繰り返して，すんなりと解けるようになってほしい。

解答

空間図形 D は次の連立方程式で表される。

$$\begin{cases} y = z & \cdots\cdots\cdot ① \\ 0 \leqq y \leqq \log a & \cdots\cdots\cdot ② \\ |x| \leqq \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} - 1 & \cdots\cdots\cdot ③ \end{cases}$$

$y = t\,(0 \leqq t \leqq \log a)$ に固定し[1]，D と平面 $y = t$ の共通部分について考える。

①，③ より，

$$\begin{cases} z = t \\ |x| \leqq \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \end{cases}$$

である。

ここで，e^t と e^{-t} はともに正であるから，(相加平均)≧(相乗平均) より，

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \geqq \sqrt{e^t \cdot e^{-t}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

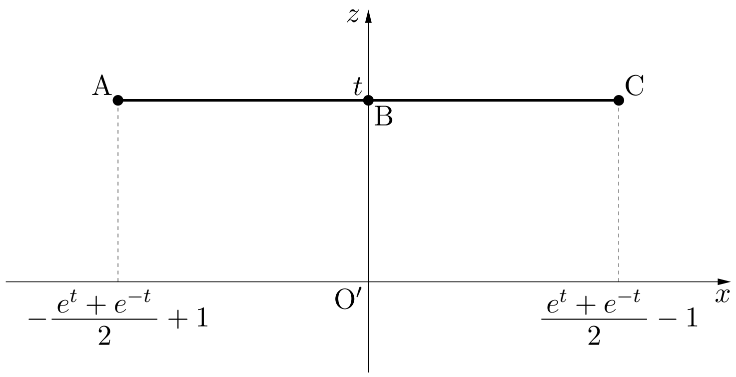
(等号成立は，$e^t = e^{-t}$，つまり $t = 0$ のとき)

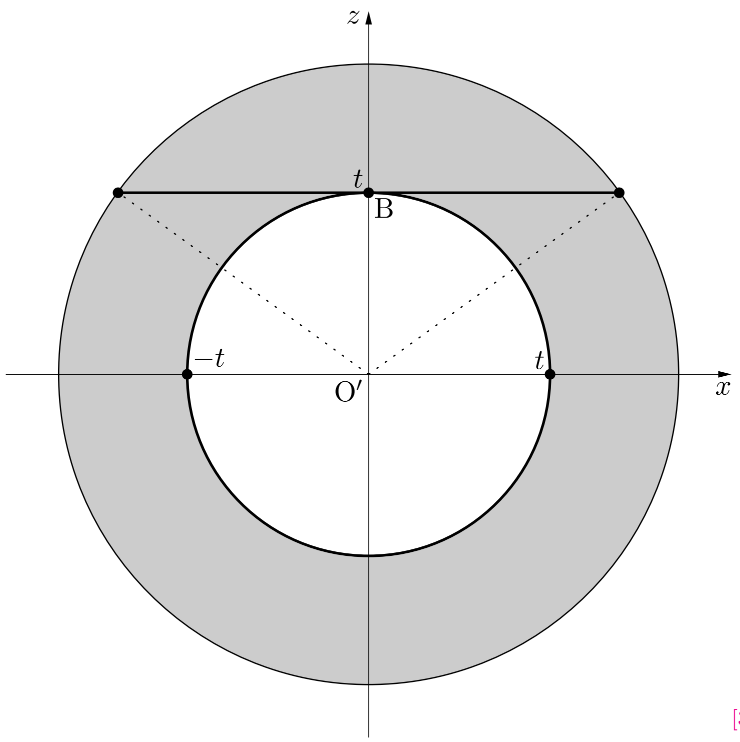
である。

[1] y 軸のまわりに回転させるのだから，立体を平面 $y = t$ で切ったときの断面積を調べればよさそうだと考える。

以上のことから，平面 $y = t$ 上での図形の概形を図示すると以下のようになる。[2]

[2] 「断面の線分を書く→回転させる」の手順で立体の断面を図示しよう。





[3]

[3] 線分を，その線分が存在している平面上で回転させると，図のようなドーナツ型の軌跡を描く。これは，「原点からの距離が最大の点が描く円」が軌跡の最外部，「原点からの距離が最小の点が描く円」が軌跡の最内部となるためである。頻出なので，しっかり記憶しておこう。

上方の図が D と平面 $y = t$ の共通部分であり，図のように点 $\mathrm{A, B, C, O'}$ とおく。下方の図がその共通部分を点 $\mathrm{O'}$ を中心として回転させた通過領域である。その面積を $S(t)$ とおく。

$$(\mathrm{O'A})^2 = (\mathrm{O'C})^2 = t^2 + \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1\right)^2$$

$$(\mathrm{O'B})^2 = t^2$$

となることより，

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \pi\left\{(\mathrm{O'A})^2 - (\mathrm{O'B})^2\right\} \\
&= \pi\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1\right)^2 \\
&= \pi\left\{\frac{1}{4}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) - \left(e^t + e^{-t}\right) + \frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

であるから，求める体積 V は，

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\log a} S(t)\,dt \\
&= \int_0^{\log a} \pi\left\{\frac{1}{4}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) - \left(e^t + e^{-t}\right) + \frac{3}{2}\right\} dt \\
&= \pi\left[\frac{1}{8}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) - \left(e^t - e^{-t}\right) + \frac{3}{2}t\right]_0^{\log a} \\
&= \pi\left\{\frac{1}{8}\left(e^{2\log a} - e^{-2\log a}\right) - \left(e^{\log a} - e^{-\log a}\right) + \frac{3}{2}\log a\right\} \\
&= \pi\left\{\frac{1}{8}\left(e^{\log a^2} - e^{\log a^{-2}}\right) - \left(e^{\log a} - e^{\log a^{-1}}\right) + \frac{3}{2}\log a\right\} \\
&= \pi\left\{\frac{1}{8}\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) - \left(a - \frac{1}{a}\right) + \frac{3}{2}\log a\right\}
\end{aligned}
$$

解説

このような求積問題は「軸に垂直な平面で立体を切る→軸について積分を行う」という手順で解くことができる。ほとんどの問題に通用する手法であるから，必ず習熟しておこう。本問の場合，与えられた関数の形が仰々しいものの，断面は単純なドーナツ形であり，円の面積の求め方がわかっていれば解けてしまう。

断面の図形を描く際，あいまいさをなくすため解答のように $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \geqq 0$ を示しておくほうが望ましい。

解答では相加相乗平均の不等式を利用したが，このやり方が最も簡潔であろう。

なお，この不等式は微分を用いて示すことができる。

別解

$f(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} - 1$ とおく。問題文より，$t \geqq 0$ の場合のみを考えればよい。

$f(t)$ を t について微分すると，

$$
f'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}
$$

となる。

$e > 1$，$t \geqq 0$ において $t \geqq -t$ であることから，$e^t \geqq e^{-t}$ であるので，

$f'(t) \geqq 0$ である。よって，$f(t)$ は $t \geqq 0$ の範囲で t の増加関数であるとわか

る。以上より，$t \geqq 0$ に対し，

$$f(t) \geqq f(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

が成立する。なお，この $f(t)$ はカテナリー（懸垂線）とよばれ，受験においてもときどき目にする関数である。余力がある人はその性質について調べてみてもよいだろう。

（鈴木陽大，松岡駿）

2016 年度 京都大学 前期 数学

5 平面上の動点についての確率

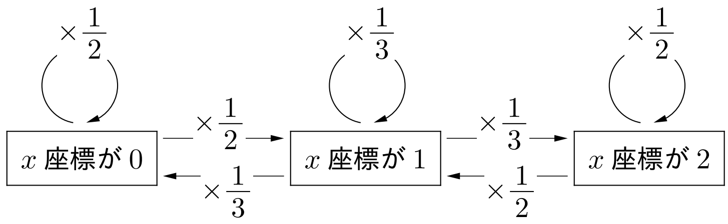
出題範囲	確率漸化式
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	X を n 秒後の x 座標によって分類して，それぞれ確率漸化式を立式できれば難しくない。動点の移動など，$n+1$ 秒後の位置が n 秒後の位置に依存するときは，その遷移に着目すると解決の糸口が見つかることが多い。本問では，$y=0$ と $y=1$ について，各 x 座標でどの x 座標に移動するか違いがないので，対称性から x 座標の違いにのみ着目して，確率を文字としておけばよい。

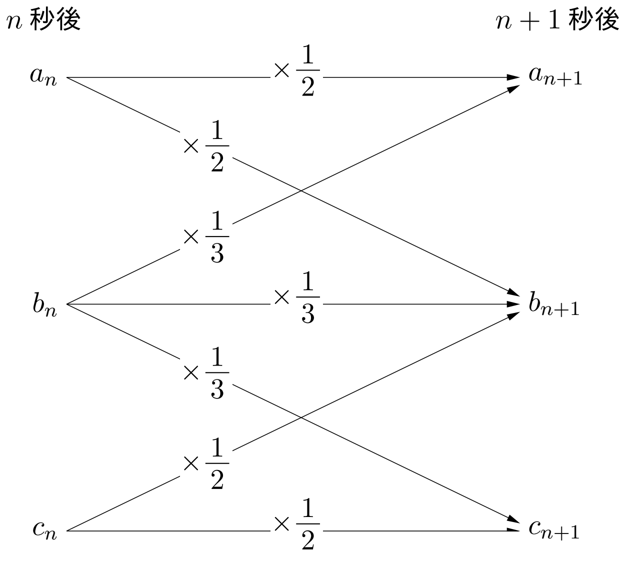
解答

n 秒後に動点 X の x 座標が 0，1，2 である確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおき，

n 秒後から $n+1$ 秒後への遷移を図にすると次のようになる。[1]

[1] 面倒くさがらず遷移図を書くと考えやすい。





n 秒後から $n+1$ 秒後の遷移を考えると

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3}b_n & \cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3}b_n + \dfrac{1}{2}c_n & \cdots\cdots ② \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n + \dfrac{1}{2}c_n & \cdots\cdots ③ \\ a_n + b_n + c_n = 1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

がわかる。[2]

[2] 結果的に使わない式もあるが，わかっていることは式にしてしまおう。

① − ③ より

$$a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n)$$

$a_0 = 1$，$c_0 = 0$ より

$$a_n - c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - c_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \cdots\cdots ⑤$$

① + ③ と ④ より[3]

[3] ④ の式で b_n を消去しよう。

$$\begin{aligned} a_{n+1} + c_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + c_n) + \frac{2}{3}b_n \\ &= \frac{1}{2}(a_n + c_n) + \frac{2}{3}(1 - a_n - c_n) \\ &= -\frac{1}{6}(a_n + c_n) + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

漸化式を変形して

$$a_{n+1} + c_{n+1} - \frac{4}{7} = -\frac{1}{6}\left(a_n + c_n - \frac{4}{7}\right)$$

$a_0 = 1$，$c_0 = 0$ より

$$\begin{aligned} a_n + c_n &= \left(-\frac{1}{6}\right)^n \left(a_0 + c_0 - \frac{4}{7}\right) + \frac{4}{7} \\ &= \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{4}{7} \qquad \cdots\cdots ⑥ \end{aligned}$$

$(⑤ + ⑥) \times \dfrac{1}{2}$ より[4]

[4] a_n と c_n の連立方程式と考えて解く。

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{7}$$

解説

点が動くパターンの場合の数や確率の問題では，遷移図を書くことで見通しが立つ場合がある。本問はまさに遷移図が適しており，連立漸化式を立てることができる。a_n を求めることが目標なので，連立漸化式をうまく足し引きする必要があるが，本問では ① $+$ ③ と ① $-$ ③ で十分である。① $-$ ③ のあとには「全事象の確率の和は 1」を表す ④ の式が効いてくることには注意しておきたい。

（江崎ゆり子，松岡駿）

2016 年度 京都大学 前期 数学

6 複素数係数の 2 次式

出 題 範 囲	方程式・複素数／複素数平面
難 易 度	★★★★☆
所 要 時 間	25 分
傾向と対策	「$f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる」ということをどう解釈するかがポイントである。問題文に書かれている 2 次式の形では先に進めないため，柔軟性が問われたと思われる。$f(x)=0$ となる x を α,β とおいてからの場合分けは若干面倒で，符号の順に注意する必要はあるが難しくはない。思考力と処理能力が試された問題である。

解答

ある複素数 α,β に対し，$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ と表せることを示す。[1]

[1] 複素数係数の 2 次方程式が重複を含めて 2 つの解をもつことは高校数学では習わないので，示しておいた方が安全だろう。

$$f(x)=0$$

$$x^2+ax+b=0$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-b$$

ここで，$x+\dfrac{a}{2}=z$，$\dfrac{a^2}{4}-b=\gamma$ とすると，方程式 $f(x)=0$ は

$$z^2=\gamma$$

と表せる。γ の平方根は 2 つ存在することから，それらの値を $z=\xi,\zeta$ とすると

$$x+\frac{a}{2}=\xi,\zeta$$

$$x=\xi-\frac{a}{2},\zeta-\frac{a}{2}$$

よって $\alpha=\xi-\dfrac{a}{2},\beta=\zeta-\dfrac{a}{2}$ とおくと，これらは方程式 $f(x)=0$ のすべての解である。よって $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ と表せる。[2]

[2] 「$f(x^3)$ が $f(x)$ で割り切れるとき，$f(\alpha)=0$ ならば $f(\alpha^3)=0$」を使うための準備になる。

$$f(x^3)=(x^3-\alpha)(x^3-\beta)$$

これが $f(x)$ で割り切れるので，$f(\alpha^3)=f(\beta^3)=0$ であることがわかり，以

下の式を得る。

$$\begin{cases}(\alpha^3-\alpha)(\alpha^3-\beta)=0\\(\beta^3-\alpha)(\beta^3-\beta)=0\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}\alpha(\alpha^2-1)(\alpha^3-\beta)=0\\\beta(\beta^3-\alpha)(\beta^2-1)=0\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots ①$$

また，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-a\\\alpha\beta=b\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$\alpha=0$ とすると $\beta=0,\ \pm 1$ に，$\beta=0$ とすると $\alpha=0,\ \pm 1$ になり，② より条件 (ロ) を満たさない。

ゆえに $\alpha\fallingdotseq 0$ かつ $\beta\fallingdotseq 0$ である。よって，① の 2 つの式をそれぞれ α,β で割ることができるので

$$\begin{cases}(\alpha^2-1)(\alpha^3-\beta)=0\\(\beta^3-\alpha)(\beta^2-1)=0\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}\alpha^2-1=0\\\text{もしくは}\\\alpha^3-\beta=0\end{cases}\text{かつ}\quad\begin{cases}\beta^3-\alpha=0\\\text{もしくは}\\\beta^2-1=0\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots ③$$

が得られる。ここで ③ を満たす方程式は以下の 3 つの場合がある。

(i) $\alpha^2-1=\beta^2-1=0$

(ii) $\alpha^3-\beta=\beta^3-\alpha=0$

(iii) $\alpha^3-\beta=\beta^2-1=0$

ここで，α,β を入れ替えても a，b の値は変わらないので

$\alpha^2-1=\beta^3-\alpha=0\Leftrightarrow$ (iii) である。

(i) $\alpha^2-1=\beta^2-1=0$ のとき

$\alpha=\pm1,\beta=\pm1$(複号任意) となり a，b はともに実数となる。② よりこれは条件（ロ）を満たさないので不適。

(ii) $\alpha^3-\beta=\beta^3-\alpha=0$ のとき

$$\alpha^9=\beta^3=\alpha$$

$$\alpha(\alpha^8-1)=0$$

$\alpha \fallingdotseq 0$ であるから，$\alpha^8-1=0$ について考える。

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi) \qquad \cdots\cdots ④$$

とおくと[3]$\alpha^8=r^8(\cos 8\theta+i\sin 8\theta)=1$ であるから

$$r=1, \theta=0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

[3] 極形式。次数が大きかったり複素数が絡む方程式を解くときの定番の手段。r と θ の範囲に注意。

③ に代入すると，(α,β) の組は α と β を入れ替えたものを除いて

$$(\alpha,\beta)=(\pm1,\mp1),\ (\pm i,\mp i),\ \left(\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}, \frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}\right) \quad (複号同順)$$

② より，この中で条件 (ロ) を満たすような (a,b) の組を考えると

$$(a,b)=(-\sqrt{2}i,-1),\ (\sqrt{2}i,-1)$$

である。

(iii) $\alpha^3-\beta=\beta^2-1=0$ のとき

$\beta=\pm1$ であるので，$\alpha^3=\pm1$(複号同順) である。

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$ または $(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$ なので

$$(\alpha,\beta)=(\pm1,\pm1),\ \left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},1\right),\ \left(\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},-1\right) \quad (複号同順)$$

である。[4]

[4] 2 次方程式の解の公式。

このうち条件 (ロ) を満たす (a,b) の組は，② より

$$(a,b)=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\right),\ \left(\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right) \quad (複号同順)$$

以上より，条件を満たす 2 次式は次の通りである。

$$f(x)=x^2\pm\sqrt{2}ix-1,$$

$$x^2+\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}x+\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\ (複号同順),$$

$$x^2+\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}x+\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\ (複号同順)$$

解説

条件 (イ) をどう解釈するかがポイントである。2 次式を x^2+ax+b のまま捉えていては先に進めない。$f(x^3)$ が $f(x)$ で割り切れるとは，4 次式 $P(x)$ を用いると

$$f(x^3)=f(x)P(x)$$

が成り立つ，ということである。つまり，複素数 α について，$f(\alpha)=0$ ならば $f(\alpha^3)=0$ となる。すると，$f(x)=0$ の解を α,β とおいて $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ とおいた方がわかりやすいのではないか，という気がしてくる。

ここで，複素数係数の 2 次式が重複を含めて 2 つの解をもつことは非常に直観的ではあるが，高校数学の範囲では示されていないので，このことを示しておいた方が，減点される心配がないだろう。

(ちなみに，代数学の基本定理として，複素数係数 n 次方程式 $(n \geqq 1)$ は重複を含めて n 個の解をもつことが知られているが，これを示すのは高校数学の範囲では不可能である。)

さらに $f(x^3)=(x^3-\alpha)(x^3-\beta)$ と表せて，$f(\alpha^3)=f(\beta^3)=0$ という条件が扱いやすくなる。多項式の表し方には 2 通りあることを頭に入れ，問題文の提示する形に惑わされないよう注意したい。

その後は丁寧に場合分けをしていく。各場合の検討の際に，条件 (ロ) を用いる。a, b の値は解と係数の関係を使おう。また，(ii) の場合分けで $\alpha^8-1=0$ を解く場面が出てくるが，ここで役に立つのが極形式である。$\alpha^8=r^8(\cos 8\theta+i\sin 8\theta)=1$ であるから

$$\begin{cases} r^8=1\,(r>0) \\ 8\theta=2k\pi \quad (k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{k}{4}\pi \end{cases}$$

となり，$0 \leqq \dfrac{k}{4}\pi < 2\pi$ であることから 8 つの θ の値が求められる。(iii) の場合分けは 2 次方程式の解の公式でよい。最後に解答をまとめる際には，符号に注意しよう。

（青木徹，松岡駿）