2015 年度 京都大学 前期 物理

問題 I　回転するリング上の物体の運動

出題範囲	単振動
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	回転するリングにおける単振動の問題。序盤はとにかく力を描き出してみることが重要。運動がイメージできれば，その分解答もスムーズにいくはず。中盤は sin，cos の計算が厄介だが確実に処理しよう。なお，sin，cos の近似式は頻出なので覚えておいたほうがよい。終盤は今まで導いた式から，文字の関係をグラフにできる。式の成立する条件を忘れずに，場合分けをしっかりすること。

解答

あ $mR(\sin\theta)\Omega^2\cos\theta$

い $\dfrac{g}{R\Omega^2}$

う $\sqrt{\dfrac{g}{R}}$

え $mR\Omega^2$

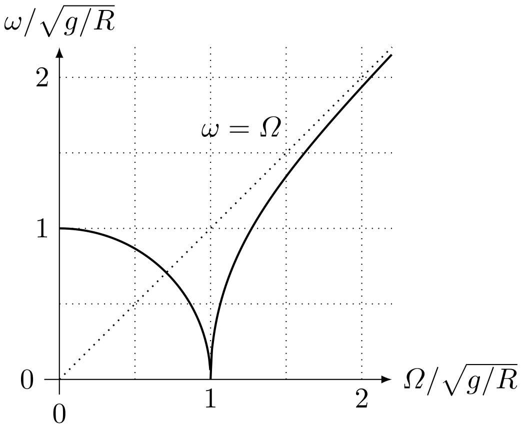
お $\sqrt{\dfrac{g}{R}-\Omega^2}$

か $-mR\Omega^2\sin^2\theta_0$

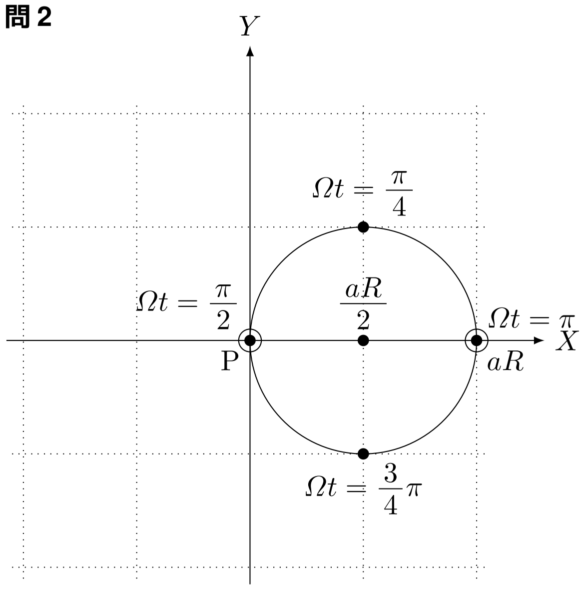
き $\Omega\sqrt{1-\dfrac{g^2}{R^2\Omega^4}}$

く $\sqrt{\dfrac{g}{2R}}$

問 1



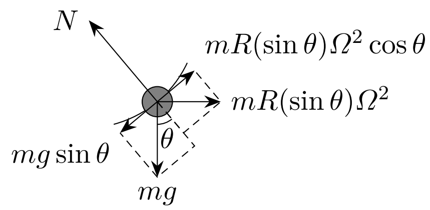
問 2



解説

I

リングにはたらいている力は，重力，遠心力，垂直抗力で，各々の大きさは，mg，$mR(\sin\theta)\Omega^2$，N である。



これらの力を θ の増える方向を正として，リングに沿った接線方向の成分とリングの中心方向の成分に分解し，接線方向に注目すると，

$$F = -mg\sin\theta + \underbrace{\boldsymbol{mR(\sin\theta)\Omega^2\cos\theta}}_{\text{あ}}$$

となる。

$F=0$ を満たすつり合いの角度 θ を θ_0 とおく。このとき，$F=0$ となるのは，

$$F = 0$$

$$\therefore\quad -mg\sin\theta_0 + mR(\sin\theta_0)\Omega^2\cos\theta_0 = 0$$

$$\therefore\quad m\sin\theta_0\left(R\Omega^2\cos\theta_0 - g\right) = 0$$

$$\therefore\quad \sin\theta_0 = 0 \quad \text{および} \quad \cos\theta_0 = \underbrace{\boldsymbol{\frac{g}{R\Omega^2}}}_{\text{い}}$$

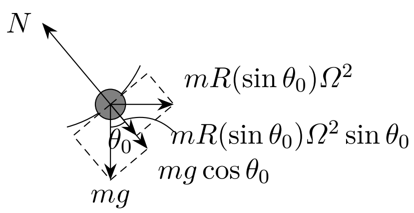
したがって，$\cos\theta_0 = \dfrac{g}{R\Omega^2}$ が解として存在するための条件は $\dfrac{g}{R\Omega^2} > 0$ より，$0 < \cos\theta_0 = \dfrac{g}{R\Omega^2} < 1$ である。

よって，

$$\frac{g}{R\Omega^2} < 1$$

$$\therefore\quad \Omega > \underbrace{\boldsymbol{\sqrt{\frac{g}{R}}}}_{\text{う}} = \Omega_c$$

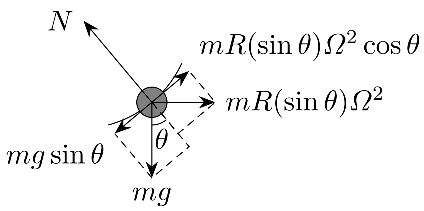
このときにリングの中心方向にリングから受ける垂直抗力の大きさは，リングの中心方向の力のつり合いから，



$$\begin{aligned} N &= mg\cos\theta_0 + mR\left(\sin\theta_0\right)\Omega^2\sin\theta_0 \\ &= mg\cos\theta_0 + mR\sin^2\theta_0\cdot\Omega^2 \\ &= mg\cos\theta_0 + mR\Omega^2\left(1-\cos^2\theta_0\right) \\ &= \underbrace{\boldsymbol{mR\Omega^2}}_{\text{え}} \quad \left(\because\ \cos\theta_0 = \frac{g}{R\Omega^2} \text{ より } g = R\Omega^2\cos\theta_0\right) \end{aligned}$$

である。

以下では，$\theta = \theta_0 + \phi$ とし，つり合いの位置からの微小振動を考える。



まず，$\theta_0 = 0$ における，つり合いの位置からの微小振動を考える。

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \phi \\ (0 <)\Omega < \Omega_c \end{cases}$$

が成立するとき，復元力は，

$$\begin{aligned} F &= -mg\sin\theta + mR(\sin\theta)\Omega^2\cos\theta \\ &= -mg\sin(\theta_0+\phi) + mR\Omega^2\sin(\theta_0+\phi)\cos(\theta_0+\phi) \\ &= -mg\sin\phi + mR\Omega^2\sin\phi\cos\phi \quad (\because\ \theta_0 = 0) \\ &\fallingdotseq -m\left(g - R\Omega^2\right)\phi \quad (\because\ \cos\phi \fallingdotseq 1,\ \sin\phi \fallingdotseq \phi) \\ &= -mR\left(\frac{g}{R} - \Omega^2\right)\phi \end{aligned}$$

これを，

$$\begin{aligned} F &= -kx \\ &= -kR\phi \end{aligned}$$

と比較すると，

$$k = m\left(\frac{g}{R} - \Omega^2\right)$$

となる。

したがって，角振動数は，

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \underbrace{\boldsymbol{\sqrt{\frac{g}{R} - \Omega^2}}}_{\text{お}}$$

となる。

つづいて，$\Omega > \Omega_c$ を条件として，$\theta_0 \fallingdotseq 0$ におけるつり合いの位置からの微小振動を考える。

復元力は，

$$
\begin{aligned}
F &= -mg\sin\theta + mR(\sin\theta)\Omega^2\cos\theta \\
&= -mg\sin(\theta_0+\phi) + mR\Omega^2\sin(\theta_0+\phi)\cos(\theta_0+\phi) \\
&= -mg(\sin\theta_0\cos\phi + \cos\theta_0\sin\phi) + mR\Omega^2(\sin\theta_0\cos\phi+\cos\theta_0\sin\phi)(\cos\theta_0\cos\phi - \sin\theta_0\sin\phi) \\
&\fallingdotseq -mg(\sin\theta_0 + \phi\cos\theta_0) + mR\Omega^2(\sin\theta_0+\phi\cos\theta_0)(\cos\theta_0 - \phi\sin\theta_0) \quad (\because\ \cos\phi \fallingdotseq 1,\ \sin\phi \fallingdotseq \phi) \\
&\fallingdotseq -mg\sin\theta_0 + mR\Omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0 + \phi\left(-mg\cos\theta_0 + mR\Omega^2\cos^2\theta_0 - mR\Omega^2\sin^2\theta_0\right) \quad (\because\ \phi^2 \fallingdotseq 0) \\
&= -m\sin\theta_0\left(g - R\Omega^2\cos\theta_0\right) + \phi\left\{-m\cos\theta_0\left(g - R\Omega^2\cos\theta_0\right) - mR\Omega^2\sin^2\theta_0\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$\cos\theta_0 = \dfrac{g}{R\Omega^2}$ を用いて，

$$F = \underbrace{\boldsymbol{-mR\Omega^2\sin^2\theta_0}}_{か} \times \phi$$

よって，

$$F = -kR\phi$$

と比較して，

$$k = m\Omega^2\sin^2\theta_0$$

ゆえに，$\omega = \sqrt{k/m}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{k/m} \\
&= \Omega\sin\theta_0 \\
&= \Omega\sqrt{1-\cos^2\theta_0} \\
&= \underbrace{\boldsymbol{\Omega\sqrt{1-\frac{g^2}{R^2\Omega^4}}}}_{き} \qquad \left(\because\ \cos\theta = \frac{g}{R\Omega^2}\right)
\end{aligned}
$$

ここで，$\omega = \Omega$ となるとき，

$$\Omega = \Omega\sqrt{1-\frac{g^2}{R^2\Omega^4}} \qquad \cdots\cdots ①$$

あるいは

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \Omega^2} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成立する。このうち，条件（$\Omega > \Omega_c = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$）を満たすのは，②の式で，

$$\Omega = \underset{\sim\sim\sim}{\boldsymbol{\sqrt{\frac{g}{2R}}}}$$

である（①の等式は右辺が明らかに Ω よりも小さいので成立しない）。

問 1

Ω の範囲によってかくグラフは変わってくる。

$\Omega < \Omega_c = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ のときは，

$$\frac{\omega}{\sqrt{\frac{g}{R}}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{R}}}\right)^2}$$

これは，円。

$\Omega > \Omega_c = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ のときは，

$$\omega = \Omega\sqrt{1 - \frac{g^2}{R^2\Omega^4}}$$

$$\therefore \quad \frac{\omega}{\sqrt{\frac{g}{R}}} = \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{R}}}\sqrt{1 - \frac{g^2}{R^2\Omega^4}} \qquad \cdots\cdots③$$

となる。さらに，$x = \dfrac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{R}}}$，$y = \dfrac{\omega}{\sqrt{\frac{g}{R}}}$ とおくと，③は

$$y = x\sqrt{1 - \frac{1}{x^4}}$$

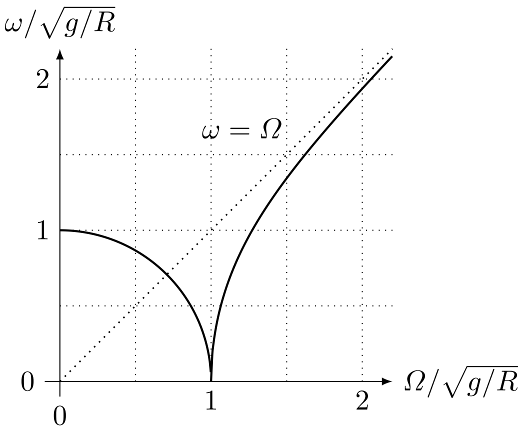
となる。$\Omega \to \infty$，つまり $x \to \infty$ のとき，$\dfrac{1}{x^4} \to 0$ ゆえ，$y = x$，つまり $\dfrac{\omega}{\sqrt{\frac{g}{R}}} = \dfrac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{R}}}$ に近づく。

よって，漸近線が

$$\frac{\omega}{\sqrt{\frac{g}{R}}} = \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{R}}} \ (\therefore \omega = \Omega)$$

であることがわかった。

以上より，図にすると，右のようになる。



（注）

グラフをかく際にわざわざ軸を $\dfrac{\Omega}{\sqrt{\dfrac{g}{R}}}$ や $\dfrac{\omega}{\sqrt{\dfrac{g}{R}}}$ と指定しているのは，無次元にしてグラフをかきやすくするためのテクニックであり，覚えておくとよい。

（注）

グラフより，$\boxed{\text{く}}$ の答えは明らかに $\sqrt{\dfrac{g}{R}}\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{\dfrac{g}{2R}}$ であることが実はわかる。

問 2

座標 (X, Y) について，$\phi = a\cos\omega t$ より，

$$X = R\phi\cos\Omega t$$

$$= R\cos\Omega t \cdot a\cos\omega t$$

$$Y = R\phi\sin\Omega t$$

$$= R\cos\Omega t \cdot a\sin\omega t$$

ここで，$\omega = \Omega$ より，

$$X = aR\cos^2\Omega t$$

$$= \frac{1}{2}aR\,(1 + \cos 2\Omega t)$$

$$Y = aR\cos\Omega t\sin\Omega t$$

$$= \frac{1}{2}aR\sin 2\Omega t$$

よって，以上より，

$$\sin 2\Omega t = \frac{Y}{\dfrac{aR}{2}}$$

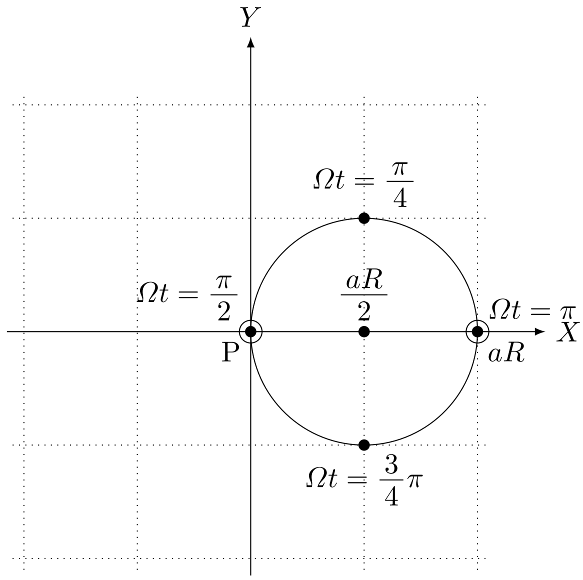
$$\cos 2\Omega t = \frac{X - \dfrac{aR}{2}}{\dfrac{aR}{2}}$$

以上の 2 式を $\cos^2 2\Omega t + \sin^2 2\Omega t = 1$ に代入すると，

$$\left(\frac{X - \dfrac{aR}{2}}{\dfrac{aR}{2}}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\dfrac{aR}{2}}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \quad \left(X - \frac{aR}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{aR}{2}\right)^2$$

これを，必要な点を打ちつつ図にすると，下のようになる。形は円である。



（ 大泉雄司，森本亮太，山崎裕太郎，岡田和也 ）

2015 年度 京都大学 前期 物理

問題 II　回転するコイルによる変化する磁場

出題範囲	電磁誘導
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	回転する磁場発生装置を用いた電磁誘導の問題。装置は複雑に見えるが，問 1 以降は，磁場発生装置はグラフさえ把握すればさほど気にする必要がない。後半も典型的なエネルギー保存の問題。最後の計算も，一度に計算せず，分母分子で約分して計算しやすくすれば，時間を短縮しミスも防ぐことができる。

解答

問 1 $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

問 2 (a) $\pi b^2 B_1$　(b) $-\pi b^2 B_1$

問 3 解説中に記載

問 4 $\dfrac{12\omega {\varPhi_+}^2}{\pi R}$

問 5 $\dfrac{1}{2}Ml^2\omega^2$

問 6 $Ml^2\omega\Delta\omega$

問 7 $\dfrac{12{\varPhi_+}^2}{\pi MRl^2}$

問 8 $1\times10^{-4}\ \mathrm{rad/s}$

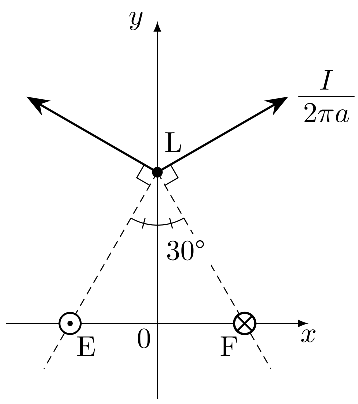
解説

問 1

右ねじの法則より，$\theta=0$ のとき点 L に発生する磁場の向きは右図のようになる。また，その大きさ H は $H=\dfrac{I}{2\pi a}$ である。したがって真空の透磁率 μ_0 より，点 L における磁束密度の y 成分 B_0 は，

$$\boldsymbol{B_0}=\mu_0\frac{I}{2\pi a}\cos 60^\circ\times 2=\boldsymbol{\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

である。



問 2

磁束の定義より，$\Phi = \pi b^2 B_y(\theta)$ が成立する。よって，図 2 のグラフから，

(a) $\boldsymbol{\Phi_+ = \pi b^2 B_1}$

(b) $\boldsymbol{\Phi_- = -\pi b^2 B_1}$

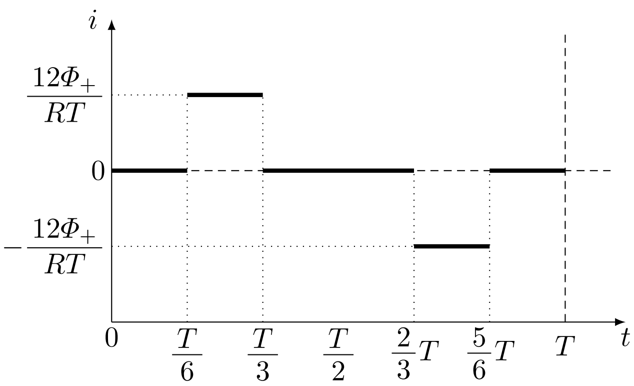
問 3

図 1 で i の向きに電流を流す方向を起電力の正の向きにとると，レンツの法則より $V = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ に従う起電力が生じ，$i = \dfrac{V}{R}$ が成立する。よって図 2 のグラフより，各時間にその時間の θ に対応した電圧および電流は次のようになる。

t	θ	V	i
$0 < t < \dfrac{T}{6}$	$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$	0	0
$\dfrac{T}{6} < t < \dfrac{T}{3}$	$\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{2}{3}\pi$	$-\dfrac{\Phi_- - \Phi_+}{\dfrac{T}{3} - \dfrac{T}{6}} = \dfrac{12\Phi_+}{T}$	$\dfrac{12\Phi_+}{RT}$
$\dfrac{T}{3} < t < \dfrac{2}{3}T$	$\dfrac{2}{3}\pi < \theta < \dfrac{4}{3}\pi$	0	0
$\dfrac{2}{3}T < t < \dfrac{5}{6}T$	$\dfrac{4}{3}\pi < \theta < \dfrac{5}{3}\pi$	$-\dfrac{\Phi_+ - \Phi_-}{\dfrac{5}{6}T - \dfrac{2}{3}T} = -\dfrac{12\Phi_+}{T}$	$-\dfrac{12\Phi_+}{RT}$
$\dfrac{5}{6}T < t < T$	$\dfrac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$	0	0

ただし，$t = \dfrac{T}{6}, \dfrac{T}{3}, \dfrac{2}{3}T, \dfrac{5}{6}T, T$ のときは簡略化した $B_y(\theta)$ のグラフが折れ曲がっており，$\dfrac{d\Phi}{dt}$ が定義できないので除外した。

以上より，求めるグラフは下のようになる。



（別解）

i の大きさを ω を用いて表すと，

$$\pm\frac{12\Phi_+}{R\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}}=\pm\frac{6\Phi_+\omega}{\pi R}$$

となる。こちらを軸に書き込んでもよい。

問 4

発熱量は回路の消費電力に電流が流れた時間をかけたものに等しい。半周期 $\dfrac{T}{2}$ の間に短形コイルに電流が流れているのは，問 3 のグラフより $\dfrac{T}{6}<t<\dfrac{T}{3}$ の間であるから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta W}&=Ri^2\cdot\frac{T}{6}\\&=R\cdot\left(\frac{12\Phi_+}{R\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3\omega}\\&\boldsymbol{=\frac{12\omega{\Phi_+}^2}{\pi R}}\end{aligned}$$

問 5

はずみ車の質量はリング部分に集中しているので，質量 M の物体が速さ $l\omega$ で運動していると考えることができる。よって，リングの運動エネルギー K は，

$$\boldsymbol{K=\frac{1}{2}Ml^2\omega^2}$$

（別解）

これはある種の剛体の運動エネルギーとみなすことができる。より正しく運動エネルギーを求めるには，リングを微小分割してから足し合わせる（積分する）必要がある。

リングの一部を切り取る微小角 $\Delta\theta$ を考える。この角によって仕切られるリングの長さは $l\Delta\theta$ で，質量は $\dfrac{\Delta\theta}{2\pi}M$，この微小部分の運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta\theta}{2\pi}M(l\omega)^2$ である。したがって全体の運動エネルギーは，これ

を積分で足し合わせて，

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}M(l\omega)^2\ d\theta \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}M(l\omega)^2 \cdot 2\pi \\ &= \frac{1}{2}Ml^2\omega^2 \end{aligned}$$

問 6

問 5 の K は ω の関数なので，$K = K(\omega)$ と表す。求める運動エネルギーの低下量は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta K} &= K(\omega) - K(\omega - \Delta\omega) \\ &= \frac{1}{2}Ml^2\{\omega^2 - (\omega - \Delta\omega)^2\} \\ &= \frac{1}{2}Ml^2\omega^2\left\{2\frac{\Delta\omega}{\omega} - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2\right\} \\ &\fallingdotseq \boldsymbol{Ml^2\omega\Delta\omega} \qquad \left(\because\ \frac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1 \text{ より } \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 \fallingdotseq 0\right) \end{aligned}$$

（別解）

微分によって解くこともできる。問 5 より，

$$\frac{dK}{d\omega} = Ml^2\omega$$

$$\therefore\quad dK = Ml^2\omega\ d\omega$$

したがって，

$$\Delta K = Ml^2\omega\Delta\omega$$

問 7

$\Delta K = \Delta W$ のとき，

$$Ml^2\omega\Delta\omega = \frac{12\omega{\Phi_+}^2}{\pi R}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\Delta\omega = \frac{12{\Phi_+}^2}{\pi MRl^2}}$$

問 8

具体的な値を

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Delta}\omega &= \frac{12{\mathit{\Phi}_+}^2}{\pi M R l^2} \\
&= \frac{12\left(\pi b^2 \dfrac{8}{7} B_0\right)^2}{\pi M R l^2} && \left(\because\ \mathit{\Phi}_+ = \pi b^2 B_1,\ B_1 = \frac{8}{7} B_0\right) \\
&= \frac{12\left(\pi b^2 \dfrac{8}{7} \cdot \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\right)^2}{\pi M R l^2} && \left(\because\ B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right) \\
&= \frac{12 \times 16}{49\pi} \cdot \frac{b^4 {\mu_0}^2 I^2}{a^2 M R l^2}
\end{aligned}
$$

に代入して，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathit{\Delta}\omega} &= \frac{12 \times 16 \times (0.03\,\mathrm{m})^4 \times (4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2})^2 \times (1000\,\mathrm{A})^2}{49\pi \times (0.2\,\mathrm{m})^2 \times 10\,\mathrm{kg} \times (1 \times 10^{-6}\,\Omega) \times (0.2\,\mathrm{m})^2} \\
&\fallingdotseq \mathbf{1 \times 10^{-4}\ rad/s}
\end{aligned}
$$

（大泉雄司，一丸友美，仲里佑利奈，山崎裕太郎）

2015 年度 京都大学 前期 物理

問題 III　原子の出す光と回折格子，およびドップラー効果

出 題 範 囲	ボーアの理論・回折格子・ドップラー効果・気体分子の運動
難 易 度	★★★☆☆
所 要 時 間	25 分
傾向と対策	この年は原子分野が追加された新課程の初年度であったが，京都大学では早速出題された。とはいえ，聞かれていることは教科書に記載されている基本事項ばかりなので正答したい。また，この設問に見られるように，原子分野は高校物理のすべての範囲と密接にかかわっているため，総合問題のようになりやすい。間違えたときは，ただ原子分野が苦手と結論づけるのではなく，どこの分野の理解が足りていなかったのか考え，その都度それぞれの分野に立ち返って復習しよう。この大問は，全体としては波動分野の色が強い。 (1)はボーアの理論における水素原子のエネルギー準位と放出される光子についての基本的な設問。ドブロイ波長の式を覚えていないと 1 問目からわからなくなってしまうが，エネルギー準位の式は与えられており，軌道半径の導出などもないため，きちんと取りきりたいところ。 (2)は一転して波動分野から回折格子の出題。キ，クは波動の知識さえあれば容易だろう。ケは(1)で求めた波長を代入するだけだが，計算が少々面倒なので，これを解ききってコにたどり着けるかがまず第一の壁だろう。続くコは，まず明線の式を求め，それをもとにグラフにして読み取る必要があり，記号問題とはいえここで最も差が付くだろう。 (3)はドップラー効果と気体分子の運動から，原子の出す光について考察するという見慣れない設問。しかし，1 つずつ見ていくと，サはドップラー効果の式そのまま，シは気体分子の運動の基本的な式しか使わない。スはサ，シの式さえわかれば簡単だろう。温度が高いほど分子の運動エネルギーが増すということさえわかっていれば，定性的に考えても解ける。セ，ソはここまでの設問を解けていれば難しくはないが，最後ということもあり，落ち着いて解く時間があるかどうかが得点の分かれ目だろう。

解答

ア	$\dfrac{h}{p}$	イ	$\dfrac{2\pi r}{\lambda_{\mathrm{e}}}$	ウ	$Rch\left(\dfrac{1}{{n_{\mathrm{L}}}^2}-\dfrac{1}{{n_{\mathrm{H}}}^2}\right)$
エ	$\dfrac{1}{R\left(\dfrac{1}{{n_{\mathrm{L}}}^2}-\dfrac{1}{{n_{\mathrm{H}}}^2}\right)}$	オ	6.5×10^{-7}	カ	8.2×10^{-7}
キ	$d\sin\theta$	ク	$\dfrac{d\Delta z}{L}$	ケ	2
コ	（あ）	サ	$\dfrac{c-v_x}{c}\lambda_0$	シ	$\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{m}$
ス	①	セ	$\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{mc^2}{\lambda_0}^2$	ソ	（う）

解説

(1)

電子の波の波長は，ドブロイ波長の式より，

$$\lambda_{\mathrm{e}} = \underbrace{\boldsymbol{\frac{h}{p}}}_{\text{ア}}$$

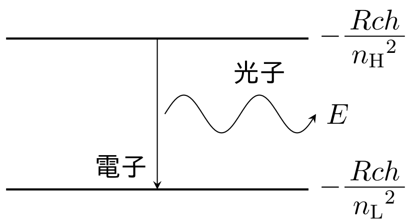
で表される。

この波長が円周上に正の整数個だけ入ればよいので，

$$2\pi r = n\lambda_{\mathrm{e}}$$

$$\therefore \quad \underbrace{\boldsymbol{\frac{2\pi r}{\lambda_{\mathrm{e}}}}}_{\text{イ}} = n$$

エネルギー準位の差が放出される光子のエネルギーに相当するので，



$$E = -\frac{Rch}{{n_{\mathrm{H}}}^2} - \left(-\frac{Rch}{{n_{\mathrm{L}}}^2}\right)$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{Rch\left(\frac{1}{{n_{\mathrm{L}}}^2} - \frac{1}{{n_{\mathrm{H}}}^2}\right)}}_{\text{ウ}}$$

また，光子のエネルギーは，波長を λ として，

$$E = \frac{ch}{\lambda}$$

と表されるので，

$$\lambda = \underbrace{\boldsymbol{\frac{1}{R\left(\frac{1}{{n_{\mathrm{L}}}^2} - \frac{1}{{n_{\mathrm{H}}}^2}\right)}}}_{\text{エ}}$$

$R = 1.1 \times 10^7$，$n_{\mathrm{L}} = 2$，$n_{\mathrm{H}} = 3$ を代入して，

$$\lambda = \frac{1}{1.1 \times 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)}$$

$$\fallingdotseq \underbrace{\boldsymbol{6.5 \times 10^{-7}}}_{\text{オ}}$$

波長が最小になるのは，$n_{\mathrm{H}} = \infty$ のときなので，これと $R = 1.1 \times 10^7$，$n_{\mathrm{L}} = 3$ を代入して，

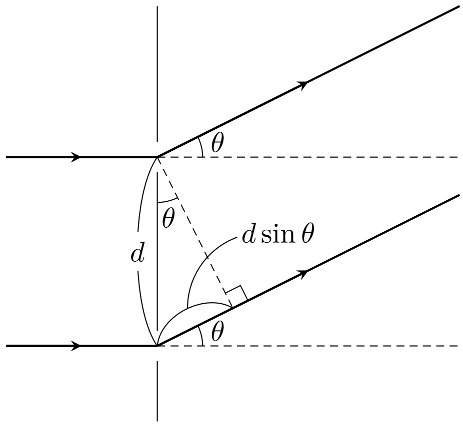
$$\lambda = \frac{1}{1.1 \times 10^7 \left(\frac{1}{3^2}\right)}$$

$$\fallingdotseq \underbrace{\boldsymbol{8.2 \times 10^{-7}}}_{\text{カ}}$$

(2)

光が強め合う条件は，回折格子の干渉条件より，

$$\underset{\text{キ}}{\underline{\boldsymbol{d\sin\theta}}} = \lambda k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$



スクリーン上の $\theta = 0$ の位置を原点とし，鉛直上向きを正として，明線の位置を z とおくと，

$$\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta$$

$$= \frac{z}{L}$$

のとき，

$$\frac{\lambda k}{d} = \frac{z}{L}$$

$$\therefore \quad z = \frac{\lambda L}{d} k$$

よって，明線の間隔 Δz は，

$$\Delta z = \frac{\lambda L}{d}$$

$$\therefore \quad \lambda = \underset{\text{ク}}{\boldsymbol{\frac{d\Delta z}{L}}}$$

$\boxed{\text{エ}}$ の式を条件に当てはめると，

$$4.5 \times 10^{-7} < \frac{1}{R\left(\dfrac{1}{{n_\mathrm{L}}^2} - \dfrac{1}{{n_\mathrm{H}}^2}\right)} < 7.0 \times 10^{-7}$$

$$\therefore \quad 0.129\cdots < \frac{1}{{n_\mathrm{L}}^2} - \frac{1}{{n_\mathrm{H}}^2} < 0.204\ldots$$

この不等式を満たす整数 n_L，n_H の組み合わせを考える。

・ n_L が 1 だとすると，n_H が 2 以上となるが，このとき $\dfrac{1}{{n_\mathrm{L}}^2} - \dfrac{1}{{n_\mathrm{H}}^2}$ は 0.75 以上となるので不適。

・ n_L が 3 以上だとすると，$\dfrac{1}{{n_\mathrm{L}}^2} - \dfrac{1}{{n_\mathrm{H}}^2}$ は $0.111\ldots$ 未満になり不適。

以上より，$n_\mathrm{L} = 2$ である。このときの n_H は，不等式より 3 と 4 のみが当てはまる。

よって，

$$(n_\mathrm{L}, n_\mathrm{H}) = (2, 3), (2, 4)$$

の $\underset{\text{ケ}}{\boldsymbol{2}}$ 通り。

このとき発せられる光の波長は，

・ $(n_\mathrm{L}, n_\mathrm{H}) = (2, 3)$ のときは，$\lambda = \dfrac{7.2}{R}$

・ $(n_\mathrm{L}, n_\mathrm{H}) = (2, 4)$ のときは，$\lambda = \dfrac{5.3}{R}$

であり，

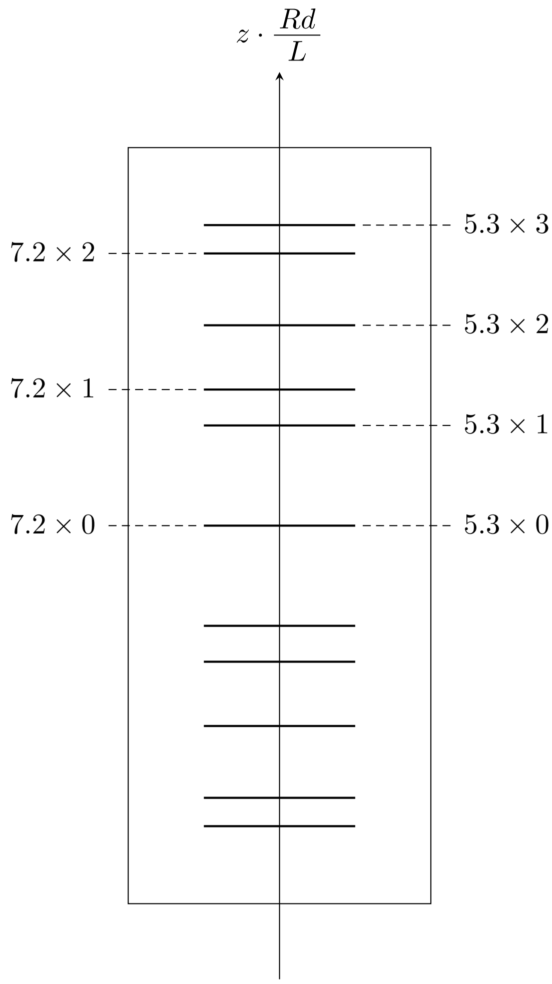
$$z = \frac{\lambda L}{d} k$$

に代入して，

$$z = \frac{7.2L}{Rd} k$$

$$z = \frac{5.3L}{Rd} k$$

L，R，d は定数なので，明線は右図のように現れる。これに最も近いのは，**(あ)**$_\text{コ}$ である。



(3)

x 方向の原子の速度について，ドップラー効果の式を用いると，

$$\lambda = \underbrace{\boldsymbol{\frac{c - v_x}{c}\lambda_0}}_{\text{サ}}$$

原子の運動エネルギーの平均値は，

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{3}{2} k_\mathrm{B} T$$

ただし，

$$\overline{v^2} = \overline{{v_x}^2} + \overline{{v_y}^2} + \overline{{v_z}^2}$$

ここで，単原子分子理想気体の運動はどの方向にも等しいと見なせることから，

$$\overline{{v_x}^2} = \overline{{v_y}^2} = \overline{{v_z}^2}$$

$$\therefore \quad \overline{v^2} = \overline{{v_x}^2} + \overline{{v_y}^2} + \overline{{v_z}^2}$$

$$= 3\overline{{v_x}^2}$$

よって，

$$\frac{3}{2}m\overline{v_x{}^2} = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$$

$$\therefore \quad \overline{v_x{}^2} = \underbrace{\boldsymbol{\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}}}_{\text{シ}}$$

この式からもわかるように，原子の速さは，温度が高いほど大きくなる。すると，$\boxed{\text{サ}}$ の式からドップラー効果の影響も大きくなることがわかる。よって，$\underbrace{①}_{\text{ス}}$ 。

$\boxed{\text{サ}}$ ，$\boxed{\text{シ}}$ より，

$$\begin{aligned}\overline{\Delta\lambda^2} &= \overline{(\lambda-\lambda_0)^2}\\ &= \overline{\left(\frac{c-v_x}{c}\lambda_0-\lambda_0\right)^2}\\ &= \overline{\left(\frac{v_x}{c}\lambda_0\right)^2}\\ &= \overline{v_x{}^2}\cdot\overline{\left(\frac{\lambda_0}{c}\right)^2}\\ &= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}\cdot\frac{\lambda_0{}^2}{c^2}\\ &= \underbrace{\boldsymbol{\frac{k_{\mathrm{B}}T}{mc^2}\lambda_0{}^2}}_{\text{セ}}\end{aligned}$$

温度を高くしたときの光の分布を考えると，原子の運動はどの方向にも等しいことから，速度の平均値，中央値はともに 0 となり，分布の中心は変わらず λ_0 である。また，温度を高くすると，ドップラー効果の影響が大きくなる，つまり λ の分散が大きくなるため，グラフは横に広がる。しかし，原子が出す光の頻度，すなわち光子の数は変わらないため，横に広がった分だけグラフのピーク部分は小さくなる。よって，これらを満たすグラフは，$\underbrace{\textbf{(う)}}_{\text{ソ}}$ である。

（大泉雄司，岡田和也，仲里佑利奈，山崎裕太郎）