2015 年度 京都大学 前期 数学

1　三角関数の回転図形の体積

出題範囲	三角関数・積分（数学Ⅲ）
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	2 曲線の共有点の x 座標を求めれば後は標準的な回転体の求積となる。京大受験生であれば是非とも完答したい。

解答

$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ の共有点の x 座標を求める。

$x+\dfrac{\pi}{8}=2x+2m\pi \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2},\ m \text{ は整数}\right)$ を満たす x, m の組合せは

$$x=\frac{\pi}{8},\ m=0$$

のみである。

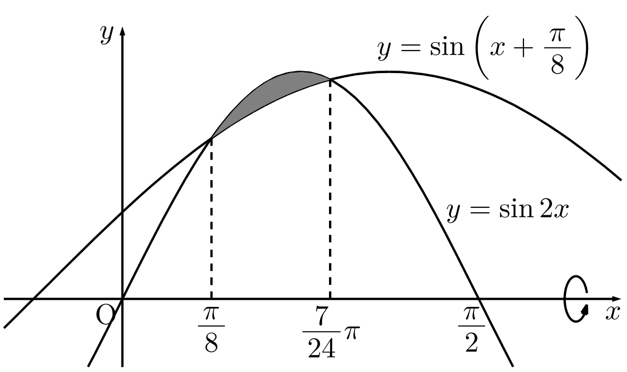
$x+\dfrac{\pi}{8}=\pi-2x+2m\pi \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2},\ m \text{ は整数}\right)$ を満たす x, m の組合せは

$$x=\frac{7}{24}\pi,\ m=0$$

のみである。

よって $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ の区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ における共有点の x 座標は，$x=\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{7}{24}\pi$ の 2 つである。

よって，グラフは次のようになる。



よって，求める立体の体積は

$$\pi\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{\sin^2 2x-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)}{2}\right\}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos 4x\right\}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}$$

$$=\frac{\pi}{16}$$

解説

まず，2 つの曲線の共有点を求めて，囲まれる領域を求める。はじめにグラフの概形をかいて，共有点の大体の位置を把握しておくとやりやすいかもしれない。

後半は，一般的な回転体の積分計算である。ミスのないように計算したい。

◆Check!!

三角関数の値

実数 x に対し，$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ に対し，$\sin x=\sin y$，$\cos x=\cos y$，$\tan x=\tan y$ となるような実数 y の値は，n，m を整数として

・$\sin x$ の場合

$$y=x+2n\pi,\ \pi-x+2m\pi$$

・$\cos x$ の場合

$$y=x+2n\pi,\ -x+2m\pi$$

・$\tan x$ の場合

$$y=x+n\pi$$

である。グラフや単位円を描いて確認してみるとわかりやすいだろう。

（青木徹，佐藤賢志郎）

2015 年度 京都大学 前期 数学

2 内接円をもつ四角形の面積の最小値

出題範囲	平面図形
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	円を固定して円に外接する四角形を動かし，四角形の面積が最小となる場合を考える問題。変数が少なくなり，計算がシンプルになるように変数の置き方に工夫が必要である。また，2 つの内角が 90° となる四角形の形状は解答にあるように 2 つあることに注意すること。

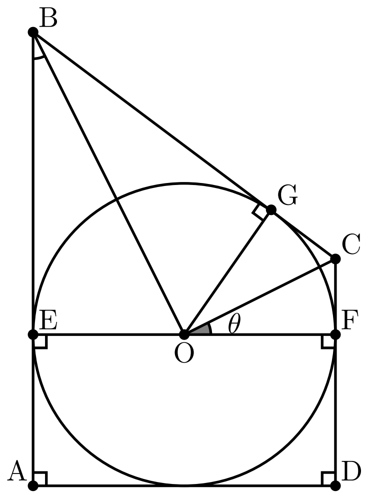
解答

四角形の 4 つの頂点のうち，2 つを 90° に固定する。このとき，次の 2 通りの四角形が存在する。

(i) 隣り合う頂点の内角が 90° のとき

(ii) 向かい合う頂点の内角が 90° のとき

(i) 下図のような内接円の中心 O，$\angle\mathrm{BAD} = 90^\circ, \angle\mathrm{ADC} = 90^\circ$ の四角形 ABCD を考える。対称性より $\mathrm{AB} \geqq \mathrm{CD}$ として考える。



点 O から辺 AB，CD に下した垂線の足をそれぞれ E とし，

$\angle\mathrm{COF} = \theta\,(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ とする。

このとき接線の条件より，$\angle\mathrm{CFO} = \angle\mathrm{CGO} = 90^\circ$ かつ $\mathrm{OF} = \mathrm{OG} = 1$ である。

よって

$$\triangle\mathrm{FOC} \equiv \triangle\mathrm{GOC}$$

同様に

$$\triangle\mathrm{EOB} \equiv \triangle\mathrm{GOB}$$

が成立する。

よって

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{COB} &= \angle\mathrm{GOC} + \angle\mathrm{GOB} \\ &= \frac{1}{2}(\angle\mathrm{FOC} + \angle\mathrm{GOC} + \angle\mathrm{GOB} + \angle\mathrm{EOB}) \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{EBO} &= \angle\mathrm{GBO} \\ &= 90^\circ - \angle\mathrm{GOB}\,(\angle\mathrm{BGO} = 90^\circ\text{より}) \\ &= \angle\mathrm{GOC}\,(\angle\mathrm{COB} = 90^\circ\text{より}) \\ &= \angle\mathrm{FOC} \\ &= \theta\end{aligned}$$

となる。

以上より，

$$(\text{四角形ABCD の面積}) = (\text{四角形 ADFE の面積}) + 2\,(\triangle\mathrm{FOC}\text{ の面積}) + 2(\triangle\mathrm{EBO}\text{ の面積})$$

である。

四角形 ADCE は長方形であるので

$$\mathrm{AD} = (\text{内接円の直径}) = 2$$

$$\mathrm{AE} = 1$$

よって，

$$(\text{長方形 ADFE の面積}) = 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

また，

$\mathrm{CF} = \tan\theta$，$\mathrm{BE} = \dfrac{1}{\tan\theta}$ なので，

$$(\triangle\mathrm{FOC}\ の面積) = \frac{\tan\theta}{2} \qquad \cdots\cdots\ ②$$

$$(\triangle\mathrm{EBO}\ の面積) = \frac{1}{2\tan\theta} \qquad \cdots\cdots\ ③$$

である。四角形 ABCD の面積は θ を変数とする関数であるので，これを $S(\theta)$ とおくと

$$S(\theta) = 2 + \frac{1}{2}\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)$$

である。

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$\tan\theta > 0$ なので，相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &\geqq 2\sqrt{\tan\theta \cdot \frac{1}{\tan\theta}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

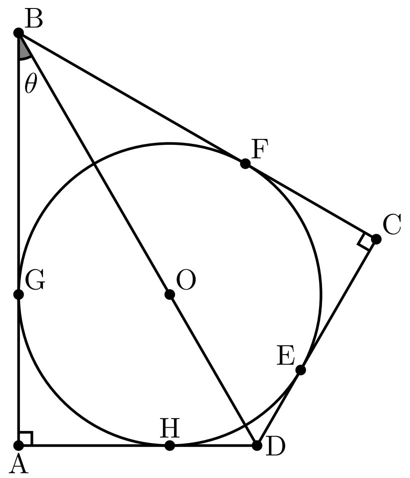
等号成立は，$\tan\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ のとき。

つまり，$\theta = 45^\circ$ で $S(\theta)$ は最小値

$$S\left(45^\circ\right) = 4$$

をとる。よって，このときの四角形 ABCD の面積の最小値は 4

(ii) 下図のような内接円の中心 O，$\angle\mathrm{BAD} = 90^\circ, \angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$ の四角形 ABCD を考える。



$\angle\mathrm{ABD} = \theta\,(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ とおき，内接円と四角形 ABCD との接点を図のように E，F，G，H とする。

$\triangle\mathrm{BGO}$ と $\triangle\mathrm{BFO}$ において，$\angle\mathrm{BGO} = \angle\mathrm{BFO} = 90^\circ$ かつ，$\mathrm{GO} = \mathrm{FO} = 1$ より，直角三角形の斜辺と他の一辺が等しいので

$$\triangle\mathrm{BGO} \equiv \triangle\mathrm{BFO}$$

である。よって，

$$\angle\mathrm{GBO} = \angle\mathrm{FBO} = \theta \quad \text{すなわち} \quad \angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{CBD} = \theta \qquad \cdots\cdots ④$$

$\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{CBD}$ は，$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$ かつ ④ より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角が等しいので，

$$\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{CBD}$$

よって

$$(\text{四角形 ABCD の面積}) = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{CBD} = 2\triangle\mathrm{ABD} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$\triangle\mathrm{GBO}$ に注目して，$\angle\mathrm{BGO} = 90^\circ$ より

$$\mathrm{BG} = \frac{\mathrm{OG}}{\tan\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AG} + \mathrm{BG} = 1 + \frac{1}{\tan\theta}$$

$\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{GBO}$ であるので

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABD} &= \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BG}}\right)^2 \triangle\mathrm{GBO} \\ &= \frac{1}{2}(\tan\theta + 1)^2 \cdot \frac{1}{\tan\theta} \\ &= \frac{1}{2}\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} + 2\right)\end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$\tan\theta > 0$ なので，相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &\geqq 2\sqrt{\tan\theta \cdot \frac{1}{\tan\theta}} \\ &= 2\end{aligned}$$

等号成立は，$\tan\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ のとき。つまり，$\theta = 45^\circ$ のとき。
よって，$\triangle\mathrm{ABD} \geqq 2$ であり，⑤ とあわせて

$$(\text{四角形 ABCD の面積}) \geqq 2 \cdot 2 = 4$$

なので，このときの四角形 ABCD の面積の最小値は 4

(i)(ii) より，四角形 ABCD の面積の最小値は 4

解説

最大値，最小値に関する問題に取り組む際，適切な変数を自分で設定し (本問では θ)，問題の目的である，変化する数量 (本問では四角形の面積) を，その設定した変数で表すことを考える。ここで重要なのは，変数を設定するときに，変化する数量がより簡単に表せるように設定することである。

また，問題文を読んだ際，対称的な構造をもつ正方形が最も面積が小さくなりそうだな，という予想を立てることができれば，答えが出た際，実際に正方形となっており一安心できる。このように予想する見方も養っておきたい。

（侯明程，大久保佳徳，河合敬宏）

2015 年度 京都大学 前期 数学

3 接点に関する数列の極限

出題範囲	微分 (数学III) ／数列の極限
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	(1) は t について解こうとせず，変数分離してグラフの形を考える。(2) はまず $a_{n+1}-a_n$ の形にもっていき，次に $\lim_{n\to\infty} a_n$ について考える。

解答

(1)【証明】$y=e^x+1$ 上の点 (t, e^t+1)(t は実数) における接線の方程式は

$$y-(e^t+1)=e^t(x-t)$$

点 $(a,0)$ はこの直線上にあるので

$$0-(e^t+1)=e^t(a-t)$$

$e^t \neq 0$ であるので

$$a=t-1-e^{-t} \qquad \cdots\cdots\cdot \text{①}$$

$y=e^x+1$ の接線とその接点は 1 対 1 に対応するので以下の関係が成り立つ。

$(a,0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただひとつ存在する。

$\Leftrightarrow$ ① を満たす実数 t がただ 1 つ存在する。

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} s=a \\ s=t-1-e^{-t} \end{cases}$ が ts 平面上でただ 1 つの共有点をもつ。[1]

[1] 直線と曲線の共有点の個数を調べる問題に落とし込む。

$f(t)=t-1-e^{-t}$ とおく。

$f'(t)=1+e^{-t}>0$ より，$f(t)$ は単調増加する。

$$\lim_{t\to-\infty} f(t)=-\infty,\quad \lim_{t\to\infty} f(t)=\infty$$

$f(t)$ は単調増加で，その値域は実数全体であることより

$$\begin{cases} s = a \\ s = t - 1 - e^{-t} \end{cases}$$ は ts 平面上で 1 点のみで交わる。

よって方程式 ① を満たす実数 t がただ 1 つ存在する。　(証明終)

(2) (1) の方程式において，問題文の条件から $a = a_n$ とおいたとき $t = a_{n+1}$ なので，

$$a_n = a_{n+1} - 1 - e^{-a_{n+1}} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = 1 + e^{-a_{n+1}}$$

ここで，$e^{-a_{n+1}} > 0$ より，

$$a_{n+1} - a_n = 1 + e^{-a_{n+1}} > 1$$

$\{b_n\}$ が $b_1 = a_1, b_{n+1} - b_n = 1$ を満たすとき，$b_n = b_1 + (n-1)$ となるので[2]

$$a_n > a_1 + (n-1) = n$$

である。ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty}(1 + e^{-a_{n+1}}) = 1$$

[2] $b_{n+1} - b_n = 1$，$b_1 = a_1$ となるような数列を考えることにより，$a_n > b_n = b_1 + (n-1) = a_1 + (n-1)$ が示せる。

解説

(1) 接線の方程式を作り，直線上の点の座標の値を代入するまでは定石どおり。

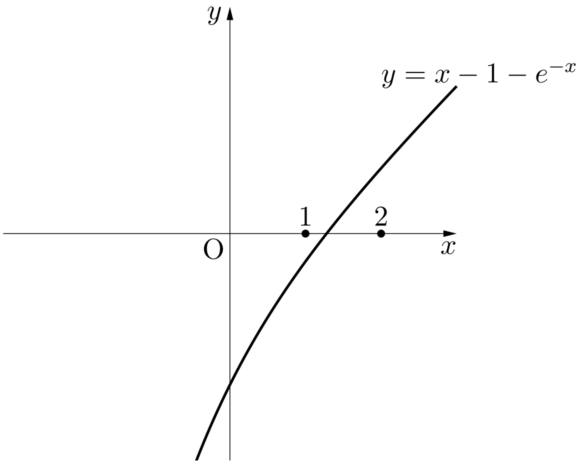
① で，t について解こうとしても解けないので諦めて変数分離をする。この際，変数分離を行わずに，

$$f(t) = e^t(a + 1 - t) + 1$$

とおいてこのグラフの形状を考えて解くこともできるがやや計算が複雑になる。

(2) $a_{n+1} - a_n > 1$ に気づけるかどうかがすべて。実際に接線をかいて，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ となることを予想しておくと気づきやすい。

参考に $y = x - 1 - e^{-x}$ のグラフを載せておく。



◆ **Check!!**

変数分離法

2 変数関数 $g(t, a)$ があり，$g(t, a) = 0$ の t について，実数解の個数を調べるときは

$$g(t, a) = 0 \Leftrightarrow a = h(t)$$

のように a について解くと右辺の変数が t だけになり，方程式の解の個数をグラフの共有点の個数とみなす際にわかりやすくなる。

（大久保佳徳，不死原大知）

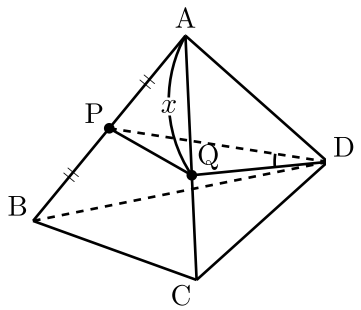
2015 年度 京都大学 前期 数学

4 正四面体内の動点

出題範囲	空間図形／微分 (数学Ⅲ)
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	素直な方針で解決できる問題である。$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ について考えるにあたりまず余弦定理を連想し，必要な辺の長さを変数 (ここでは x) でおいて式を立て，微分する。京大受験生なら思いつくのもそう難しくないであろう。あとは単なる計算問題だが，本番は何が起こるかわからない。15 分できっちり解ければ上出来であろう。このような計算力勝負の問題は絶対に落とさないように計算ミスを防ぎたい。そのためには計算を工夫すると良い。工夫点は解説に記したので読んでほしい。

解答

$\mathrm{AQ}=x$ とおく。$(0 \leqq x \leqq 1)$



余弦定理より

$$\mathrm{PQ}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 60^\circ$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{QD}^2 = 1^2 + x^2 - 2\cdot 1\cdot x\cdot\cos 60^\circ$$

$$= x^2 - x + 1$$

である。また，

$$\mathrm{DP} = 1\cdot\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。したがって，$\triangle \mathrm{PDQ}$ における余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{PDQ} &= \frac{\mathrm{QD}^2+\mathrm{DP}^2-\mathrm{PQ}^2}{2\cdot\mathrm{QD}\cdot\mathrm{DP}}\\ &= \frac{\frac{3}{2}-\frac{x}{2}}{\sqrt{3}\cdot\mathrm{QD}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3-x}{\sqrt{x^2-x+1}}\end{aligned}$$

この式は $0 \leqq x \leqq 1$ で正であるから，2 乗した式と大小が一致する。したがって，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の大小を調べるにあたって，$\cos^2\angle\mathrm{PDQ}$ の大小を調べて差し支えない[1]。

$$\begin{aligned}\cos^2\angle\mathrm{PDQ} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3-x}{\mathrm{QD}}\right)^2\\ &= \frac{1}{12}\cdot\frac{(3-x)^2}{\mathrm{QD}^2}\\ &= \frac{1}{12}\cdot\frac{x^2-6x+9}{x^2-x+1}\\ &= \frac{1}{12}f(x)\text{[2]}\end{aligned}$$

とおく。すなわち

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2-6x+9}{x^2-x+1}\\ &= 1+\frac{-5x+8}{x^2-x+1}\text{[3]}\end{aligned}$$

である。$f(x)$ を微分して

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-5(x^2-x+1)-(-5x+8)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}\\ &= \frac{5x^2-16x+3}{(x^2-x+1)^2}\\ &= \frac{(5x-1)(x-3)}{(x^2-x+1)^2}\end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

[1] $\mathrm{QD}=\sqrt{x^2-x+1}$ であるから，そのままだと微分しづらい。2 乗して微分をしやすくしよう。2 乗して大小を調べても問題がないかのチェックを忘れずに。

[2] 係数 $\frac{1}{12}$ を外に出してしまうことで，微分すべき式がすっきりする。小さな配慮だが，計算ミスを防ぐ上では意外と大切である。

[3] 分子の次数を下げることで微分が少し楽になる。

増減表より，$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値は，$x = \dfrac{1}{5}$ のときで，

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = 1 + \frac{-5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + 8}{\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right) + 1} = 1 + \frac{7}{\frac{21}{25}} = \frac{28}{3}$$

よって，$\cos \angle \mathrm{PDQ}$ の最大値は[4]

$$\sqrt{\frac{1}{12} f\left(\frac{1}{5}\right)} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{28}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

[4] ここで，[2] で外に出した係数を掛け忘れたとしても，$\cos \angle \mathrm{PDQ} > 1$ となってしまうので「おかしい」と気づきやすい。

解説

このような計算力重視の問題では，計算ミスを防ぐような工夫をするとよい。今回の解答でいえば，まず $\cos \angle \mathrm{PDQ}$ の大小でなく $\cos^2 \angle \mathrm{PDQ}$ の大小を考えたところが 1 つ目のポイントである。$\cos \angle \mathrm{PDQ}$ の式には辺 QD の長さが含まれており，これは根号入りの式である。後々微分することを考えると，2 乗して根号を外してしまった方が計算がやりやすくなる。なお，途中計算は省略するが，$\cos \angle \mathrm{PDQ}$ を 2 乗せずに微分すると，次のようになる。

$$\frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{-5x + 1}{(x^2 - x + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

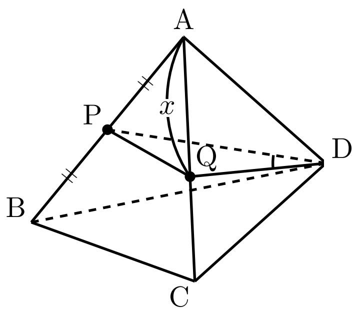
2 つ目のポイントは，$f(x)$ を設定するときに余計な係数を外に出しておくこと。3 つ目のポイントは，微分を行う前に分子の次数を小さくすることである。2 つ目と 3 つ目の工夫も，計算が煩雑になることを防いでくれる。
計算を工夫してわかりやすく書くメリットは計算ミスを防ぐことだけではない。計算の過程で万が一式がおかしくなって計算ミスを犯した場合でも，ミスを発見しやすくなるのだ。前に戻って計算過程をたどる際，見やすい式の方がミスを発見しやすいことは明らかである。計算力勝負の問題を落とさないようにするためにも，日頃から計算式をわかりやすく工夫したり，丁寧な計算を怠らないようにしたりすることはとても重要なのである。
ところで，正四面体の問題ではベクトルが有効であることが多い。その理由は後で述べることにして，とりあえずベクトルを用いた別解を見てみよう。

別解

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とおくと

$$\begin{cases} \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = \left|\vec{d}\right| = 1 & \cdots\cdots ① \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

となる。$\mathrm{AQ} = x\ (0 \leqq x \leqq 1)$ とおくと，$\mathrm{QC} = 1 - x$ であり



$$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{d}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DQ}} &= x\overrightarrow{\mathrm{DC}} + (1-x)\overrightarrow{\mathrm{DA}} \\ &= x\left(\vec{c} - \vec{d}\right) + (1-x)\left(-\vec{d}\right) \\ &= x\vec{c} - \vec{d}\end{aligned}$$

したがって，①，② を利用して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DQ}} &= \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{d}\right) \cdot \left(x\vec{c} - \vec{d}\right) \\ &= \frac{1}{2}x\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{d} - x\vec{d} \cdot \vec{c} + \left|\vec{d}\right|^2 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{d}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{d} + \left|\vec{d}\right|^2 \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right|^2 &= \left|x\vec{c} - \vec{d}\right|^2 \\ &= x^2\left|\vec{c}\right|^2 - 2x\vec{c} \cdot \vec{d} + \left|\vec{d}\right|^2 \\ &= x^2 - x + 1\end{aligned}$$

である。以上より

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{PDQ} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{DP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right|} \\ &= \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right|} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3-x}{\left|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right|}\end{aligned}$$

以下，解答と同様。

別解解説

ベクトルを用いる利点は，「互いに平行でもなく，$\vec{0}$ でもない 3 つのベクトルを基準とし，その内積と絶対値を求め，それらのベクトルを用いて角度や辺の長さを求める」という解答の流れが定まっており，迷いが少ないという点である。加えて本問の場合，正四面体という特殊な立体を相手にしているため，初めの 3 つのベクトルの内積と絶対値の計算が非常に容易で，以降の計算もかなり楽になる。「正四面体が出てきたらベクトルを使うと楽かも」ということは記憶しておいて損はないだろう。

（神藤駿介，松岡駿）

2015 年度 京都大学 前期 数学

5 多項式の割り算

出題範囲	式と証明
難易度	★★★★☆
所要時間	20 分
傾向と対策	$f(x)$ を $g(x)$ と，商 $px+q$，余り ϵ で表現して，それを $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の形とするまでは自然に出来るだろう。ここから，どのように $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ が整数であるという条件を使うかがポイントとなる。p, q が整数でない可能性があることを考えつつ，これらを消去する方法を考えたい。

解答

$f(x) = (px+q)g(x) + \epsilon$ とおく。(p，q，ϵ は実数定数)

すると，$\dfrac{f(x)}{g(x)} = px + q + \dfrac{\epsilon}{g(x)}$ である。

ここで，$x = n+1, x = n$ を代入した式を辺々引き算すると

$$\begin{aligned}\frac{f(n+1)}{g(n+1)} - \frac{f(n)}{g(n)} &= p + \epsilon\left\{\frac{1}{g(n+1)} - \frac{1}{g(n)}\right\}\\ &= p - \frac{d\epsilon}{\{d(n+1)+e\}(dn+e)} \qquad \cdots\cdots\ (*)\\ &= (\text{整数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left\{\frac{f(n+2)}{g(n+2)} - \frac{f(n+1)}{g(n+1)}\right\} - \left\{\frac{f(n+1)}{g(n+1)} - \frac{f(n)}{g(n)}\right\}\\ &= -\frac{d\epsilon}{\{d(n+2)+e\}\{d(n+1)+e\}} + \frac{d\epsilon}{\{d(n+1)+e\}(dn+e)}\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}&\frac{f(n+2)}{g(n+2)} - 2\frac{f(n+1)}{g(n+1)} + \frac{f(n)}{g(n)}\\ &= \frac{2d^2\epsilon}{\{d(n+2)+e\}\{d(n+1)+e\}(dn+e)}\\ &= (\text{整数})\end{aligned}$$

十分大きな n に対して

$$\left|\frac{2d^2\epsilon}{\{d(n+2)+e\}\{d(n+1)+e\}(dn+e)}\right| < 1$$

が成り立つことを考えれば，これが任意の正の整数 n で整数となるための ϵ の条件は $\epsilon = 0$ のみである。[1]

以上より $f(x) = (px+q)g(x)$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。

[1] n が非常に大きいときを考えることで，$\dfrac{f(n+2)}{g(n+2)} - 2\dfrac{f(n+1)}{g(n+1)} + \dfrac{f(n)}{g(n)}$ が取りうる整数が 0 しか無いとわかる。

解説

示すべきことは $\epsilon = 0$ である。

しかし $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ の式では p, q が整数かどうかがわからない。よってこれらの数を，数列 $\left\{\dfrac{f(n)}{g(n)}\right\}$ の階差数列や，その階差数列の階差数列を考えることで消去していく。

$\dfrac{2d^2\epsilon}{\{d(n+2)+e\}\{d(n+1)+e\}(dn+e)}$ が整数であるという条件が得られれば，あとはこれの n が無限大での極限が 0 であることを考えて論述しよう。ここで，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2d^2\epsilon}{\{d(n+2)+e\}\{d(n+1)+e\}(dn+e)} = 0 \Rightarrow \epsilon = 0$$

は一般には成立しないから，あくまでも極限をとるのではなく「十分大きな n」に対して (分子) $<$ (分母) が成立することに注目して，解答を書かなければならないことに注意が必要である。

別解

$(*)$ までは同様。

ここで，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d\epsilon}{\{d(n+1)+e\}(dn+e)} = 0 \qquad \cdots\cdots\ ①$$

より，

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{f(n+1)}{g(n+1)} - \frac{f(n)}{g(n)}\right\} = p$$

である。この p が整数となることを示す。

p が整数でないと仮定する。すると，ある正の実数 δ で，

$p - \delta < x < p + \delta$ の範囲に整数を含まないようなものが存在する。[2]

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{f(n+1)}{g(n+1)} - \frac{f(n)}{g(n)}\right\} = p$ より，十分大きな n に対して，

$$p - \delta < \frac{f(n+1)}{g(n+1)} - \frac{f(n)}{g(n)} < p + \delta$$

が成立するが，これは $\dfrac{f(n+1)}{g(n+1)} - \dfrac{f(n)}{g(n)}$ が整数であることに矛盾する。

よって p は整数であるとわかる。

[2] 逆に p が整数のときは，どのような δ をとってもこの区間に整数として p が含まれる。

また，① より $\left|\dfrac{d\epsilon}{\{d(n+1)+e\}(dn+e)}\right| < 1$ となるような正の整数 n が存在する。

このような n を取ったとき

$$\frac{f(n+1)}{g(n+1)} - \frac{f(n)}{g(n)} = (\text{整数})+(\text{絶対値が 1 未満の数})$$

となる。

これが整数になるには $\dfrac{d\epsilon}{\{d(n+1)+e\}(dn+e)} = 0$ 以外ありえない。d は正の数なので $\epsilon = 0$ である。[3]

以上より $f(x) = (px+q)g(x)$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。

[3] 任意の n で成立するので，十分大きな n をとることを考える。

別解解説

解答との違いは階差数列を 1 回しかとっていないことである。

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f(n+1)}{g(n+1)} - \frac{f(n)}{g(n)}\right\} = p$$

について，全ての項が整数である収束する数列の極限が整数であることは，直感にも反さず，確かに成り立つが，このことは高校数学の範囲で述べられていないので，証明すべきである。

一般に，収束する数列の全ての項がある集合 K に属するとき，その極限が K に含まれるわけではない。例えば，次のような有理数の数列 $\{p_n\}$ を考える。

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = 1.4$$

$$p_3 = 1.41$$

$$p_4 = 1.414$$

$$p_5 = 1.4142$$

$$\vdots$$

$$p_n = (\sqrt{2}\text{の小数第 } n-1 \text{ 位までの値})$$

$$\vdots$$

これの極限は明らかに $\sqrt{2}$ である。つまり，収束する有理数の数列で，その極限が有理数でないものが存在する。

（青木徹，松下祐樹，松岡駿）

2015 年度 京都大学 前期 数学

6 数学的帰納法

出題範囲	場合の数と確率
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	難関大学の確率の問題を考える際は，実験すると見通しが立つことが多い。実験によって一般式が思いついても、まずはそれを証明してから使うべきである。また，解答を書く際は実験の過程は省き証明から開始したが、時間がなくて問題を解けなくても、実験とそこから得られる類推を解答用紙に書いておけば部分点をもらえる可能性もあるので、最初にそれらを書いておいてもよいだろう。

解答

x_n は，$\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{3}{2^{n+1}}, \dfrac{5}{2^{n+1}}, \cdots, \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$ のいずれかであり，それぞれの数になる確率は $\dfrac{1}{2^n}$ であることを以下で証明する。

【証明】数学的帰納法により示す。

(i) $n=0$ のとき

$x_0 = \dfrac{1}{2}$ となるので正しい。

(ii) $n=k$ のとき，この仮定が成り立つとする。

このとき $0 < x_k < 1$ であるから，x_k を $f_0(x)$ に代入するとき

$$x_{k+1} = f_0(x_k) < \frac{1}{2}$$

x_k を $f_1(x)$ に代入するとき

$$x_{k+1} = f_1(x_k) > \frac{1}{2}$$

となるので，x_k の値は $k+1$ 回目で 2 通りに等確率で変化する。

また，x_k の値が異なるとき，$x_k = \dfrac{l}{2^{k+1}}$，$\dfrac{m}{2^{k+1}}$

$(1 \leqq l \leqq 2^{n+1}-1,\ 1 \leqq m \leqq 2^{n+1}-1,\ l \neq m$ で l, m はともに奇数$)$ とおく。上記の考察により，$f_0(x)$ および $f_1(x)$ の $\dfrac{1}{2}$ との大小から，

$$f_0\left(\frac{l}{2^{k+1}}\right) \neq f_1\left(\frac{m}{2^{k+1}}\right),\ f_1\left(\frac{l}{2^{k+1}}\right) \neq f_0\left(\frac{m}{2^{k+1}}\right)$$

が成立する。またこのとき，

$$f_0\left(\frac{l}{2^{k+1}}\right) \neq f_0\left(\frac{m}{2^{k+1}}\right),\ f_1\left(\frac{l}{2^{k+1}}\right) \neq f_1\left(\frac{m}{2^{k+1}}\right)$$

は明らかに成立する。したがって，x_{k+1} の値はすべて異なり，x_k は 2^k 通りであるから x_{k+1} は 2^{k+1} 通り。さらに，

$$f_0\left(\frac{l}{2^{k+1}}\right) = \frac{l}{2^{k+2}},\ f_1\left(\frac{l}{2^{k+1}}\right) = \frac{l+2^{k+1}}{2^{k+2}}$$

であることから x_{k+1} はすべて $x_{k+1} = \dfrac{l'}{2^{k+2}}$ $(1 \leqq l' \leqq 2^{k+2}-1,\ l'$は奇数$)$ の形で表される。

したがって，x_{k+1} は，$\dfrac{1}{2^{k+2}}, \dfrac{3}{2^{k+2}}, \dfrac{5}{2^{k+2}}, \cdots, \dfrac{2^{k+2}-1}{2^{k+2}}$ のいずれかであり，それぞれの数になる確率は $\dfrac{1}{2^{k+1}}$ である。

以上より示された。 (証明終)

次に，x_n と $\dfrac{2}{3}$ との大小を考える。l を $1 \leqq l \leqq 2^{k+1}-1$ を満たす奇数として，

$$x_n = \frac{l}{2^{n+1}} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow l < \frac{1}{3}\cdot 2^{n+2}$$

を満たす l の個数を考える。

t を自然数とすると，$2^{2t} \equiv 4^t \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$，$2^{2t+1} \equiv 2\cdot 2^t \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ であるので，2^{n+2} より小さく 3 の倍数である最大の奇数は，

n が偶数のときは $2^{n+2}-1$，n が奇数のときは $2^{n+2}-5$[1]である。

ゆえに，$x_n < \dfrac{2}{3}$ を満たす l の個数は，

n が偶数のときは $l = 1, 3, 5, \cdots, \dfrac{1}{3}\left(2^{n+2}-1\right)$ の $\dfrac{\frac{1}{3}(2^{n+2}-1)+1}{2}$ 個，

n が奇数のときは $l = 1, 3, 5, \cdots, \dfrac{1}{3}\left(2^{n+2}-5\right)$ の $\dfrac{\frac{1}{3}(2^{n+2}-5)+1}{2}$ 個である。

x_n は各々の値を等確率でとるので，求める確率は，[2]

$$\begin{cases} \dfrac{2^{n+1}-1}{3\cdot 2^n} (n\text{ が奇数の時}) \\ \dfrac{2^{n+1}+1}{3\cdot 2^n} (n\text{ が偶数の時}) \end{cases}$$

[1] 最大の奇数を調べているので，$2^{n+2}-2$ ではないことに注意する。

[2] 解答は，場合分けをせずに

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

とまとめることもできる。

解説

まずは，$n=1,\ 2,\ 3$ のときの x_n の取り得る値を書き出してみる。

$n=1$ のとき $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$

$n=2$ のとき $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$

$n=3$ のとき $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}$

ここから x_n は，$\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+1}}, \frac{5}{2^{n+1}} \cdots \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$ のいずれかであり，それぞれの数になる確率は $\frac{1}{2^n}$ となることが推測できるので，これを数学的帰納法を用いて示す。あとは，大小を比較するのみだが，計算ミスをしやすいため，$n=1,\ 2,\ 3$ くらいは代入して答えがあっているか確かめるとよいだろう。2^n は n が偶数のとき 3 で割ると 1 余り，n が奇数のときは 3 で割ると 2 余ることから，$2^{n+2}-1$ や $2^{n+2}-5$ が求められる。2^{n+2} より小さい最大の奇数でかつ 3 の倍数であるものを求めるとき，n が奇数である場合は注意が必要で，$2^{n+2}-2$ とするとこれは偶数であるので不適である。

別解

$x_n = \frac{k}{2^{n+1}} < \frac{2}{3}$ となる奇数 k の個数を a_n とおいて，a_n に関する漸化式を立て，それを解いて答えを求める。

(i) $x_n = f_0(x_{n-1})$ のとき

$x_n = f_0\left(x_{n-1}\right) < \frac{1}{2}$ であることの考察は **解答** の通り。$x_n = f_0(x_{n-1}) < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ なので，2^n 個の x_n が $x_n < \frac{2}{3}$ を満たす。

(ii) $x_n = f_1(x_{n-1})$ のとき

$$x_n < \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_{n-1} < \frac{1}{3}$$

$$x_{n-1} = \begin{cases} \dfrac{x_{n-2}}{2} & (x_{n-1} = f_0(x_{n-2}) \text{ のとき}) \\ \dfrac{x_{n-2}+1}{2} & (x_{n-1} = f_1(x_{n-2}) \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f_1(x) > \frac{1}{2}$ なので，$x_{n-1} = f_1\left(x_{n-2}\right)$ のときはあり得ない。

$x_{n-1} = f_0\left(x_{n-2}\right)$ のとき，

$$x_{n-1} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_{n-2} < \frac{2}{3}$$

となり，これを満たす x_{n-2} の個数は a_{n-2} 個である。

よって

$$\begin{cases} a_n = 2^n + a_{n-2} \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

$P_n = \frac{a_n}{2^n}$ なので，

$$\begin{cases} P_n = 1 + \dfrac{1}{4}P_{n-2} \\ P_0 = 1, P_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

この漸化式を解くと，$P_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$ が求まる。

別解解説

確率の問題に対して漸化式によるアプローチを考えるのは極めて自然な発想である。

しかし，漸化式で解答を作成するには

・漸化式を立てられること

・その漸化式が解けること

の両方を満たすことが必要である。

本問では，

$x_n = f_0(x_{n-1})$ のとき

$$x_n < \frac{2}{3}$$

$x_n = f_1(x_{n-1})$ のとき

$$x_n < \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_{n-2} < \frac{2}{3}$$

であることに気づけば，簡易な漸化式を立式できる。

（大久保佳徳，松下祐樹，佐藤賢志郎）