2015 年度 京都大学 前期 数学

1 直線と与えられた図形との共有点についての条件の図示と，その面積

出題範囲	数と式／積分
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	$y=\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert+1$ のグラフは概形を，2 次関数のグラフは判別式を考えることができれば容易に解答できる。両方連立して一気に範囲を求めようとすると逆にタイムロスにつながる。図示のあとは焦らずに解けば完答できるだろう。

解答

$y=px+q$ と $y=x^2-x$ が交わる条件は，2 次方程式 $px+q=x^2-x$ が少なくとも 1 つの実数解をもつことである。

式を整理すると $x^2-(p+1)x-q=0$ である。これが実数解をもつ条件は判別式が 0 以上になるときであるので，

$$(p+1)^2+4q \geqq 0$$

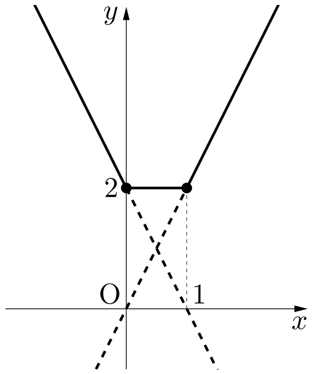
$$\Leftrightarrow q \geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

次に，$y=\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert+1$ のグラフの概形を求める。$x=0,\ 1$ を境に場合分けすることで

$$y=\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert+1$$

$$=\begin{cases} x+(x-1)+1=2x & (x \geqq 1) \\ x-(x-1)+1=2 & (0 \leqq x < 1) \\ -x-(x-1)+1=-2x+2 & (x<0) \end{cases}$$

よって，グラフの概形は図のとおり。



ここで，直線の性質上，$y = px + q$ が常に $y = |x| + |x - 1| + 1$ の上側にあるとき，つまりすべての実数 x について $px + q > |x| + |x - 1| + 1$ となることはないので，グラフが交わらない条件は，すべての実数 x について $px + q < |x| + |x - 1| + 1$ となることである。

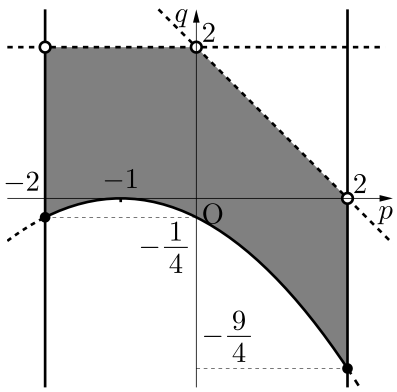
これを満たす条件は，図のグラフと直線の位置関係を考えると，

$$\begin{cases} 0 \leqq p \leqq 2 \text{ かつ } p \cdot 1 + q < 2 \\ \text{または} \\ -2 \leqq p < 0 \text{ かつ } p \cdot 0 + q < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqq p \leqq 2 \text{ かつ } q < -p + 2 \\ \text{または} \\ -2 \leqq p < 0 \text{ かつ } q < 2 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdot ②$$

である。[1]

①，② を pq 平面に図示すると以下の網掛部のようになる。ただし，境界は，$q = 2$，$q = -p + 2$ のみ含まない。



[1] ・傾きの絶対値が 2 を超えると確実にどこかで交わってしまう
・傾きの絶対値が 2 以下ならば $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で交点をもたなければよい
等を考えるとよい。

これの面積を S とすると,

$$S = \left(q \geqq 0 \text{ における台形の面積}\right) + \int_{-2}^{2} \frac{1}{4}(p+1)^2\,dp$$
$$= \frac{1}{2}(2+4)\cdot 2 + \left[\frac{1}{12}(p+1)^3\right]_{-2}^{2}$$
$$= 6 + \frac{7}{3} = \frac{25}{3}$$

解説

前半の,2 次関数と直線が交わる (共有点をもつ) 条件については,判別式を使う方針で特に問題はないだろう。後半は,式から地道に条件を出しても同様の結果は得られるが,「$|p| > 2$ のとき,必ず $y = |x| + |x-1| + 1$ と交わってしまうこと」と,「直線 $y = px + q$ の一部でも折れ線 $y = |x| + |x-1| + 1$ よりも上にあると仮定するとグラフ同士が交わってしまうこと」がわかれば,図形的に考えることができる。解答では,S の計算をする際に,

$$\int (x+a)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1} + C \ (C \text{ は積分定数})$$

を用いた。もちろん,展開してから積分してもよいが,覚えておいてもよいだろう。

(青木徹,松岡駿,沈有程)

2015 年度 京都大学 前期 数学

2　内接円をもつ四角形の面積の最小値

出題範囲	平面図形
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	円を固定して円に外接する四角形を動かし，四角形の面積が最小となる場合を考える問題。変数が少なくなり，計算がシンプルになるように変数の置き方に工夫が必要である。また，2 つの内角が 90° となる四角形の形状は解答にあるように 2 つあることに注意すること。

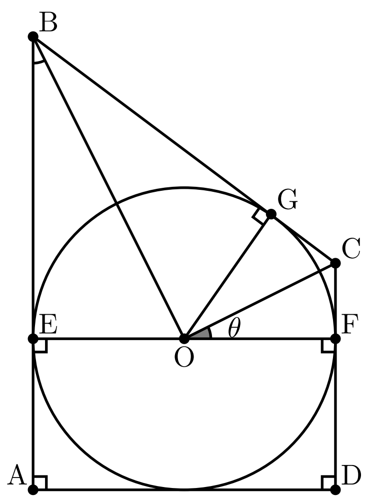
解答

四角形の 4 つの頂点のうち，2 つを 90° に固定する。このとき，次の 2 通りの四角形が存在する。

(i) 隣り合う頂点の内角が 90° のとき

(ii) 向かい合う頂点の内角が 90° のとき

(i) 下図のような内接円の中心 O，$\angle\mathrm{BAD} = 90^\circ, \angle\mathrm{ADC} = 90^\circ$ の四角形 ABCD を考える。対称性より $\mathrm{AB} \geqq \mathrm{CD}$ として考える。



点 O から辺 AB，CD に下した垂線の足をそれぞれ E とし，

$\angle\mathrm{COF} = \theta\,(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ とする。

このとき接線の条件より，$\angle\mathrm{CFO} = \angle\mathrm{CGO} = 90^\circ$ かつ $\mathrm{OF} = \mathrm{OG} = 1$ である。

よって

$$\triangle\mathrm{FOC} \equiv \triangle\mathrm{GOC}$$

同様に

$$\triangle\mathrm{EOB} \equiv \triangle\mathrm{GOB}$$

が成立する。

よって

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{COB} &= \angle\mathrm{GOC} + \angle\mathrm{GOB} \\ &= \frac{1}{2}(\angle\mathrm{FOC} + \angle\mathrm{GOC} + \angle\mathrm{GOB} + \angle\mathrm{EOB}) \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{EBO} &= \angle\mathrm{GBO} \\ &= 90^\circ - \angle\mathrm{GOB}\,(\angle\mathrm{BGO} = 90^\circ\text{より}) \\ &= \angle\mathrm{GOC}\,(\angle\mathrm{COB} = 90^\circ\text{より}) \\ &= \angle\mathrm{FOC} \\ &= \theta\end{aligned}$$

となる。

以上より，

$$(\text{四角形ABCD の面積}) = (\text{四角形 ADFE の面積}) + 2\,(\triangle\mathrm{FOC}\text{ の面積}) + 2(\triangle\mathrm{EBO}\text{ の面積})$$

である。

四角形 ADCE は長方形であるので

$$\mathrm{AD} = (\text{内接円の直径}) = 2$$

$$\mathrm{AE} = 1$$

よって，

$$(\text{長方形 ADFE の面積}) = 2 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

また，

$\mathrm{CF} = \tan\theta$，$\mathrm{BE} = \dfrac{1}{\tan\theta}$ なので，

$$(\triangle\mathrm{FOC}\text{ の面積}) = \frac{\tan\theta}{2} \qquad \cdots\cdots\ ②$$

$$(\triangle\mathrm{EBO}\text{ の面積}) = \frac{1}{2\tan\theta} \qquad \cdots\cdots\ ③$$

である。四角形 ABCD の面積は θ を変数とする関数であるので，これを $S(\theta)$ とおくと

$$S(\theta) = 2 + \frac{1}{2}\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)$$

である。

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$\tan\theta > 0$ なので，相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &\geqq 2\sqrt{\tan\theta \cdot \frac{1}{\tan\theta}} \\ &= 2\end{aligned}$$

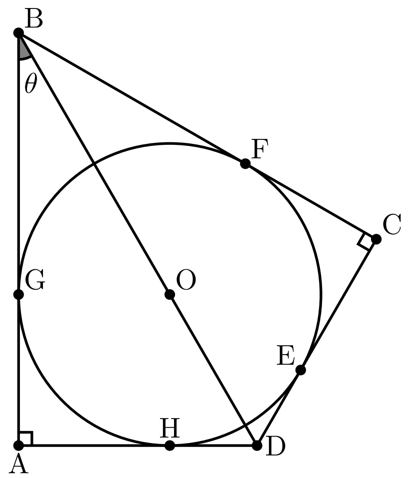
等号成立は，$\tan\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ のとき。

つまり，$\theta = 45^\circ$ で $S(\theta)$ は最小値

$$S\left(45^\circ\right) = 4$$

をとる。よって，このときの四角形 ABCD の面積の最小値は 4

(ii) 下図のような内接円の中心 O，$\angle\mathrm{BAD} = 90^\circ, \angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$ の四角形 ABCD を考える。



$\angle\mathrm{ABD} = \theta\,(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ とおき，内接円と四角形 ABCD との接点を図のように E，F，G，H とする。

$\triangle\mathrm{BGO}$ と $\triangle\mathrm{BFO}$ において，$\angle\mathrm{BGO} = \angle\mathrm{BFO} = 90^\circ$ かつ，$\mathrm{GO} = \mathrm{FO} = 1$ より，直角三角形の斜辺と他の一辺が等しいので

$$\triangle\mathrm{BGO} \equiv \triangle\mathrm{BFO}$$

である。よって，

$$\angle\mathrm{GBO} = \angle\mathrm{FBO} = \theta \quad \text{すなわち} \quad \angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{CBD} = \theta \qquad \cdots\cdots \text{④}$$

$\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{CBD}$ は，$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$ かつ ④ より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角が等しいので，

$$\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{CBD}$$

よって

$$(\text{四角形 ABCD の面積}) = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{CBD} = 2\triangle\mathrm{ABD} \qquad \cdots\cdots \text{⑤}$$

$\triangle\mathrm{GBO}$ に注目して，$\angle\mathrm{BGO} = 90^\circ$ より

$$\mathrm{BG} = \frac{\mathrm{OG}}{\tan\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AG} + \mathrm{BG} = 1 + \frac{1}{\tan\theta}$$

$\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{GBO}$ であるので

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABD} &= \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BG}}\right)^2 \triangle\mathrm{GBO} \\ &= \frac{1}{2}(\tan\theta + 1)^2 \cdot \frac{1}{\tan\theta} \\ &= \frac{1}{2}\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} + 2\right)\end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$\tan\theta > 0$ なので，相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &\geqq 2\sqrt{\tan\theta \cdot \frac{1}{\tan\theta}} \\ &= 2\end{aligned}$$

等号成立は，$\tan\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ のとき。つまり，$\theta = 45^\circ$ のとき。
よって，$\triangle\mathrm{ABD} \geqq 2$ であり，⑤ とあわせて

$$(\text{四角形 ABCD の面積}) \geqq 2 \cdot 2 = 4$$

なので，このときの四角形 ABCD の面積の最小値は 4

(i)(ii) より，四角形 ABCD の面積の最小値は 4

解説

最大値，最小値に関する問題に取り組む際，適切な変数を自分で設定し (本問では θ)，問題の目的である，変化する数量 (本問では四角形の面積) を，その設定した変数で表すことを考える。ここで重要なのは，変数を設定するときに，変化する数量がより簡単に表せるように設定することである。
また，問題文を読んだ際，対称的な構造をもつ正方形が最も面積が小さくなりそうだな，という予想を立てることができれば，答えが出た際，実際に正方形となっており一安心できる。このように予想する見方も養っておきたい。

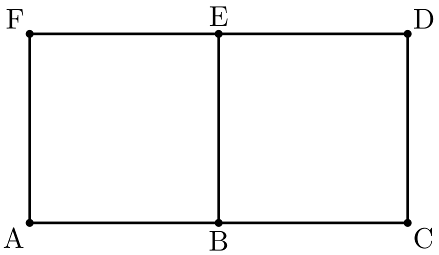
（侯明程，大久保佳徳，河合敬宏）

2015 年度 京都大学 前期 数学

3 最短経路

出題範囲	場合の数と確率
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	$X=0$ となる場合の数を直接数え上げようとすると案外大変である。X が 0，2，4 の値しかとりえないことに気づけば，余事象の確率，つまり，$X=2, 4$ となる確率について先に考えればよいだろうとわかる。余事象を考えるという選択肢を常にもっておこう。

解答



まず，$X=2$ のときを考える。

$X=2$ となるのは A→B→E または A→F→E を通るときである。

「線分 AB と線分 BE がともに赤く塗られること」と，「線分 AF と線分 FE がともに赤く塗られること」が互いに排反ではないことに注意して

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{AB と BE が赤}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{AF と FE が赤}}-\underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}_{\text{AB, BE, AF, FE が赤}}=\frac{7}{16}$$

次に，$X=4$ のときを考える。

$X=4$ となるのは A→B→C→D→E の経路が最短となるときである。このとき，線分 BE は黒く塗られ，かつ線分 AF と線分 FE の少なくとも一方は黒く塗られている。[1]

ゆえに，求める確率は

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}_{\text{AB, BC, CD, DE が赤}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{BE が黒}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}_{\text{AF と FE の少なくとも一方は黒}}=\frac{3}{128}$$

[1] ここでは通れない部分，つまり黒く塗られるべき部分について考えるのが簡単である。

最後に，$X=0$ のときを考える。

A から E に行く経路で，最短となりうるものは，A→B→E，A→F→E，

A→B→C→D→E の 3 つしかないので，X は 0，2，4 の値しかとりえない。

ゆえに，求める確率は，1 から余事象の確率，つまり，$X = 2, 4$ となる確率を引いて

$$1 - \left(\frac{7}{16} + \frac{3}{128}\right) = \frac{69}{128}$$

解説

いきなり $X = 0$ から計算しようとしても，直接全通り数え上げることはなかなか厳しい。(できなくはない。次に示す **別解** のようになる。) 見通しがあまりよくないときは，わかりやすいところから考えてみよう。

$X = 2$ となる経路が A→B→E または A→F→E のいずれかであることは即座にわかるだろう。ただ，この 2 つの経路が同時に通れるときもまた条件を満たすということを見落とさないようにしたい。

$X = 4$ となる経路を考えるとき，A→B→C→D→E の経路を通ることは容易にわかる。このとき $X = 2$ とはならない条件，すなわち線分 BE は黒く塗られ，かつ線分 AF と線分 FE の少なくとも一方は黒く塗られているということを見落とさないように気をつけよう。

$X = 0$ のときは余事象の確率を使えることに気づければ簡単に求まる。

別解

$X = 0$ となるのは，次の (a)，(b)，(c) がすべて成り立つときである。

(a) A→F→E の経路に，黒く塗られる線分がある。

(b) A→B→E の経路に，黒く塗られる線分がある。

(c) A→B→C→D→E の経路に，黒く塗られる線分がある。

A→B→E と A→B→C→D→E は線分 AB を共有しているので，事象 (b) と事象 (c) は独立ではない。

一方，A→F→E は，他の経路と線分を共有していないので，事象 (a) と事象「(b) かつ (c)」は独立である。

したがって，求める確率は，((a) となる確率) $\cdot$ ((b) かつ (c) となる確率) である。[2]

(i) (a) の確率は，線分 AF と線分 FE のうち，少なくとも一方が黒く塗られる確率なので

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

(ii) (b) かつ (c) の確率は，線分 AB が塗られる色で場合分けをする。

(ii−1) 線分 AB が黒く塗られる場合

他の線分の色に関係なく，(b) かつ (c) となる。

[2] 一般に，事象 A, B, C について，$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ とはならない。本問では，事象 A, B, C をそれぞれ，(a), (b), (c) に対応させると，A と $(B \cap C)$ は独立なので，$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C)$ となる。

よってこのときの確率は $\dfrac{1}{2}$

$(\mathrm{ii}-2)$ 線分 AB が赤く塗られる場合

(b) かつ (c) が成り立つのは，B→E の経路に，黒く塗られる線分があり (事象 P とする)，B→C→D→E の経路に，黒く塗られる線分がある (事象 Q とする) ときである。この 2 つの経路に共通する線分はないので，事象 P と事象 Q は独立であるから，このときの確率は，

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{AB が赤}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{BE が黒}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}_{\text{BC，CD，DE の少なくとも 1 つは黒}}=\frac{7}{32}$$

$(\mathrm{ii}-1)$，$(\mathrm{ii}-2)$ は互いに排反であるから，(b) かつ (c) となる確率は，

$$\frac{1}{2}+\frac{7}{32}=\frac{23}{32}$$

(i)，(ii) より，求める確率は，

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{23}{32}=\frac{69}{128}$$

である。

別解解説

事象の独立性について言及したり，場合分けが多かったりで，解答に比べて記述量がかなり多くなっている。そのうえ，$n=0$ となる確率しか求められていない。着想は学んでおいてもよいが，制限時間内で問題を効率よく解くという点ではおすすめしない。

（大久保佳徳，沈有程，辻啓吾）

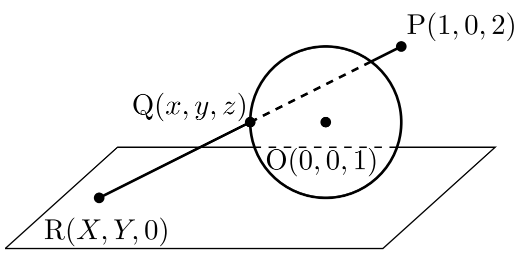
2015 年度 京都大学 前期 数学

4 空間図形と通過領域

出題範囲	空間図形／軌跡
難易度	★★★★☆
所要時間	30 分
傾向と対策	順像法（点 Q を動かす）で解くか，逆像法（点 R を動かす）で解くかで解き味が大きく異なる。順像法の方が自然な発想で考えやすいが，計算に多少の腕力が必要となる。逆像法を使えば計算はある程度楽になるが，発想力が必要になるかもしれない。

解答

$\mathrm{Q}(x, y, z)$，$\mathrm{R}(X, Y, 0)$ とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (x-1, y, z-2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (X-1, Y, -2)$$

ここで，3 点 P，Q，R が同一直線上にあることから，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ と表せるので，各成分を比較して

$$\begin{cases} x-1 &= k(X-1) \\ \quad y &= kY \\ z-2 &= -2k \end{cases}$$

第 3 式より $k = \dfrac{2-z}{2}$ なので，これを第 1，2 式に代入して整理すると

$$x = \frac{1}{2}(2-z)(X-1)+1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y = \frac{1}{2}(2-z)Y \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで，点 Q は点 $(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球面上の，点 $(0,0,2)$ を除く点を動くので

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \quad (z \neq 2)$$

この式に ①，② を代入して整理すると

$$\frac{1}{4}(2-z)^2\left(X + \frac{z}{2-z}\right)^2 + \frac{1}{4}(2-z)^2Y^2 + (z-1)^2 = 1$$

$0 \leqq z < 2$ なので，$2 - z \neq 0$ であることに注意して, さらに整理すると

$$\left(X + \frac{z}{2-z}\right)^2 + Y^2 = 4 \cdot \frac{z}{2-z}$$

ここで，$\dfrac{z}{2-z} = r\ (\geqq 0)$ とおいて上式を書き直すと

$$(X+r)^2 + Y^2 = 4r$$

r について整理すると

$$r^2 + 2(X-2)r + X^2 + Y^2 = 0$$

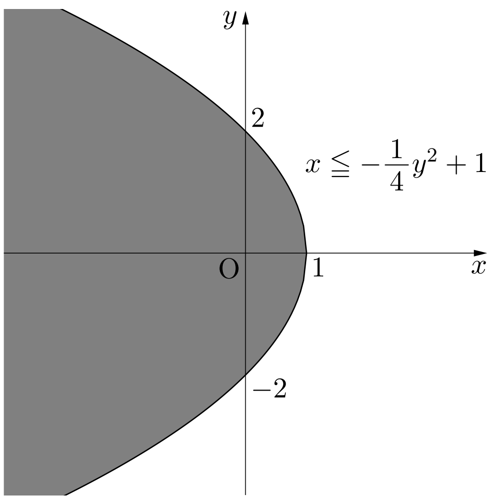
これを r についての 2 次方程式とみなしたときに，負でない実数解が存在するための X, Y の条件を求めればよい。判別式を D とし，$f(r) = r^2 + 2(X-2)r + X^2 + Y^2$ とおく。$f(0) = X^2 + Y^2 \geqq 0$ であることに注意すると，求める条件は

$$\begin{cases} \text{実数解をもつ} \iff (X-2)^2 - (X^2+Y^2) \geqq 0 \iff X \leqq -\dfrac{1}{4}Y^2 + 1 \\ \text{軸が負でない} \iff -(X-2) \geqq 0 \iff X \leqq 2 \end{cases}$$

以上より，点 R が動く範囲は

$$x \leqq -\frac{1}{4}y^2 + 1$$

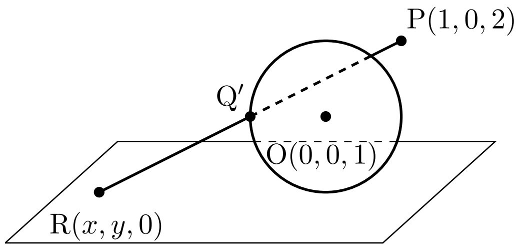
これを xy 平面上（$z=0$）に図示すると以下の網掛部。ただし，境界はすべて含む。



解説

点 Q に対応する点 R の座標を求め，その動く範囲を直接調べるストレートな解法であるが，計算がやや大変である。方針は立ちやすいので，慎重に解き進めよう。本解がいわゆる順像法であるが，別解のように，逆像法を用いる方法もある。

別解 直線 PR と球面 S が交わる条件，すなわち，直線 PR 上に球の中心 O(0,0,1) との距離が 1 である点が存在する条件を求めればよい。$\mathrm{R}(x,y,0)$ とおくと，直線 PR 上にある点 Q' は実数 t を用いて $(x-(x-1)t, (1-t)y, 2t)$ と表せる。このとき，点 Q' と点 $(0,0,2)$ を一致させるような t は



$$\begin{cases} x-(x-1)t=0 & \cdots\cdots ③ \\ (1-t)y=0 \\ 2t=2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

をすべて満たさなければならない。④ より，$t=1$ であるが，これを ③ に代入すると，$1=0$ になってしまう。よって，どのような t でも，点 Q' と点 $(0,0,2)$ は一致しない。

したがって，求める条件を，「$|\mathrm{OQ}'|=1$ を満たす t が存在する」としてよく，

$$\begin{aligned} & |\mathrm{OQ}'|=1 \\ \Leftrightarrow\quad & |\mathrm{OQ}'|^2=1 \\ \Leftrightarrow\quad & \{x-(x-1)t\}^2+\{(1-t)y\}^2+(2t-1)^2=1 \\ \Leftrightarrow\quad & \left\{(x-1)^2+y^2+4\right\}t^2-2\left\{x(x-1)+y^2+2\right\}t+(x^2+y^2)=0 \end{aligned}$$

これを t に関する 2 次方程式とみなしたときに実数解をもてばよいので，判別式を D とすると，求める条件は

$$\begin{aligned} & D \geqq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \left\{x(x-1)+y^2+2\right\}^2-\left\{(x-1)^2+y^2+4\right\}(x^2+y^2) \geqq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -y^2-4x+4 \geqq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x \leqq -\frac{1}{4}y^2+1 \end{aligned}$$

逆に，$\mathrm{R}(x,y,0)$ がこの条件を満たすとき，方程式は実数解をもち，直線 PR は球面 S と交点をもつ。よって，この条件で確かに必要十分である。以下同様。

別解解説

本来は点 Q が動いて点 R が決まるところであるが，発想を逆転させて，点 R を動かしてその存在条件を考えると一気に簡単に処理できる。途中の式変形こそ煩雑に見えるが，答えは非常にすっきりしているので，計算ミスが無いように解き進めよう。

（沈有程，青木徹）

2015年度 京都大学 前期 数学

5 多項式の割り算

出題範囲	式と証明
難易度	★★★★☆
所要時間	20 分
傾向と対策	$f(x)$ を $g(x)$ と，商 $px+q$，余り ε で表現して，それを $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の形とするまでは自然にできるだろう。ここから，どのように $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ が整数であるという条件を使うかがポイントとなる。p，q が整数でない可能性があることを考えつつ，これらを消去する方法を考えたい。

解答

$f(x)=(px+q)g(x)+\varepsilon$ とおく。(p，q, ε は実数定数)

すると，$\dfrac{f(x)}{g(x)}=px+q+\dfrac{\varepsilon}{g(x)}$ である。

ここで，$x=n+1$，$x=n$ を代入した式を辺々引き算すると

$$\begin{aligned}\frac{f(n+1)}{g(n+1)}-\frac{f(n)}{g(n)}&=p+\varepsilon\left\{\frac{1}{g(n+1)}-\frac{1}{g(n)}\right\}\\&=p-\frac{d\varepsilon}{\{d(n+1)+e\}(dn+e)}\\&=(\text{整数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow&\left\{\frac{f(n+2)}{g(n+2)}-\frac{f(n+1)}{g(n+1)}\right\}-\left\{\frac{f(n+1)}{g(n+1)}-\frac{f(n)}{g(n)}\right\}\\&=-\frac{d\varepsilon}{\{d(n+2)+e\}\{d(n+1)+e\}}+\frac{d\varepsilon}{\{d(n+1)+e\}(dn+e)}\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}&\frac{f(n+2)}{g(n+2)}-2\frac{f(n+1)}{g(n+1)}+\frac{f(n)}{g(n)}\\&=\frac{2d^2\varepsilon}{\{d(n+2)+e\}\{d(n+1)+e\}(dn+e)}\\&=(\text{整数})\end{aligned}$$

十分大きな n に対して

$$\left|\frac{2d^2\varepsilon}{\{d(n+2)+e\}\{d(n+1)+e\}(dn+e)}\right|<1$$

が成り立つことを考えれば[1]，これが任意の正の整数 n で整数となるための ε の条件は $\varepsilon = 0$ のみである。

以上より $f(x) = (px+q)g(x)$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。

[1] n を限りなく大きくしていくと，$\dfrac{f(n+2)}{g(n+2)} - 2\dfrac{f(n+1)}{g(n+1)} + \dfrac{f(n)}{g(n)}$ は限りなく 0 に近づく。

解説

解答のように $f(x)$ を $g(x)$ を用いて表したとき，$\varepsilon = 0$ を示せばよいということがわかる。

しかし $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ の式では p，q が整数かどうかが分からない。よってこれらの数を，数列 $\left\{\dfrac{f(n)}{g(n)}\right\}$ の階差数列や，その階差数列の階差数列を考えることで消去していく。

すると，$\dfrac{2d^2\varepsilon}{\{d(n+2)+e\}\{d(n+1)+e\}(dn+e)}$ が整数であるという条件が得られる。ここで，任意の整数 n について上の式が整数になるということは，n をどんなに大きくしても，この式は整数になるということである。一方，n があまりにも大きいと，$\dfrac{2d^2\varepsilon}{\{d(n+2)+e\}\{d(n+1)+e\}(dn+e)}$ の絶対値は 1 より小さくなるが，それでもなお整数であるというのだから，$\varepsilon = 0$ がいえるのである。

（青木徹，松下祐樹，松岡駿）