2016 年度 名古屋大学 前期 物理

問題 I　力学

出題範囲	単振動
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	水平方向，鉛直方向に加えて，斜面方向にも力がはたらく複雑な系である。まずは正確に力を図示し，各方向についての運動方程式（力のつり合いの式）を立てることが重要である。未知量の中には，それらの式を連立方程式として解かないと値の求まらないものも多く，ミスなくすばやく計算する力が必要になる。

解答

(1)　$d = \dfrac{(M+m)g\sin\theta}{k}$

(2) あ　$Mg\sin\theta + N\sin\theta - k(d+x)$　　**い**　$mg - m\alpha\sin\theta$

う　$-\dfrac{k}{M+m\sin^2\theta}x$　　**え**　$mg + \dfrac{m\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}kx$

(3) お　$2\pi\sqrt{\dfrac{M+m\sin^2\theta}{k}}$　　**か**　d　　**き**　(a)

く　(b)　　**け**　$\sin\theta$

(4)　$F = -\dfrac{m\cos\theta}{M+m}kx$

(5)　$F_0 = \mu_0 m\left(g + \dfrac{kx\sin\theta}{M+m}\right)$

(6) こ　$mg\sin\theta\cos\theta$　　**さ**　$\mu_0 mg\cos^2\theta$　　**し**　$\tan\theta$

解説

(1)

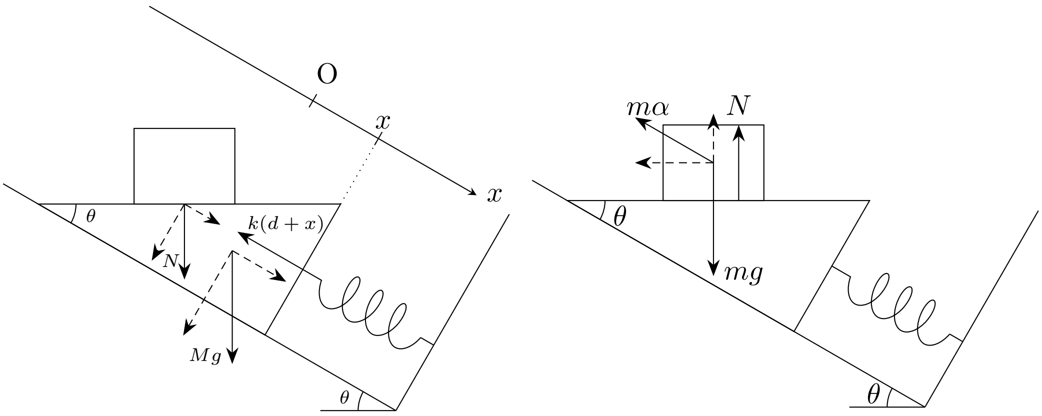
つり合いの状態において，三角台と物体を 1 つの系としてみると，重力の斜面に平行な方向の成分とばねの弾性力がつり合っている。よって，

$$(m+M)g\sin\theta - kd = 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{d = \frac{(M+m)g\sin\theta}{k}}$$

(2)

力は下図のようにはたらく。



よって，三角台の斜面方向の運動方程式は，

$$M\alpha = \underbrace{\boldsymbol{Mg\sin\theta + N\sin\theta - k(d+x)}}_{\text{あ}} \quad \cdots\cdots ①$$

となる。一方，三角台とともに移動する観測者から見た，物体にはたらく鉛直方向（※）の力のつり合いより，

$$m\alpha\sin\theta + N - mg = 0$$

$$\therefore \quad N = \underbrace{\boldsymbol{mg - m\alpha\sin\theta}}_{\text{い}} \quad \cdots\cdots ②$$

②を①に代入して，（1）の結果を使うと，

$$M\alpha = Mg\sin\theta + (mg - m\alpha\sin\theta)\sin\theta - k\left\{\frac{(m+M)g\sin\theta}{k} + x\right\}$$

$$(M + m\sin^2\theta)\alpha = -kx$$

$$\therefore \quad \alpha = \underbrace{\boldsymbol{-\frac{k}{M+m\sin^2\theta}x}}_{\text{う}} \quad \cdots\cdots ③$$

③を②に代入して，

$$N = mg - m\left(-\frac{k}{M+m\sin^2\theta}x\right)\sin\theta$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{mg + \frac{m\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}kx}}_{\text{え}}$$

※注

問題文中の「垂直方向」について，今三角台とともに移動する観測者から見ているので，「(移動している方向，つまり斜面に対して）垂直方向」と考えるのが自然である。ところが，斜面に垂直な方向については，三角台とともに移動する観測者（慣性力は斜面に平行な方向にはたらく）から見ようが静止している観測者から見ようが変わらないし，そもそもこのとき物体について斜面と垂直な方向の力はつり合っていない。そのため，「垂直方向」という言葉を「(水平面に対して）垂直方向」，すなわち鉛直方向として読み取らなければ問題を解くことはできない。受験生には試験場の緊張感の中で限られた試験時間内に作問者の意図を正確に読み取り，正しい解答を導くことが要求される。

(3)

単振動の方程式，

$$\alpha = -\omega^2 x$$

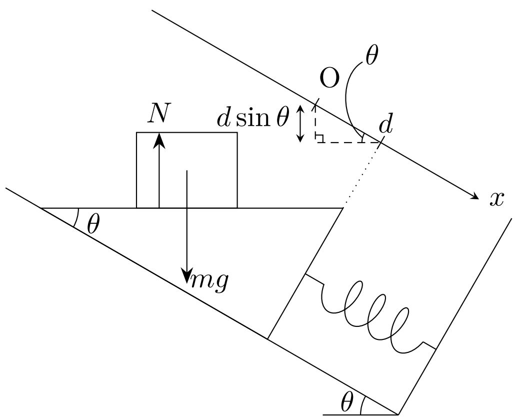
と③を比較すると，$\omega > 0$ であるから，

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m\sin^2\theta}}$$

である。よって，単振動の周期 T は，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underset{\text{お}}{\boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{M + m\sin^2\theta}{k}}}}$$

振動の中心はつり合いの位置（$x = 0$）であり，振動の開始が $x = -d$ であったから，振幅は $\underset{\text{か}}{\boldsymbol{d}}$ である。このとき，物体と三角台の間に摩擦ははたらかないから，物体に作用する水平 $\underset{\text{き}}{\textbf{(a)}}$ 方向の力はゼロである。したがって，物体は三角台の単振動と同じ周期で鉛直 $\underset{\text{く}}{\textbf{(b)}}$ 方向の単振動を行う。その振幅は，三角台が x 方向に d だけ移動すると鉛直方向には $d\sin\theta$ だけ移動することから，$d \times \underset{\text{け}}{\boldsymbol{\sin\theta}}$ である。



(4)

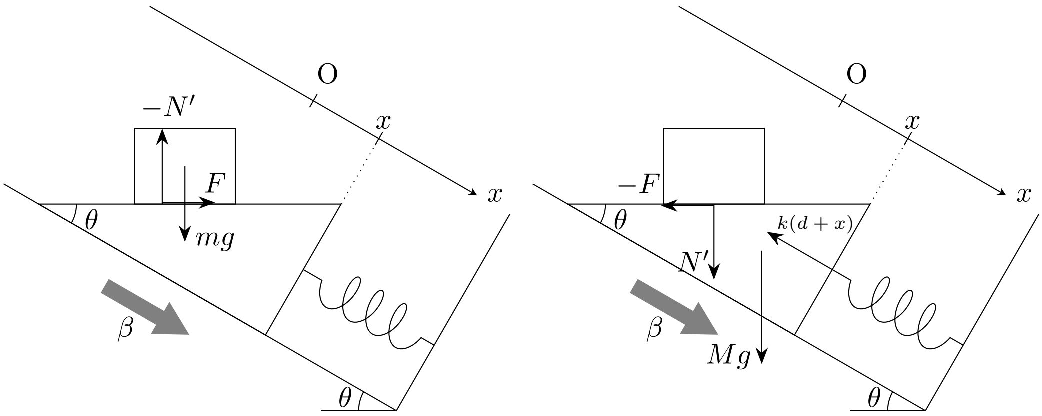
物体と三角台が一体となって動くので，その加速度を β とおく。また，三角台が物体に及ぼす垂直抗力を N' とおくと，それぞれの運動方程式より，

物体： $m\beta = mg\sin\theta + F\cos\theta - N'\sin\theta$ ……④

三角台：$M\beta = Mg\sin\theta + N'\sin\theta - F\cos\theta - k(d+x)$ ……⑤

また，物体の斜面に垂直な力のつり合いより，

$$N'\cos\theta + F\sin\theta - mg\cos\theta = 0 \quad \cdots\cdots⑥$$



④〜⑥より β，N' を消去して F について解く。④ + ⑤ より，

$$(M+m)\beta = (M+m)g\sin\theta - k(d+x)$$

(1) の結果を使うと，

$$(M+m)\beta = -kx$$

$$\therefore \quad \beta = -\frac{k}{M+m}x \quad \cdots\cdots⑦$$

また，⑥より，

$$N' = mg - F\tan\theta \quad \cdots\cdots⑧$$

⑦，⑧を④に代入して，

$$\begin{aligned} -\frac{m}{M+m}kx &= mg\sin\theta + F\cos\theta - (mg - F\tan\theta)\sin\theta \\ &= F(\cos\theta + \tan\theta\sin\theta) \\ &= F\cdot\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{F}{\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad F = \boldsymbol{-\frac{m\cos\theta}{M+m}kx}$$

(5)

(4) の結果を⑧に代入すると，

$$N' = mg + \frac{m\sin\theta}{M+m}kx$$

したがって，最大静止摩擦力 F_0 は，

$$\boldsymbol{F_0} = \mu_0 N' \boldsymbol{= \mu_0 m\left(g + \frac{kx\sin\theta}{M+m}\right)}$$

〔(4)(5) 別解〕

物体と三角台を一体とみて運動方程式を立てると，

$$(M+m)\beta = (M+m)g\sin\theta - k(d+x)$$

$$= -kx$$

ただし，式変形には（1) の結果を用いた。これより，

$$\beta = -\frac{k}{M+m}x$$

また，三角台とともに移動する観測者から見て物体は静止しているから，水平方向と鉛直方向の力のつり合いより，

水平方向：$F - m\beta\cos\theta = 0$

鉛直方向：$N' + m\beta\sin\theta - mg = 0$

上で求めた β を代入することにより，

(4) $F = -\dfrac{m\cos\theta}{M+m}kx$

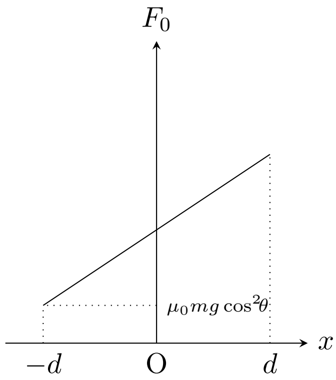
(5) $F_0 = \mu_0 N' = \mu_0 m\left(g + \dfrac{kx\sin\theta}{M+m}\right)$ が求まる。

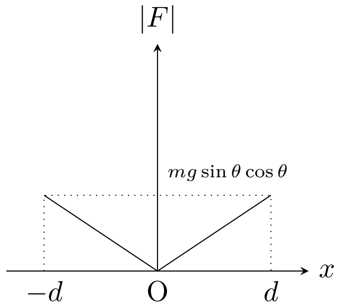
(6)

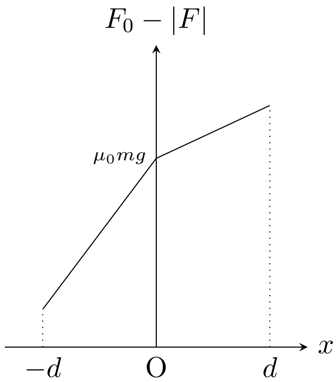
(4)，(5) より，

$$F_0 - |F| = \mu_0 m\left(g + \frac{kx\sin\theta}{M+m}\right) - \frac{m\cos\theta}{M+m}k|x|$$

これを小さくするには，F_0 を小さく，$|F|$ を大きくすればよい。物体と三角台が互いに滑らないとき，それらは一体となって周期 $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$，振幅が d の単振動を行う。よって，$-d \leqq x \leqq d$ の範囲を x が動くので，$F_0 - |F|$ は $x = -d$ のとき最小となる。







このとき，（1）の結果を使うと，静止摩擦力は，

$$\frac{m\cos\theta}{M+m}k\cdot\left|-\frac{(M+m)g\sin\theta}{k}\right| = \underset{\text{こ}}{\boldsymbol{mg\sin\theta\cos\theta}}$$

最大静止摩擦力は，

$$\mu_0 m\left[g + \frac{k\sin\theta}{M+m}\left\{-\frac{(M+m)g\sin\theta}{k}\right\}\right] = \mu_0 mg(1-\sin^2\theta) = \underset{\text{さ}}{\boldsymbol{\mu_0 mg\cos^2\theta}}$$

物体と三角台が互いに滑らないためには，常に $F_0 - |F| \geqq 0$ であればよいので，

$$\mu_0 mg\cos^2\theta - mg\sin\theta\cos\theta \geqq 0$$

$$\therefore\quad \mu_0 \geqq \tan\theta$$

したがって，静止摩擦係数の最小値は $\underset{\text{し}}{\boldsymbol{\tan\theta}}$ である。

（三澤颯大，森本亮太，岡田和也）

2016 年度 名古屋大学 前期 物理

問題Ⅱ　電磁気学

出題範囲	交流回路
難易度	★★★★★
所要時間	25 分
傾向と対策	(1) ～ (3) は基本的な問題である。(4) は慣れていない問題かもしれないが，問題文で与えられたダイオードと非直線抵抗の式を（電圧）＝（電流）×（抵抗）の式の代わりとしてキルヒホッフの法則に適用するだけで，解き方の方針は (1) ～ (3) と変わらない。(5) の交流電源の問題は，コンデンサやコイルの位相のずれを考慮してキルヒホッフの法則を適用した後，三角関数の合成を用いながら式変形を行う。いずれも交流回路では頻出の事項であるが，交流回路に慣れていなければスラスラ解くのは難しいだろう。

解答

(1)　$I_\mathrm{L} = \dfrac{V_1 + R_2 I_\mathrm{G}}{R_1 + R_2}$　　$I_\mathrm{R} = \dfrac{V_1 - R_4 I_\mathrm{G}}{R_3 + R_4}$

(2)　$R_1 I_\mathrm{L} + R_\mathrm{G} I_\mathrm{G} - R_3 I_\mathrm{R} = 0$

(3)　$I_\mathrm{G} = -0.5\,\mathrm{A}$

(4)

ア　$R_1 I_\mathrm{L} + \sqrt{{a_\mathrm{D}}^2 I_\mathrm{L}}$　　**イ**　$\dfrac{-a_\mathrm{D} + \sqrt{{a_\mathrm{D}}^2 + 4R_1 V_1}}{2R_1}$　　**ウ**　$R_3 I_\mathrm{R} + {a_\mathrm{N}}^2 {I_\mathrm{R}}^2$

エ　$\dfrac{-R_3 + \sqrt{{R_3}^2 + 4{a_\mathrm{N}}^2 V_1}}{2{a_\mathrm{N}}^2}$　　**オ**　27　　**カ**　$\sqrt{{R_4}^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C_1}\right)^2}$

キ　$-\dfrac{1}{\omega C_1 R_4}$　　**ク**　${R_1}^2 + (\omega L_1)^2$　　**ケ**　$\dfrac{\omega L_1}{R_1}$

コ　$C_1 R_2 R_3$　　**サ**　$\omega^2 {C_1}^2 R_2 R_3 R_4$

解説

(1)

キルヒホッフ第一法則より，抵抗 R_2，R_4 に流れる電流はそれぞれ $I_\mathrm{L} - I_\mathrm{G}$，$I_\mathrm{R} + I_\mathrm{G}$ である。

経路 A-B-D-P-C-A においてキルヒホッフ第二法則より

$$V_1 - R_1 I_\mathrm{L} - R_2 (I_\mathrm{L} - I_\mathrm{G}) = 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{I_\mathrm{L} = \frac{V_1 + R_2 I_\mathrm{G}}{R_1 + R_2}}$$

経路 A-B-D-Q-C-A においてキルヒホッフ第二法則より

$$V_1 - R_3 I_R - R_4 (I_R + I_G) = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{I_R = \frac{V_1 - R_4 I_G}{R_3 + R_4}}$$

(2)

経路 C-P-Q-C においてキルヒホッフ第二法則より

$$\boldsymbol{R_1 I_L + R_G I_G - R_3 I_R = 0}$$

(3)

(1) の結果に各数値を代入すると

$$I_L = \frac{5 + 1 \cdot I_G}{2+1} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} I_G \text{〔A〕}$$

$$I_R = \frac{5 - 2 \cdot I_G}{1+2} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} I_G \text{〔A〕}$$

(2) の式に代入して

$$2 \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3} I_G\right) + 2 \cdot I_G - 1 \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3} I_G\right) = 0$$

$$\frac{10}{3} I_G = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{I_G} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{= -0.5\ \mathrm{A}}$$

(4)

本問では，$I_G = 0$ の場合を考えているのでダイオード R_D に流れる電流は I_L であり，非線形抵抗 R_N に流れる電流は I_R である。経路 A-B-D-P-C-A においてキルヒホッフ第二法則より

$$V_1 = \underbrace{\boldsymbol{R_1 I_L + \sqrt{a_D{}^2 I_L}}}_{ア}$$

これを $\sqrt{I_L}$ についての 2 次方程式と見なして $a_D > 0$ に注意して解くと

$$\sqrt{I_L} = \frac{-a_D \pm \sqrt{a_D{}^2 + 4R_1 V_1}}{2R_1}$$

$\sqrt{I_\mathrm{L}} > 0$ であるから

$$\sqrt{I_\mathrm{L}} = \underbrace{\frac{-a_\mathrm{D} + \sqrt{a_\mathrm{D}{}^2 + 4R_1V_1}}{2R_1}}_{イ} \qquad \cdots\cdots①$$

また，経路 A-B-D-Q-C-A においてキルヒホッフ第二法則より

$$V_1 = \underbrace{R_3I_\mathrm{R} + a_\mathrm{N}{}^2 I_\mathrm{R}{}^2}_{ウ} \qquad \cdots\cdots②$$

これを I_Rについての 2 次方程式と見なして解くと

$$I_\mathrm{R} = \frac{-R_3 \pm \sqrt{R_3{}^2 + 4a_\mathrm{N}{}^2V_1}}{2a_\mathrm{N}{}^2}$$

$I_\mathrm{R} > 0$ であるから

$$I_\mathrm{R} = \underbrace{\frac{-R_3 + \sqrt{R_3{}^2 + 4a_\mathrm{N}{}^2V_1}}{2a_\mathrm{N}{}^2}}_{エ} \qquad \cdots\cdots③$$

$V_1 = 4\,\mathrm{V}$，$R_1 = 1\,\Omega$，$a_\mathrm{D}{}^2 = 9\,\Omega\mathrm{V}$ のとき，①より

$$\sqrt{I_\mathrm{L}} = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = 1$$

$$\therefore \quad I_\mathrm{L} = 1\,\mathrm{A}$$

ここで，$I_\mathrm{G} = 0\,\mathrm{A}$ であるから，P と Q の電位は等しいので

$$R_1I_\mathrm{L} = R_3I_\mathrm{R}$$

$$\therefore \quad 1\cdot 1 = 3\cdot I_\mathrm{R}$$

$$\therefore \quad I_\mathrm{R} = \frac{1}{3}\mathrm{A}$$

したがって，②より

$$4 = 3\cdot\frac{1}{3} + a_\mathrm{N}{}^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\therefore \quad a_\mathrm{N}{}^2 = \underbrace{27}_{オ}\,\Omega^2\mathrm{V}^{-1}$$

※注

②と③は $I_\mathrm{R} > 0$ という条件のもとで同値であるため，$a_\mathrm{N}{}^2$ を求める際に②ではなく③を用いてもよいが，2 次方程式を解かなければならず計算も煩雑になる。

(5)

交流回路におけるコンデンサでは，電流は電圧の位相（= 抵抗での電流の位相）よりも位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ進むので，コンデンサ $\mathrm{C_1}$ における電圧はコンデンサ $\mathrm{C_1}$ のリアクタンスが $\frac{1}{\omega C_1}$ であるから，

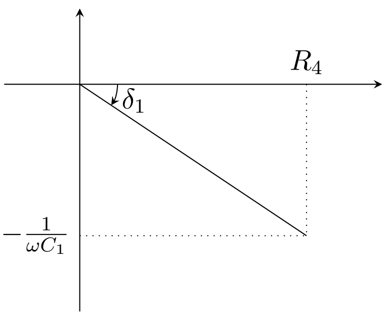
$$\frac{1}{\omega C_1} I_\mathrm{R}^0 \sin\left(\omega t + \theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\omega C_1} I_\mathrm{R}^0 \cos(\omega t + \theta_2)$$

経路 D-P-Q-D においてキルヒホッフ第二法則より

$$R_2 I_\mathrm{L}^0 \sin(\omega t + \theta_1) = R_4 I_\mathrm{R}^0 \sin(\omega t + \theta_2) - \frac{1}{\omega C_1} I_\mathrm{R}^0 \cos(\omega t + \theta_2)$$

右辺を三角関数の合成によって合成すると，右図より

$$R_2 I_\mathrm{L}^0 \sin(\omega t + \theta_1) = \underbrace{\sqrt{{R_4}^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1}\right)^2}}_{\text{カ}} I_\mathrm{R}^0 \sin(\omega t + \theta_2 + \delta_1) \qquad \cdots\cdots ④$$



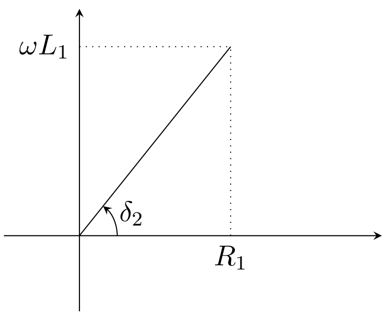
$$\tan\delta_1 = -\frac{\frac{1}{\omega C_1}}{R_4} = \underbrace{-\frac{1}{\omega C_1 R_4}}_{\text{キ}}$$

また，交流回路におけるコイルでは，電流は電圧よりも位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れるので，コイル $\mathrm{L_1}$ における電圧はコイル $\mathrm{L_1}$ のリアクタンスが ωL_1 であるから，

$$\omega L_1 I_\mathrm{L}^0 \sin\left(\omega t + \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \omega L_1 I_\mathrm{L}^0 \cos(\omega t + \theta_1)$$

経路 C-P-Q-C においてキルヒホッフ第二法則より

$$R_3 I_\mathrm{R}^0 \sin(\omega t + \theta_2) = R_1 I_\mathrm{L}^0 \sin(\omega t + \theta_1) + \omega L_1 I_\mathrm{L}^0 \cos(\omega t + \theta_1)$$



右辺を三角関数の合成によって合成すると，右図より

$$R_3 I_\mathrm{R}^0 \sin(\omega t + \theta_2) = \underbrace{\sqrt{{R_1}^2 + (\omega L_1)^2}}_{\text{ク}} I_\mathrm{L}^0 \sin(\omega t + \theta_1 + \delta_2) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$$\tan\delta_2 = \underbrace{\frac{\omega L_1}{R_1}}_{\text{ケ}}$$

④，⑤が常に成り立つためには，両辺で sin の位相が等しく，かつ係数が等しいことが必要十分である。した

がって，

$$\begin{cases} R_2 I_\mathrm{L}^0 = \sqrt{{R_4}^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C_1}\right)^2}\, I_\mathrm{R}^0 & \cdots\cdots ⑥ \\ R_3 I_\mathrm{R}^0 = \sqrt{{R_1}^2 + (\omega L_1)^2}\, I_\mathrm{L}^0 & \cdots\cdots ⑦ \\ \theta_1 = \theta_2 + \delta_1 & \cdots\cdots ⑧ \\ \theta_2 = \theta_1 + \delta_2 & \cdots\cdots ⑨ \end{cases}$$

⑧，⑨より $\delta_2 = -\delta_1$ であるから

$$\tan\delta_2 = -\tan\delta_1$$

$$\frac{\omega L_1}{R_1} = \frac{1}{\omega C_1 R_4}$$

$$\therefore \quad R_1 = \omega^2 C_1 R_4 L_1 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

⑥，⑦の両辺をかけ合わせて，$I_\mathrm{L}^0 I_\mathrm{R}^0 \sqrt{{R_4}^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C_1}\right)^2}$ (> 0) で割ると

$$\frac{R_2 R_3}{\sqrt{{R_4}^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C_1}\right)^2}} = \sqrt{{R_1}^2 + (\omega L_1)^2}$$

⑩を代入し，左辺の分子・分母を ωC_1 倍すると

$$\frac{\omega C_1 R_2 R_3}{\sqrt{(\omega C_1 R_4)^2 + 1}} = \sqrt{(\omega^2 C_1 R_4 L_1)^2 + (\omega L_1)^2}$$

$$\frac{\omega C_1 R_2 R_3}{\sqrt{1 + (\omega C_1 R_4)^2}} = \omega L_1 \sqrt{1 + (\omega C_1 R_4)^2}$$

$$\therefore \quad L_1 = \frac{\boldsymbol{C_1 R_2 R_3}_{\text{コ}}}{1 + (\omega C_1 R_4)^2}$$

したがって，⑩より

$$R_1 = \omega^2 C_1 R_4 \cdot \frac{C_1 R_2 R_3}{1 + (\omega C_1 R_4)^2} = \frac{\boldsymbol{\omega^2 {C_1}^2 R_2 R_3 R_4}_{\text{サ}}}{1 + (\omega C_1 R_4)^2}$$

※補足

(5)

(カ)〜(ケ)を微積分を用いて求める。コンデンサ C_1 上の Q 側の極板上の電荷を q とおくと，定義より，

$$I_\mathrm{R} = \frac{dq}{dt}$$

$$\therefore \quad q = \int I_\mathrm{R} dt$$

$$\therefore \quad q = \int I_\mathrm{R}^0 \sin(\omega t + \theta_2) dt$$

$$\therefore \quad q = -\frac{I_\mathrm{R}^0}{\omega} \cos(\omega t + \theta_2)$$

(θ_2 が初期値を与えているので積分定数は 0)

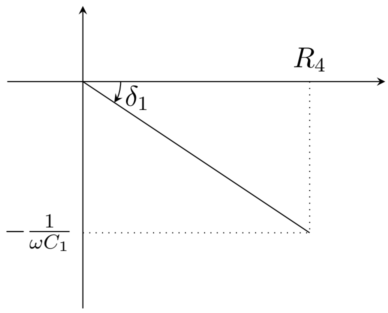
経路 D-P-Q-D においてキルヒホッフ第二法則より

$$R_2 I_\mathrm{L}^0 \sin(\omega t + \theta_1) = R_4 I_\mathrm{R}^0 \sin(\omega t + \theta_2) + \frac{q}{C_1}$$

$$R_2 I_\mathrm{L}^0 \sin(\omega t + \theta_1) = R_4 I_\mathrm{R}^0 \sin(\omega t + \theta_2) - \frac{1}{\omega C_1} I_\mathrm{R}^0 \cos(\omega t + \theta_2)$$

右辺を三角関数の合成によって合成すると，右図より

$$R_2 I_\mathrm{L}^0 \sin(\omega t + \theta_1) = \underbrace{\sqrt{{R_4}^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1}\right)^2}}_{\text{カ}} I_\mathrm{R}^0 \sin(\omega t + \theta_2 + \delta_1) \qquad \cdots\cdots④$$



$$\tan\delta_1 = -\frac{\frac{1}{\omega C_1}}{R_4} = \underbrace{-\frac{1}{\omega C_1 R_4}}_{\text{キ}}$$

また，コイルの両端の電位差を ε とすると，定義より，

$$\begin{aligned}\varepsilon &= L_1 \frac{dI_\mathrm{L}}{dt} \\ &= L_1 \frac{d}{dt} I_\mathrm{L}^0 \sin(\omega t + \theta_1) \\ &= \omega L_1 I_\mathrm{L}^0 \cos(\omega t + \theta_1)\end{aligned}$$

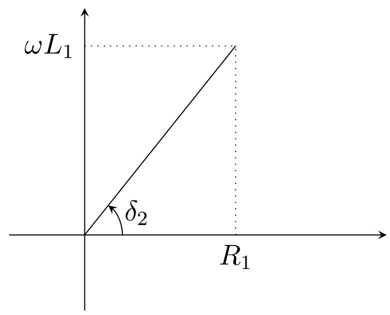
よって経路 C-P-Q-C においてキルヒホッフ第二法則より

$$R_3 I_\mathrm{R}^0 \sin(\omega t + \theta_2) = R_1 I_\mathrm{L}^0 \sin(\omega t + \theta_1) + \omega L_1 I_\mathrm{L}^0 \cos(\omega t + \theta_1)$$

右辺を三角関数の合成によって合成すると，右図より

$$R_3 I_\mathrm{R}^0 \sin(\omega t + \theta_2) = \underbrace{\sqrt{{R_1}^2 + (\omega L_1)^2}}_{\text{ク}}\, I_\mathrm{L}^0 \sin(\omega t + \theta_1 + \delta_2) \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$\tan\delta_2 = \underbrace{\frac{\omega L_1}{R_1}}_{\text{ケ}}$$



（ 三澤颯大，森本亮太，岡田和也 ）

2016年度 名古屋大学 前期 物理

問題 III　三角プリズム

出題範囲	光の干渉
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	三角プリズムの問題であるが，プリズムに惑わされずに 2 光源の問題としてみることができるかが重要である。本問のようにヤングの実験に帰結できる問題は頻出であるので，ヤングの実験の結果は導出できるとよいが，数をこなして覚えておきたい。(3) (4)では図形的な解法も必要になるので，図を描いていくとわかりやすいだろう。

解答

(1) $n_1\theta_3 = \theta_4$　**(2)** $\alpha = \theta_2 + \theta_3$　**(3)** $\delta = (n_1 - 1)\alpha$

(4) $d = (n_1 - 1)\alpha b$　**(5)** $\lambda = \dfrac{2(n_1 - 1)\alpha b}{L}\Delta x_1$　**(6)** $x_{\mathrm{p}}\dfrac{(n_1 - n_2)\alpha b}{2}$

(7) $n_2 = \dfrac{2(n_1 - 1)\Delta x_1}{\Delta x_2} - n_1 + 2$

解説

(1)

XZ 面での屈折の法則より，

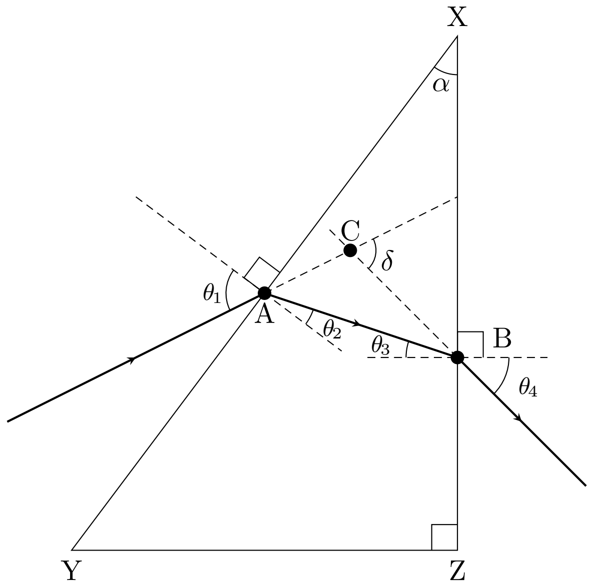
$$\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4} = \frac{1}{n_1}$$

$$\therefore\quad n_1\sin\theta_3 = \sin\theta_4$$

入射角が十分に小さいとき，$\theta_2, \theta_3, \theta_4$ も十分に小さいので $\sin\theta_3 \fallingdotseq \theta_3$, $\sin\theta_4 \fallingdotseq \theta_4$ として

$$\boldsymbol{n_1\theta_3 = \theta_4} \qquad \cdots\cdots①$$

(2)



右図において三角形 XAB の内角の和より，

$$\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_3\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \pi$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\alpha = \theta_2 + \theta_3} \qquad \cdots\cdots ②$$

(3)

XY 面での屈折の法則より，

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{1}{n_1}$$

$\sin\theta_1 \fallingdotseq \theta_1$，$\sin\theta_2 \fallingdotseq \theta_2$ より，

$$n_1\theta_2 = \theta_1 \qquad \cdots\cdots ③$$

右上図において三角形 CAB の内角の和より，

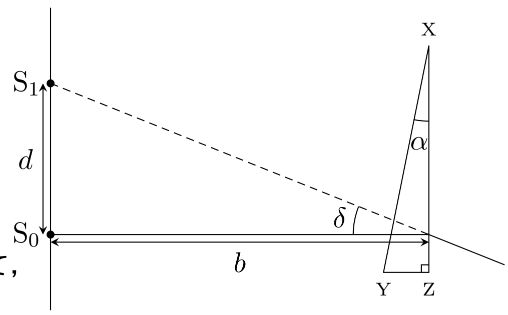
$$(\pi - \delta) + (\theta_4 - \theta_3) + (\theta_1 - \theta_2) = \pi$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\delta} = (n_1 - 1)(\theta_2 + \theta_3) \qquad (\because ①③)$$

$$\boldsymbol{= (n_1 - 1)\alpha} \qquad (\because ②)$$

(4)

三角プリズムに入射すると光と三角プリズムから出てくる光のなす角が δ なので，



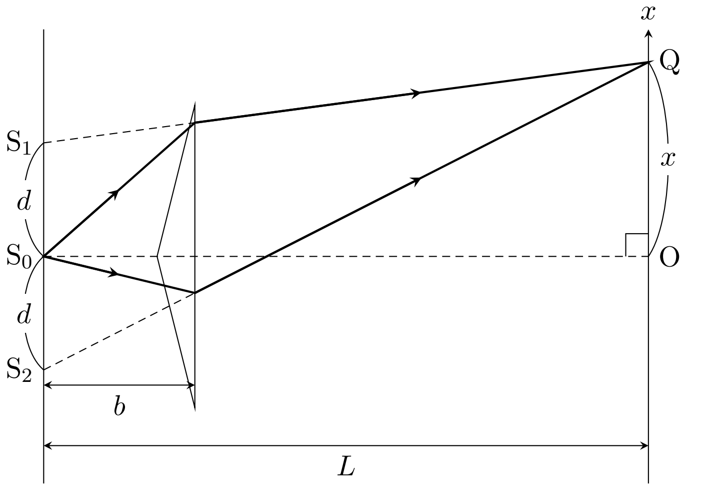
$$\frac{d}{b} = \tan\delta$$

$\delta = (n_1 - 1)\alpha$ は十分に小さいので $\tan\delta \fallingdotseq \delta = (n_1 - 1)\alpha$ として，

$$\boldsymbol{d = (n_1 - 1)\alpha b}$$

(5)

三角プリズム 1，三角プリズム 2 を通過した光の仮想的な光源をそれぞれ $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ とする。



$\mathrm{S_0}$ から出て複プリズムを通過した光による干渉は，光源 $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ の 2 光源の光による干渉と見なすことができる。

L が b より大きいことから L は $d=(n_1-1)\alpha b$ に対して十分大きいので，$\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ を出て位置 x の点 Q に到達する光の経路差は $|\mathrm{S_1Q}-\mathrm{S_2Q}|=2d\dfrac{|x|}{L}$ である（ヤングの実験）。

よって点 Q で光が強め合う条件は，

$$2d\frac{|x|}{L}=m\lambda \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$\therefore\quad |x|=m\frac{L\lambda}{2d}$$

$$\therefore\quad x=m\frac{L\lambda}{2d} \qquad (m\text{ は整数})$$

したがって

$$\mathit{\Delta} x_1=(m+1)\frac{L\lambda}{2d}-m\frac{L\lambda}{2d}=\frac{L\lambda}{2d}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\lambda}=\frac{2d}{L}\mathit{\Delta} x_1\boldsymbol{=\frac{2(n_1-1)\alpha b}{L}\mathit{\Delta} x_1} \qquad (\because\ (4))$$

（別解）

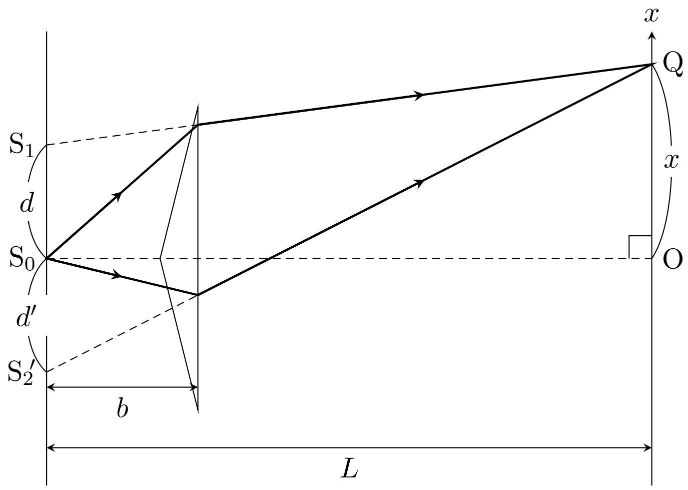
次のように位相差による強め合う条件を立てて求めることもできる（(7)も同様）。

$$2\pi\cdot 2d\frac{|x|}{L}\cdot\frac{1}{\lambda}=2m\pi \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

なお，位相差については最後に補足として付した。非常に重要な考え方なのでぜひ参考にしてもらいたい。

(6)

三角プリズム 3 を通った光は，$\mathrm{S_0}$ から d' だけ離れた仮想的な光源 $\mathrm{S_2'}$ から発せられた三角プリズムを通らない光の経路と見なすことができる。



(4)と同様にして，

$$d' = (n_2 - 1)\alpha b$$

x_p は線分 $\mathrm{S_1S_2'}$ の垂直二等分線上にあるので，

$$\boldsymbol{x_\mathrm{p}} = \frac{d + (-d')}{2} \boldsymbol{=} \boldsymbol{\frac{(n_1 - n_2)\alpha b}{2}}$$

(7)

交換後の複プリズムによる干渉は(5)と同様にして，光源 $\mathrm{S_1}$ と光源 $\mathrm{S_2'}$ の 2 光源の光による干渉と見なすことができる。位置 x の点 Q に到達する光の経路差は $|\mathrm{S_1Q} - \mathrm{S_2'Q}| = (d + d')\dfrac{|x|}{L}$ なので，点 Q で光が強め合う条件は，

$$(d + d')\frac{|x|}{L} = m\lambda \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$\therefore \quad |x| = m\frac{L\lambda}{d + d'}$$

$$\therefore \quad x = m\frac{L\lambda}{d + d'} \quad (m \text{ は整数})$$

したがって

$$\mathit{\Delta} x_2 = (m+1)\frac{L\lambda}{d + d'} - m\frac{L\lambda}{d + d'} = \frac{L\lambda}{d + d'}$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{d + d'}{L}\mathit{\Delta} x_2 = \frac{(n_1 + n_2 - 2)\alpha b}{L}\mathit{\Delta} x_2$$

(5)より，

$$\frac{2(n_1-1)\alpha b}{L}\Delta x_1 = \frac{(n_1+n_2-2)\alpha b}{L}\Delta x_2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{n_2 = \frac{2(n_1-1)\Delta x_1}{\Delta x_2} - n_1 + 2}$$

◆ Column

波の干渉を位相差で攻略

一般に，減衰しない波の干渉は位相の差によってもたらされる。

光の経路差で議論する場合，同位相のときと逆位相（初期位相の差の大きさが $\frac{\pi}{2}$）のときでは強め合う条件の表式が異なる。しかし，位相差で議論すると，初期位相の差によって条件の式が異なるということがなくなるのである。以下に位相差を用いた干渉の条件の考え方を示す。

今回は簡単のため，正弦波で波長が λ，振幅が A，周期が T の 2 つの波 1 と波 2 の合成を考える。平面上のある点 P でのそれぞれの波の波源からの変位を x_1，x_2 とすると，点 P での時刻 t におけるそれぞれの波の変位の式は次のようになる。

$$\text{波 1：}\ y_1 = A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)+\alpha_1\right\} = A\sin\theta_1$$

$$\text{波 2：}\ y_2 = A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)+\alpha_2\right\} = A\sin\theta_2$$

ここで α_1, α_2 は初期位相であり，位相を θ_1, θ_2（これらは t の関数）とおいた。これらの点 P における重ね合わせでできる波の変位の式は，

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= A(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) \\ &= 2A\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} \qquad (\because \text{和積公式}) \end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{\theta_1-\theta_2}{2} = \frac{1}{2}\left(2\pi\cdot\frac{x_2-x_1}{\lambda}+\alpha_1-\alpha_2\right) \qquad \text{『}t\text{ に依存しない定数！』}$$

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{1}{2}\left\{2\pi\left(\frac{2t}{T}-\frac{x_1+x_2}{\lambda}\right)+\alpha_1+\alpha_2\right\} \qquad \text{『}t\text{ の 1 次関数』}$$

このことから，合成波 $y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ の振幅は $\left|2A\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|$ であり，位相は $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ であることがわかった。

ここで，波が強め合うとき振幅が最大となる。すなわち $\left|\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right| = 1$ となる。このとき，整数 m を用いて $\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2} = m\pi$ と書けるので，強め合う条件は位相差 $\theta_1-\theta_2$ を用いて

$$\theta_1-\theta_2 = 2\pi\frac{x_2-x_1}{\lambda}+\alpha_1-\alpha_2 = 2m\pi \qquad (m\text{ は整数})$$

と求まる。ここで x_2-x_1 はいわゆる経路長の差，$\alpha_1-\alpha_2$ は初期位相の差を表す。

弱め合うときは $\left|\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right| = 0$ となることから同様の議論によって，

$$\theta_1-\theta_2 = 2\pi\frac{x_2-x_1}{\lambda}+\alpha_1-\alpha_2 = (2m+1)\pi \qquad (m\text{ は整数})$$

となる。

結論として，**強め合う条件は位相差が π の偶数倍であることで，弱め合う条件は位相差が π の奇数倍であることである。**

この導出において得られた条件で特筆すべき点は，経路差の干渉の条件はいま求めた条件から導出できるということと，位相差で議論する際は経路差の干渉の条件のように，同位相か逆位相という違い（$=$ 初期位相の差が $\dfrac{\pi}{2}$ か否か）によって**場合分けを必要としない**ということである。それに加え，位相差で議論するということは初期位相の差が $\dfrac{\pi}{2}$ でない一般の場合でも対応できる。難関大学を目指す人はぜひとも位相差の議論ができるようにしておきたい。

（ 一丸友美，三澤颯大，岡田和也 ）