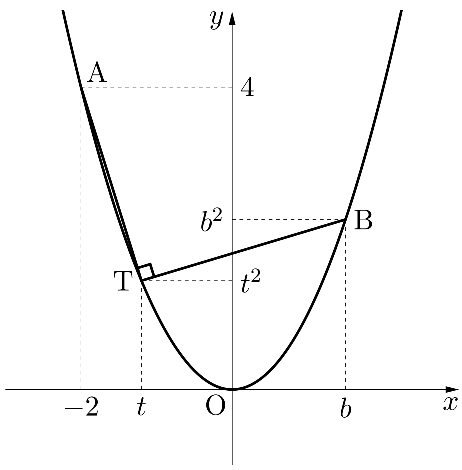
2016年度 名古屋大学 前期 数学

1 点の存在条件と解の配置

出題範囲	図形と方程式
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	存在条件を解の配置の問題へと言い換えられるかがカギとなる。2 次方程式の解の配置自体は数学 I の内容であるが頻出であり，対策が必要である。

解答



直角であるという条件から，$-2<t<b$ に注意して

$$(\text{直線 AT の傾き})\cdot(\text{直線 TB の傾き})=-1$$

$$\frac{t^2-4}{t+2}\cdot\frac{b^2-t^2}{b-t}=-1$$

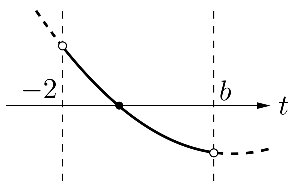
$$t^2+(b-2)\,t-2b+1=0$$

問題文の条件を満たすためには，この方程式が $-2<t<b$ で少なくとも 1 つ解をもてばよい。

ここで，$f\,(t)=t^2+(b-2)\,t-2b+1$ とおくと

$$f\,(t)=\left(t-\frac{2-b}{2}\right)^2-\frac{1}{4}b^2-b$$

(i) $\dfrac{2-b}{2}\leqq -2$ または $b\leqq\dfrac{2-b}{2}$ のとき，つまり $b\leqq\dfrac{2}{3}$，$6\leqq b$ のとき



このとき，$f(t)$ は $-2<t<b$ において単調増加もしくは単調減少であるので，$f(t)=0$ を満たす t が存在する条件は $f(-2)\cdot f(b)<0$ である。

$$f(-2)\cdot f(b)<0$$

$$(9-4b)(2b^2-4b+1)<0$$

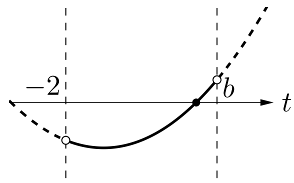
$$(9-4b)\left(b-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(b-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)<0$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ \frac{9}{4}<b$$

よって，$b \leqq \dfrac{2}{3}$，$6 \leqq b$ の範囲内でこれを満たすのは

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2} < b \leqq \frac{2}{3},\ 6 \leqq b$$

(ii) $\dfrac{2}{3} < b < 6$ のとき



このとき，$f(t)$ の最小値は放物線の軸 $t = \dfrac{2-b}{2}$ における値である。したがって，$f(t) = 0$ を満たす t が存在する条件は

$$f\left(\frac{2-b}{2}\right) \leqq 0 \text{ かつ } \left(f(-2) > 0 \text{ または } f(b) > 0\right)$$

である。

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2-b}{2}\right) &= -\frac{1}{4}b^2 - b \\ &= -\frac{1}{4}b(b+4) \leqq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ b \leqq -4,\ 0 \leqq b$$

また

$$f(-2) > 0 \text{ または } f(b) > 0$$

$$\Leftrightarrow 9 - 4b > 0 \text{ または } \left(b - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(b - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow b < \frac{9}{4} \text{ または } b < \frac{2-\sqrt{2}}{2} \text{ または } \frac{2+\sqrt{2}}{2} < b$$

$\Leftrightarrow b$ は任意の実数

よって，$\dfrac{2}{3} < b < 6$ の範囲内でこれらを満たすのは

$$\frac{2}{3} < b < 6$$

以上 (i)，(ii) をあわせると，求める条件は

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2} < b$$

解説

直角であるという条件から，$t^2 + (b-2)t - 2b + 1 = 0$ を導くことはできてほしい。これを導く際に，直角ならば傾きの積が -1 であること以外にも，ベクトルを設定して，内積が 0 になることからも導ける。

この条件を書いていて，そこから何をすればいいか迷ってしまった人もいるだろうが，ここから解の配置の問題へと転換させる問題は典型的なので，同じような問題に出会ったときには解けるようにしよう。

（侯明程，佐藤賢志郎，大久保佳徳）

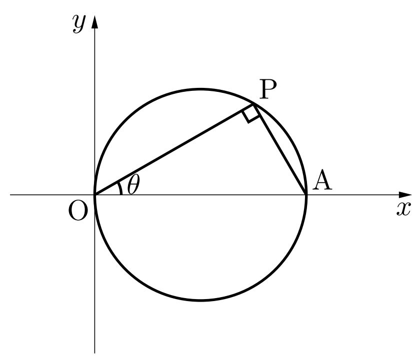
2016 年度 名古屋大学 前期 数学

2　三角関数の微分

出題範囲	三角関数／微分 (数学 III)
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	図形の性質や三角関数の性質を用いることがポイントであった。座標平面における三角形の面積の公式は頻繁に使うので覚えておこう。

解答

(1) 点 $(2, 0)$ を点 A とする。△OAP は $\angle\mathrm{APO} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形である。



$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OP}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{OP} = 2\cos\theta$$

よって，点 P の座標は

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{OP}\cos\theta, \mathrm{OP}\sin\theta) = \left(2\cos^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta\right)$$

(2) 点 Q は円 D 上の点なので $\mathrm{Q}\,(7\cos\alpha - 2, 7\sin\alpha)$ とおける。

△OPQ の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2}\left|\,(7\cos\alpha - 2)\cdot 2\sin\theta\cos\theta - 7\sin\alpha\cdot 2\cos^2\theta\right|$$

$$= |7\cos\theta\,(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha) - 2\sin\theta\cos\theta|$$

$$= |7\cos\theta\sin\,(\theta - \alpha) - 2\sin\theta\cos\theta|$$

ここで，点 P は第 1 象限の点であるから，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であり，$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$

$$S = \cos\theta|7\sin\,(\theta - \alpha) - 2\sin\theta|$$

S が最大となるのは，$\sin\,(\theta - \alpha) = -1$ となるときである。

$$\sin\,(\theta - \alpha) = -1$$

$$\theta - \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi(n\ \text{は整数})$$

$$\alpha = \theta + \frac{\pi}{2} - 2n\pi$$

このとき

$$\cos\alpha = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$$

よって，点 Q の座標は

$$(-7\sin\theta - 2, 7\cos\theta)$$

(3) $\sin\theta > 0$ より

$$S = \cos\theta\,|-7 - 2\sin\theta| = \cos\theta\,(7 + 2\sin\theta)$$

これを θ の関数とすると

$$S'(\theta) = -\sin\theta\,(7 + 2\sin\theta) + 2\cos\theta\cos\theta$$

$$= -4\sin^2\theta - 7\sin\theta + 2$$

$$= -(\sin\theta + 2)(4\sin\theta - 1)$$

$\sin\beta = \dfrac{1}{4}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とすると，増減表は次のようになる。

θ	$\cdots$	β	$\cdots$
$S'(\theta)$	$+$	0	$-$
$S(\theta)$	$\nearrow$		$\searrow$

したがって，$\theta = \beta$ で S は最大値をとる。

$\cos\beta > 0$ より

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

よって，S の最大値は

$$\frac{\sqrt{15}}{4}\left(7 + 2\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{15\sqrt{15}}{8}$$

解説

(1) 直角三角形 OAP に気づけば，比較的簡単な計算で答えを求めることができる。

(2) まず点 Q を円上にあるという条件から点 Q の座標を 1 変数で表し，面積公式を用いる。その後 S が最大となる条件を考える。

(3) 微分で増減表を書いて最大値を求めるだけの典型的な問題であり，定石通り解き進めていけばよい。

別解

(1) 負でない実数 r を用いて $\mathrm{P}\,(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と表せるので，これを円 C の方程式に代入すると

$$(r\cos\theta-1)^2+r^2\sin^2\theta=1$$

$$r\,(r-2\cos\theta)=0$$

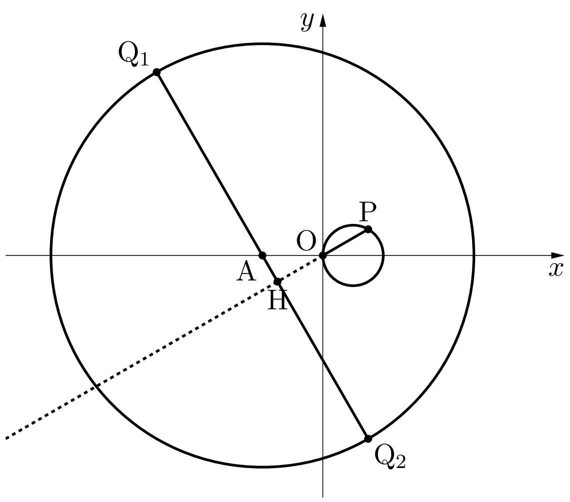
ここで，P の定義より一般の θ については $r=0$ とはならないことから

$$\mathrm{OP}=r=2\cos\theta$$

よって，点 P の座標は

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{OP}\cos\theta, \mathrm{OP}\sin\theta)=\left(2\cos^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta\right)$$

(2) 点 P を固定したとき，△OPQ の面積が最大となるのは，点 Q と直線 OP の距離 d が最大となるときである。
点 O，P，Q は一直線上にないとし，点 Q を通り直線 OP に平行な直線 l を考える。
直線 l と円 D が 2 点で交わるとき，円上の点のうち，直線 l に関して点 O，P と反対側の点をとることができ，これを新しく Q とすれば，d はより大きくなる。
よって，d が最大となるのは直線 l が円 D に接するときであり，点 Q の候補は 2 つある。これらを x 座標が小さい順に $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$ とする。また，線分 OP を O 側に延長して，線分 $\mathrm{Q_1Q_2}$ との交点を H とおく。このとき，4 つの点が $\mathrm{Q_1}$，A，H，$\mathrm{Q_2}$ の順に並ぶ。



円の性質より直線 OP と直線 $\mathrm{Q_1Q_2}$ は直交するので，点 $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$ について，d はそれぞれ

$$\begin{cases}\mathrm{Q_1H}=\mathrm{Q_1A}+\mathrm{AH}=7+\mathrm{AH}\\ \mathrm{Q_2H}=\mathrm{Q_2A}-\mathrm{AH}=7-\mathrm{AH}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Q_1H}>\mathrm{Q_2H}$$

ゆえに，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は点 Q が点 $\mathrm{Q_1}$ と一致するとき最大となる。

$\overrightarrow{\mathrm{AQ_1}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を反時計周りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させたものと同じ方向であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ_1}}\\ &= (-2, 0) + 7\cdot\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= (-2-7\sin\theta, \cos\theta)\end{aligned}$$

別解解説

(1) **解答** では幾何的な考察で解を求めたが，機械的に座標を代入して代数的に解くことも可能である。

(2) **解答** では座標を三角関数で表してから，計算式を用いて Q の座標を求めたが，**別解**のように幾何的な考察から点の座標を求めることも可能である。

このとき，接点が 2 つあることを忘れてはならない。どちらの接点が面積を最大にするのか考える必要がある。別解での議論は，線分 OP に平行な直線を x 軸，x 軸と直交し点 A を通る直線を y 軸，x 軸と y 軸の交点を原点として直交座標を取り直せば，図より自明であるが，「図より明らか」の範疇が気になる人のために，別解ではしっかりと議論した。**解答** と比べると計算量は減る。

また，もうひとつの候補の点 $\mathrm{Q_2}$ は，**解答** において $\sin(\theta-\alpha)=1$ となる点である。

（侯明程，佐藤賢志郎，沈有程）

2016 年度 名古屋大学 前期 数学

3 確率漸化式

出題範囲	確率／漸化式
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	確率漸化式の典型的な問題である。確率漸化式の問題は頻出であり，演習をよく積んでおき，すぐに漸化式を立てることができるようになるとよい。

解答

(1) 1 回目の操作で，袋 A から玉を取り出す直前では，袋 A には必ず赤玉が 2 個，白玉が 1 個入っている。

$P_1(0)$ となるのは袋 A から白玉を取り出すときで，$P_1(0) = \dfrac{1}{3}$

$P_1(1)$ となるのは袋 A から赤玉を取り出すときで，$P_1(1) = \dfrac{2}{3}$

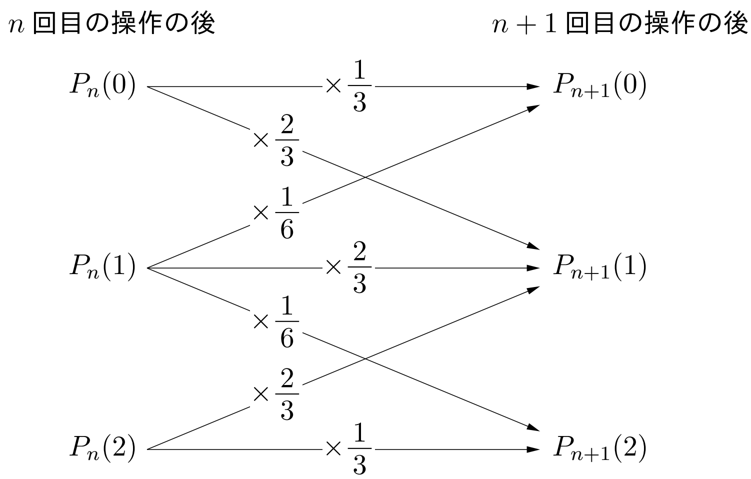
$P_1(2)$ とはなり得ないので $P_1(2) = 0$

(2) まず，すべての n について

$$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

は明らかに成り立つ。[1]

ここで，n 回目から $n+1$ 回目の操作を考える。



[2] 上の図より，以下のような漸化式が書ける。

[1] 全事象の確率の総和は 1 であり，今回の場合，$k = 0, 1, 2$ ですべての事象を表せる。

[2] 先に袋 B から玉を取り出すことに注意。

$$\begin{cases} P_{n+1}(0) &= P_n(0)\cdot\dfrac{1}{3}+P_n(1)\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}P_n(0)+\dfrac{1}{6}P_n(1) & \cdots\cdots ② \\ P_{n+1}(1) &= P_n(0)\cdot\dfrac{2}{3}+P_n(1)\cdot\dfrac{2}{3}+P_n(2)\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}\quad (①\text{ より}) & \cdots\cdots ③ \\ P_{n+1}(2) &= P_n(2)\cdot\dfrac{1}{3}+P_n(1)\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}P_n(2)+\dfrac{1}{6}P_n(1) & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

ここで③と(1)より，$n=1,2,\cdots$ に対して $P_n(1)=\dfrac{2}{3}$ である。よって，②に $P_n(1)=\dfrac{2}{3}$ を代入して

$$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{9}$$

$$P_{n+1}(0)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(P_n(0)-\frac{1}{6}\right)$$

$$P_n(0)-\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(P_1(0)-\frac{1}{6}\right)$$

$$P_n(0)=\frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\qquad\cdots\cdots ⑤$$

である。さらに，①に⑤と $P_n(1)=\dfrac{2}{3}$ を代入して

$$P_n(2)=\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

以上をまとめて

$$\begin{cases} P_n(0)=\dfrac{1}{6}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \\ P_n(1)=\dfrac{2}{3} \\ P_n(2)=\dfrac{1}{6}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \end{cases}$$

解説

(1) 1 回目の試行では，袋 B から取り出すものは必ず白玉なので，袋 A に赤玉 2 個，白玉 1 個ある状況だけを考えればよい。

(2) 漸化式を立てる問題であることに気づけたかどうかがポイントである。図をかくと，状態の遷移がわかりやすくなる。連立漸化式ではあるが，$P_n(1)$ が定数であることを利用すれば，基本的な漸化式に帰着することができる問題であった。

（侯明程，佐藤賢志郎）

2016 年度 名古屋大学 前期 数学

4　条件を満たす数列の決定

出題範囲	整数の性質／数列
難易度	★★★★☆
所要時間	20 分
傾向と対策	場合分けが多く解答が煩雑になりやすい問題である。すべての場合について考慮しているかを確かめつつ解きたい。

解答

(1) 解と係数の関係より

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} c+d=-a, \quad cd=b & \cdots\cdots ① \\ e+f=-c, \quad ef=d & \cdots\cdots ② \\ a+b=-e, \quad ab=f & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①〜③ の第 2 式をそれぞれかけ合わせると

$$abcdef=bdf$$

$$(ace-1)\,bdf=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

まず，$b=0$ のとき，③ の第 2 式より $f=0$ であり，② の第 2 式より $d=0$ となる。

つまりこのとき $b=d=f=0$ である。

これは $f=0$ のときや $d=0$ のときでも成立する。

このとき，①〜③ の第 1 式より

$$\begin{cases} c=-a & \cdots\cdots ⑤ \\ e=-c & \cdots\cdots ⑥ \\ a=-e & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

が成立する。

⑥，⑦ より $a=c$，⑤ より $a=-c$ であるので，これを満たす解は $a=c=e=0$ のみである。

次に，b，d，$f \fallingdotseq 0$ のとき，④ より $ace = 1$ である。

このとき考えられる a，c，e の組み合わせは次の 4 通りである。

$$(a, c, e) = (1, 1, 1)\text{，}(-1, -1, 1)\text{，}(-1, 1, -1)\text{，}(1, -1, -1)$$

(i) $(a, c, e) = (1, 1, 1)$ のとき

$b = d = f = -2$ となる。

(ii) $(a, c, e) = (-1, -1, 1)$ のとき

$b = 0$，$d = 2$，$f = 2$ となり，不適。[1]

(iii) $(a, c, e) = (-1, 1, -1)$ のとき

$b = 2$，$d = 0$，$f = 0$ となり，不適。

(iv) $(a, c, e) = (1, -1, -1)$ のとき

$b = 0$，$d = 0$，$f = 2$ となり，不適。

以上より，条件 $(*)$ を満たす解は以下の 2 つ。

$$(a, b, c, d, e, f) = (1, -2, 1, -2, 1, -2)\text{，}(0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

[1] 今は $b \fallingdotseq 0$ かつ　$d \fallingdotseq 0 f \fallingdotseq 0$ のときを考えている。

(2) (i) 【証明】数列 a_n，b_n について以下の漸化式が成立する。

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = -a_n & \cdots\cdots ⑧ \\ a_{n+1} b_{n+1} = b_n & \cdots\cdots ⑨ \end{cases}$$

(I) ある正の整数 k について，$b_k \fallingdotseq 0$ となる場合を考える。

⑨ より a_{k+1}，$b_{k+1} \fallingdotseq 0$ であり，帰納的に a_n，$b_n \fallingdotseq 0 \quad (n \geqq k+1)$

となる。よって，$n \geqq k + 1$ で

$$|b_n| = |a_{n+1}|\,|b_{n+1}| \geqq 1 \cdot |b_{n+1}|$$

すなわち，$|b_n|$ は広義単調減少する。

n がこの範囲にあるとき，$b_n \fallingdotseq 0$ より $|b_n| \geqq 1$ である。

したがって，数列 $\{|b_n|\}$ の最小値 $B\,(\geqq 1)$ が存在し，これを与える正の整数 $m\,(m \geqq k + 1,\ |b_m| = B)$ について

$$|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = B$$

となる。

(II) すべての n について $b_n = 0$ とすると，仮定より正の整数 $m = 1$ が存在して

$$0 = |b_1| = |b_2| = |b_3| = \cdots$$

となる。

以上より，正の整数 m で

$$|b_m| = |b_{m+1}| = |b_{m+2}| = \cdots$$

となるものが存在する。 (証明終)

(ii) (i) − (I) の場合について ⑨ より，$n \geqq m+1$ のとき

$$|a_n|\,B = B \quad \Leftrightarrow\ |a_n| = 1$$

また，このとき 2 次方程式 $x^2 + a_n x + b_n = 0$ の判別式は正である必要がある。$D = 1 - 4b_n$ であるから，実数解をもつのは $b_n = B$ ではなく $b_n = -B$ のときである。すなわち

$$b_{m+1} = b_{m+2} = b_{m+3} = \cdots = -B$$

となるので，⑨ より

$$a_{m+2} = a_{m+3} = \cdots = 1$$

である。さらにこれを ⑧ に代入すると

$$1 - B = -1 \quad \Leftrightarrow\ B = 2$$

また，$a_{m+2} = 1$，$b_{m+2} = -B = -2$ から

⑧ より　$a_{m+1} = 1$

⑨ より　$b_{m+1} = -2$

がわかるので，これを繰り返し用いれば，すべての $n\,(\leqq m+2)$ について $a_n = 1$, $b_n = -2$ となる。

以上をまとめると，すべての n について $a_n = 1$，$b_n = -2$ であることがわかる。

次に，(i) − (II) の場合について，⑧ より $n \geqq 1$ において

$$a_{n+1} = -a_n$$

となるから，解は次のとおり。

$$\begin{cases} a_n = a_1(-1)^{n-1} \\ b_n = 0 \end{cases}$$

以上より，条件 $(**)$ を満たす数列 a_n，b_n は

$$\begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = -2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a_n = a_1(-1)^{n-1} \\ b_n = 0 \end{cases}$$

解説

(1) 純粋な整数の問題である。a，b，c，d，e，f についての条件をうまく絞り込める条件を探したい。整数問題の絞り込みにおいて強力な条件は，積のみで構成された式である。今回もちょうど ①〜③ の第 2 式が積で構成されているので，これらをうまく用いたい。

(2) 漸化式を立てて，場合分けを行いたい。(1) から答の予想は何となくついているだろうが，それ以外の解がないということを示すのが手間である。

（侯明程，佐藤賢志郎，青木徹，沈有程）