2016 年度 名古屋大学 前期 数学

1 点の存在条件と解の配置

出題範囲	図形と方程式
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	点が存在するという条件から，解の配置の問題へと考えることができるかがカギとなる。解の配置自体は数学Ｉレベルの内容であるが，ミスが出やすい内容でもあるから，注意深く条件を考えるようにしよう。

解答

$\angle\mathrm{ATB}$ が直角であり，$-1 < t < b$ より $t+1 \neq 0$，$b-t \neq 0$ であるから

$$(\text{直線 AT の傾き}) \cdot (\text{直線 TB の傾き}) = -1$$

$$\frac{t^2-1}{t+1} \cdot \frac{b^2-t^2}{b-t} = -1$$

$$t^2+(b-1)t-(b-1)=0$$

この方程式が $-1 < t < b$ の範囲で少なくとも 1 つ解をもつことが条件である。ここで，$f(t)=t^2+(b-1)t-(b-1)$ とおくと

$$f(t)=\left(t+\frac{b-1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(b-1)^2-(b-1)$$

$$f(-1)=1-b+1-b+1=-2b+3$$

$$f(b)=b^2+(b-1)\cdot b-b+1=2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

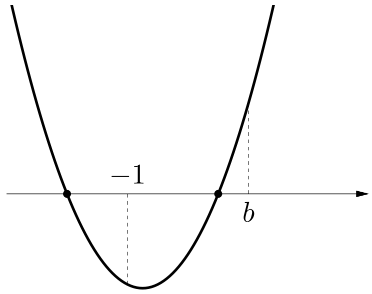
(i) 1 つの解をもつとき (重解を除く)

$f(b)>0$ より[1]，次の (I) または (II) が条件である。

[1] 端の片方の符号がわかっているので，もう一方の端の評価をすればよい。

(Ⅰ) 端について

$$f(-1) = -2b + 3 < 0 \Leftrightarrow b > \frac{3}{2}$$

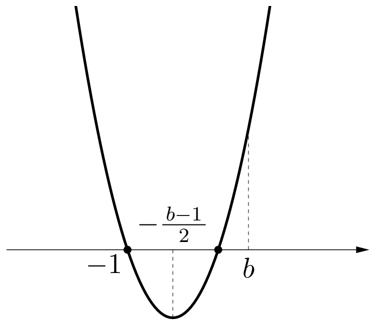


(Ⅱ) 端について

$$f(-1) = -2b + 3 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$$

軸 $t = -\frac{b-1}{2}$ について

$$-1 < -\frac{b-1}{2} < b \Leftrightarrow \frac{1}{3} < b < 3$$



したがって

$$b = \frac{3}{2}$$

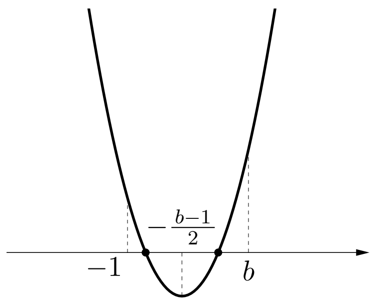
(Ⅰ)(Ⅱ) より

$$b \geqq \frac{3}{2}$$

(ii) 2 解をもつとき (重解を含む)

端について，$f(b) > 0$ より

$$f(-1) = -2b + 3 > 0 \Leftrightarrow b < \frac{3}{2}$$



軸 $t = -\frac{b-1}{2}$ について

$$-1 < -\frac{b-1}{2} < b \Leftrightarrow \frac{1}{3} < b < 3$$

頂点について

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b-1}{2}\right) &= -\frac{1}{4}(b-1)^2 - (b-1) \\ &= -\frac{1}{4}(b+3)(b-1) \leqq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow b \leqq -3,\ 1 \leqq b$$

これらの条件より

$$1 \leqq b < \frac{3}{2}$$

(i)(ii) より，条件を満たす b の範囲は $b \geqq 1$

解説

$\angle \mathrm{ATB}$ が直角であるという条件から，$t^2+(b-1)t-b+1=0$ を導くまでは自然な流れである。これは，直角ならば傾きの積が -1 であること以外にも，ベクトルを設定して，内積が 0 になることからも導ける。
この条件を導いて，そこから何をすればいいか迷ってしまった人もいるだろうが，ここから解の配置の問題へと転換させる問題はよくあるので，同じような問題に出会ったときには解けるようにしよう。解の配置の問題だとわかれば，あとは判別式または頂点，軸の位置，境界となるところでの値を調べればよい。

（沈有程，江崎ゆり子，寺内一記）

2016 年度 名古屋大学 前期 数学

2 カードの取り出し方の確率

出題範囲	場合の数と確率
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	(1)(2) は素直に考えて立式すればよく，(3) では n が定数なのでただの 2 次関数の最大を求める問題と見なすことができるが，k の値が整数しかとらないことには注意が必要である。

解答

(1) 条件を満たすためには，0 が書かれたカードを除く $n+1$ 枚のカードから k 枚取り出せばよいので，$k \leqq n+1$ のとき [1]，求める確率は

$$\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}{{}_{n+2}\mathrm{C}_k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \cdot \frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{n+2-k}{n+2}$$

これは，$k = n+2$ のときも成立する。

[1] $k = n+2$ のとき，${}_{n+1}\mathrm{C}_k$ が定義されていないので，場合分けが必要である。

(2) $k \leqq n+1$ のとき，2 が書かれたカード 1 枚と，1 が書かれた n 枚のカードから $k-1$ 枚を取り出せばよいので

$$\begin{aligned} Q_n(k) &= \frac{{}_n\mathrm{C}_{k-1}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_k} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{k(n+2-k)}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

これは，$k = n+2$ のときも成立する。

(3)

$$Q_n(k) = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left\{ -\left(k - \frac{n+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \right\}$$

(i) n が偶数のとき

$k = \dfrac{n+2}{2}$ で最大値 $\dfrac{n+2}{4(n+1)}$ をとる。

(ii) n が奇数のとき

$k = \dfrac{n+1}{2}$，$\dfrac{n+3}{2}$ で最大値をとり，その値は

$$\frac{1}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{(n+2)^2-1}{4} = \frac{(n+1)(n+3)}{4(n+2)(n+1)} = \frac{n+3}{4(n+2)}$$

以上より，求める最大値は

$$\begin{cases} n\text{ が偶数のとき} & \dfrac{n+2}{4(n+1)}\left(k=\dfrac{n+2}{2}\right) \\ n\text{ が奇数のとき} & \dfrac{n+3}{4(n+2)}\left(k=\dfrac{n+1}{2},\ \dfrac{n+3}{2}\right) \end{cases}$$

解説

この問題は，分母に k がなく，分子が k についての 2 次以下の多項式であったため，平方完成して解くのが一番早く簡単である。しかし，この方法は一般性がない。分母，分子ともに k があることは稀ではなく，むしろ分母，分子どちらかにしかないほうが稀であるので，そのときには **別解** の解法を用いる。**別解** の解法はとても重要であり，マスターしておく必要があるだろう。

別解

(3)

$$\begin{aligned} Q_n(k+1)-Q_n(k) &= \frac{(k+1)\{n+2-(k+1)\}}{(n+2)(n+1)}-\frac{k(n+2-k)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{\{(k+1)(n+1-k)-k(n+2-k)\}}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\cdot\left(\frac{n+1}{2}-k\right) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} k<\dfrac{n+1}{2}\text{のとき} & Q_n(k)<Q_n(k+1) \\ k=\dfrac{n+1}{2}\text{のとき} & Q_n(k)=Q_n(k+1) \\ k>\dfrac{n+1}{2}\text{のとき} & Q_n(k)>Q_n(k+1) \end{cases}$$

(i) n が奇数のとき

$$Q_n(1)<Q_n(2)<\cdots<Q_n\left(\frac{n+1}{2}\right)=Q_n\left(\frac{n+3}{2}\right)>\cdots>Q_n(n+1)>Q_n(n+2)$$

ここで，$Q_n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)=Q_n\left(\dfrac{n+3}{2}\right)=\dfrac{n+3}{4(n+2)}$ であることから

$k=\dfrac{n+1}{2},\ \dfrac{n+3}{2}$ で最大値 $\dfrac{n+3}{4(n+2)}$ をとる。

(ii) n が偶数のとき

$$Q_n(1)<Q_n(2)<\cdots<Q_n\left(\frac{n+2}{2}\right)>\cdots>Q_n(n+1)>Q_n(n+2)$$

したがって，$k=\dfrac{n+2}{2}$ で最大値 $\dfrac{n+2}{4(n+1)}$ をとる。

以上より求める最大値は

$$\begin{cases} n \text{ が偶数のとき} \quad \dfrac{n+2}{4(n+1)} \left(k=\dfrac{n+2}{2}\right) \\ n \text{ が奇数のとき} \quad \dfrac{n+3}{4(n+2)} \left(k=\dfrac{n+1}{2},\dfrac{n+3}{2}\right) \end{cases}$$

別解解説

$Q_n(k)$ を k に関する数列と見て，隣の項と比較していくことで，$Q_n(k)$ の最大値を求める解法である。

この方法では，k が増すにつれて数列の値が増加するか，減少するか，または変わらないかを知ることができる。

（沈有程，江崎ゆり子，寺内一記）

2016 年度 名古屋大学 前期 数学

3　約数関数と素因数分解

出題範囲	整数の性質
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	すべての正の約数の総和がどのような形で表せるかを知っていれば素早く解ける。時間をかけずに完答したい問題である。

解答

(1) p は 3 以上の素数なので，$2^k p$ を素因数分解すると $2^k \cdot p$ である。よって[1]

$$s(2^k p) = (1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^k)(1 + p)$$
$$= \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} \cdot (1 + p)$$
$$= (2^{k+1} - 1)(1 + p)$$

(2) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ であるから

$$s(2016) = (1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2)(1+7) = 6552$$

(3) n は 2016 の正の約数なので

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \ (0 \leqq a \leqq 5,\ 0 \leqq b \leqq 2,\ 0 \leqq c \leqq 1,\ a,\ b,\ c \text{ は整数})$$

と表せる。

(i) $a \leqq 3$ のとき

$$s(n) \leqq (1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+7) = 1560 < 2016$$

より不適。

(ii) $c = 0$ のとき

$$s(n) \leqq (1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2) = 819 < 2016$$

より不適。

(iii) $a = 4$，$c = 1$ のとき

$b = 0$，1，2 のときの $s(n)$ の値はそれぞれ 248，992，3224 であり不適である。

[1] 自然数 m が

$$m = x_1^{y_1} x_2^{y_2} \cdots x_n^{y_n}$$

に素因数分解できるとき，m の正の約数の総和は

$$(1 + x_1 + x_1^2 + \cdots x_1^{y_1})$$
$$\times (1 + x_2 + x_2^2 + \cdots x_2^{y_2})$$
$$\times \cdots \times (1 + x_n + x_n^2 + \cdots x_n^{y_n})$$

となる。

(iv) $a=5$, $c=1$ のとき

$b=0$, 1, 2 のときの $s(n)$ の値はそれぞれ 504，2016，6552

したがって $a=5$, $b=1$, $c=1$ であり

$$n=2^5\cdot 3^1\cdot 7^1=672$$

解説

(1) すべての正の約数の総和を式で表すことができれば解けるだろう。

(2) (1) と同じく，公式を用いるだけで解くことができる。

(3) とりあえず n は 2016 の正の約数なので，$n=2^a\cdot 3^b\cdot 7^c$ ($0\leqq a\leqq 5$, $0\leqq b\leqq 2$, $0\leqq c\leqq 1$, a, b, c は整数) とおいた。このとき，a は 6 通り，b は 3 通り，c は 2 通りですべての場合を考えると 36 通りであるので，範囲を絞りながら求める方針とし，大まかに不等式で評価していった。この問題は，記述はやや面倒だが，センター試験レベルなのでぜひ完答したい。

（沈有程，江崎ゆり子，寺内一記）