2015 年度 名古屋大学 前期 物理

問題 I　斜面上での円運動と衝突

出題範囲	円運動，衝突
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	傾いた平面上での非等速円運動の問題であるが，問われていることは鉛直面上での非等速円運動の基本問題とほぼ同じである。重力は斜面に沿った方向のみを考えるという点以外は，鉛直面上のときと同じ考え方で解くことができる。ただし，基本問題とはいえ計算量は多めである。

解答

(1) $N = m\dfrac{{v_0}^2}{r}$

(2) $v_1 = ev_0$ ，$t_1 = \dfrac{2\pi r}{ev_0}$

(3) $\omega = \dfrac{1}{r}\sqrt{{v_0}^2 - 2gr\sin\varphi(1-\cos\theta)}$

(4) $N' = m\dfrac{{v_0}^2}{r} - mg\sin\varphi(2-3\cos\theta)$

(5) **(ア)** 0　**(イ)** $\sqrt{2gr\sin\varphi}$　**(ウ)** $1 - \dfrac{{v_0}^2}{2gr\sin\varphi}$

(エ) $\sqrt{5gr\sin\varphi}$　**(オ)** $\dfrac{1}{3}\left(2 - \dfrac{{v_0}^2}{gr\sin\varphi}\right)$

(6) **(カ)** $\sin\theta_2$　**(キ)** $\cos\theta_2$　**(ク)** 0

(ケ) $-\cos\theta_2$　**(コ)** $\sin\theta_2$　**(サ)** $-\dfrac{1}{2}g\sin\varphi$

(7) **(シ)** $e^n v_0$　**(ス)** $\dfrac{\sqrt{5gr\sin\varphi}}{e^{n-1}}$　**(セ)** $\dfrac{\sqrt{5gr\sin\varphi}}{e^n}$

(ソ) $n+\alpha+\beta$

解説

(1)

円筒から受ける垂直抗力が向心力となり，物体 A は等速円運動する。円運動の運動方程式より，

$$N = m\frac{{v_0}^2}{r}$$

(2)

衝突後の速さ v_1 は,

$$\boldsymbol{v_1 = ev_0}$$

また，このときの円運動の周期が t_1 と等しく，等速円運動の角速度 $\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{ev_0}{r}$ であるから,

$$\boldsymbol{t_1} = \frac{2\pi}{\omega_1} \boldsymbol{= \frac{2\pi r}{ev_0}}$$

（t_1 を求める別解）

円運動の周期は t_1 と等しく，1 周の長さは $2\pi r$ なので,

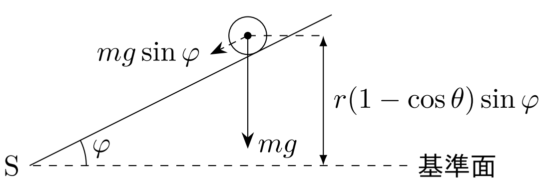
$$t_1 = \frac{2\pi r}{v_1} = \frac{2\pi r}{ev_0}$$

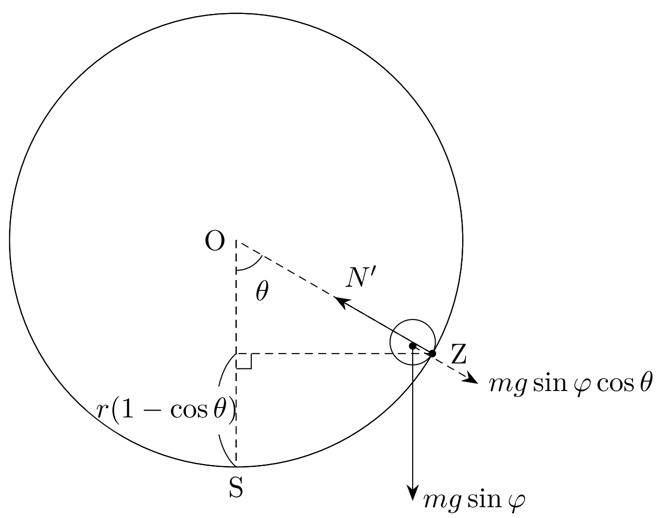
(3)

点 S を通る水平面を重力による位置エネルギーの基準面（つまりこの面における位置エネルギーは 0）とすると，点 Z における物体 A の基準面からの高さは $r(1-\cos\theta)\sin\varphi$（下図参照)。よって点 Z における物体 A の重力による位置エネルギーは $mgr\sin\varphi(1-\cos\theta)$ と書ける。 物体 A が初めて点 Z を通過するときの速さは $r\omega$ であるから，力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 + mgr\sin\varphi(1-\cos\theta)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\omega = \frac{1}{r}\sqrt{{v_0}^2 - 2gr\sin\varphi(1-\cos\theta)}}$$





(4)

円運動の運動方程式より，

$$mr\omega^2 = N' - mg\sin\varphi\cos\theta$$

$$\therefore\ \boldsymbol{N' = m\frac{{v_0}^2}{r} - mg\sin\varphi(2-3\cos\theta)}$$

(5)

まず，物体 A が点 Q に達する前に角速度または垂直抗力が 0 になる場合，垂直抗力が 0 になる前に角速度が 0 になれば，物体 A は(I)の振る舞いをし，角速度が 0 になる前に垂直抗力が 0 になれば，物体 A は(II)の振る舞いをする。角速度 ω が 0 になるのは，(3) より，

$${v_0}^2 - 2gr\sin\varphi(1-\cos\theta) = 0$$

$$\therefore\quad \cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{{v_0}^2}{gr\sin\varphi} \qquad \cdots\cdots①$$

のときで，垂直抗力 N' が 0 になるのは，(4) より，

$$m\frac{{v_0}^2}{r} - mg\sin\varphi(2-3\cos\theta) = 0$$

$$\therefore\quad \cos\theta = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{{v_0}^2}{gr\sin\varphi} \qquad \cdots\cdots②$$

のときである。ここで，$0 < \theta < \pi$ であるから，θ の大小関係とそれに対応する $\cos\theta$ の大小関係が逆になることに注意すれば，垂直抗力が 0 になる前に角速度が 0 になるのは，

$$1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{{v_0}^2}{gr\sin\varphi} \geqq \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{{v_0}^2}{gr\sin\varphi}$$

$$\therefore\quad \frac{{v_0}^2}{gr\sin\varphi} \leqq 2$$

のとき。よって，(I)の振る舞いをするのは，$v_0 > 0$ に気をつければ，

$$\underbrace{\boldsymbol{0}}_{(ア)} < v_0 \leqq \underbrace{\boldsymbol{\sqrt{2gr\sin\varphi}}}_{(イ)}$$

のときだとわかる。このとき，角速度が 0 となるときの角度 θ_1 は①を満たすことから，

$$\cos\theta_1 = \underbrace{\boldsymbol{1 - \frac{{v_0}^2}{2gr\sin\varphi}}}_{(ウ)}$$

また，物体 A が点 Q を通過して(III)の振る舞いをする条件は，$\theta=\pi$ としたときの垂直抗力 N' が 0 以上であることで，それはすなわち，

$$m\frac{{v_0}^2}{r}-mg\sin\varphi(2-3\cos\pi)=m\frac{{v_0}^2}{r}-5mg\sin\varphi \geqq 0$$

$$\therefore\quad v_0 \geqq \underbrace{\boldsymbol{\sqrt{5gr\sin\varphi}}}_{(エ)}$$

であることである。よって，(II)の振る舞いをするのは $\sqrt{2gr\sin\varphi}<v_0<\sqrt{5gr\sin\varphi}$ のときで，このとき，垂直抗力が 0 となる角度 θ_2 は②を満たすことから，

$$\cos\theta_2=\underbrace{\boldsymbol{\frac{1}{3}\left(2-\frac{{v_0}^2}{gr\sin\varphi}\right)}}_{(オ)}$$

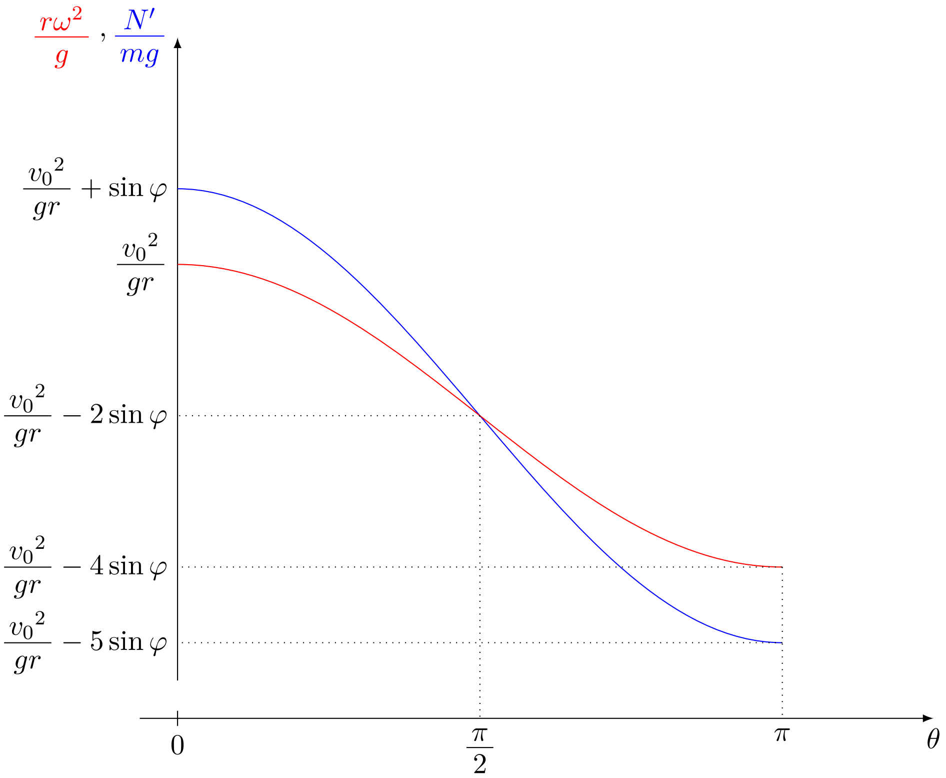
である。

※補足

$$\omega^2=\frac{1}{r^2}\left\{{v_0}^2-2gr\sin\varphi(1-\cos\theta)\right\}\Leftrightarrow\frac{r\omega^2}{g}=\frac{{v_0}^2}{gr}-2\sin\varphi(1-\cos\theta)$$

$$N'=m\frac{{v_0}^2}{r}-mg\sin\varphi(2-3\cos\theta)\quad\Leftrightarrow\frac{N'}{mg}=\frac{{v_0}^2}{gr}-\sin\varphi(2-3\cos\theta)$$

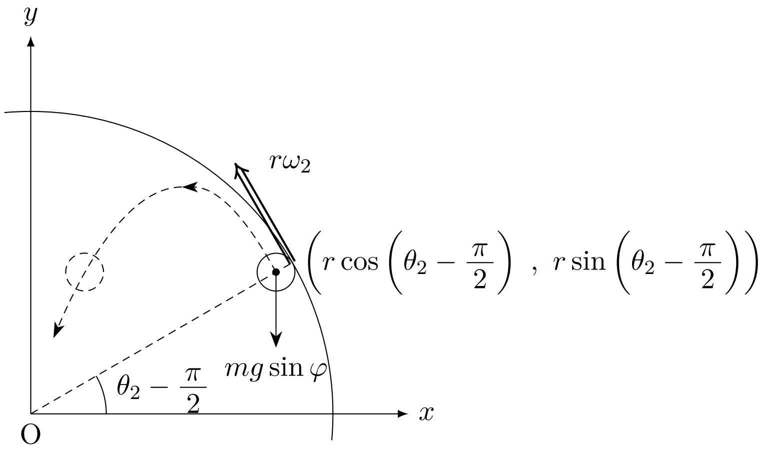
より，これらをグラフに図示すると以下のようになる。ただし，赤線が $\dfrac{r\omega^2}{g}$，青線が $\dfrac{N'}{mg}$ を表す。



ところで，$\frac{r\omega^2}{g}$ と $\frac{N'}{mg}$ はどちらも負の値はとらないので，どちらかが 0 になった時点で両者は上のグラフに従った変化をやめる。つまり，縦軸の 0 の位置によって物体 A の振る舞いが変化する。以下でその具体的な振る舞いを追ってみよう。

$\frac{{v_0}^2}{gr} - 2\sin\varphi < 0$ であれば，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で N' よりも先に ω が 0 となるので物体 A は円軌道をそのまま引き返す。$\frac{{v_0}^2}{gr} - 2\sin\varphi = 0$ であれば，点 $\mathrm{P}(\theta = \frac{\pi}{2})$ で ω と N' が同時に 0 になるが，次の瞬間重力によって物体 A は y 軸負の向きに動き出そうとするので，結局，円軌道を引き返すことになる。$\frac{{v_0}^2}{gr} - 5\sin\varphi \leqq 0 < \frac{{v_0}^2}{gr} - 2\sin\varphi$ であれば，$\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \pi$ の範囲で ω より先に N' が 0 となるので物体 A は接線方向に向かって速さ $r\omega$ で飛び出し，放物運動をする。ただし点 $\mathrm{Q}(\theta = \pi)$ で $N' = 0$ となった場合（すなわち $\frac{{v_0}^2}{gr} - 5\sin\varphi = 0$ の場合）は，水平方向に飛び出した次の瞬間に再び円筒から垂直抗力を受け始めるため，円軌道から離れずに進む。$\frac{{v_0}^2}{gr} - 5\sin\varphi > 0$ であれば，ω も N' も 0 にならないため物体 A は円筒から離れずに円運動を続ける。

(6)



点 Z_2 の座標は，

$$\left(r\cos\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)\ ,\ r\sin\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\therefore\ (r\sin\theta_2\ ,\ -r\cos\theta_2)$$

また，物体 A の角速度が ω_2 であるから，点 Z_2 での速度は，

$$(r\omega_2\cos\theta_2\ ,\ r\omega_2\sin\theta_2)$$

さらに，点 Z_2 において物体 A にはたらく力の xy 平面に平行な成分は，重力の斜面に平行な成分のみである。よって，運動方程式より，y 方向の加速度を a_y とすると，

$$ma_y=-mg\sin\varphi$$

$$\therefore\ a_y=-g\sin\varphi$$

以上より，物体 A は斜方投射のような運動をし，時刻 t における物体 A の位置 (x,y) は，

$$x=r\cdot\underbrace{\boldsymbol{\sin\theta_2}}_{\text{(カ)}}+r\omega_2t\cdot\underbrace{\boldsymbol{\cos\theta_2}}_{\text{(キ)}}+t^2\cdot\underbrace{\boldsymbol{0}}_{\text{(ク)}}$$

$$y=r\cdot\underbrace{(\boldsymbol{-\cos\theta_2})}_{\text{(ケ)}}+r\omega_2t\cdot\underbrace{\boldsymbol{\sin\theta_2}}_{\text{(コ)}}+t^2\cdot\underbrace{\left(\boldsymbol{-\frac{1}{2}g\sin\varphi}\right)}_{\text{(サ)}}$$

(7)

1 回反射板と衝突すると速さは e 倍になるので，物体 A が反射板と n 回衝突をした直後の速さ v_n は，$v_n=\underbrace{\boldsymbol{e^nv_0}}_{\text{(シ)}}$ である。n 回点 Q を通過する条件は，(5) より $n-1$ 回反射板を衝突した直後の速さが $\sqrt{5gr\sin\varphi}$ 以上であることである。また，n 回反射板と衝突した後に点 Q を通過しない条件は，n 回反射板を衝

突した直後の速さが $\sqrt{5gr\sin\varphi}$ より小さいことである。したがって，求める条件は，

$$e^{n-1}v_0 \geqq \sqrt{5gr\sin\varphi} \quad \text{かつ} \quad e^n v_0 < \sqrt{5gr\sin\varphi}$$

$$\therefore \quad \underbrace{\boldsymbol{\frac{\sqrt{5gr\sin\varphi}}{e^{n-1}}}}_{(\text{ス})} \leqq v_0 < \underbrace{\boldsymbol{\frac{\sqrt{5gr\sin\varphi}}{e^{n}}}}_{(\text{セ})}$$

これを n について整理すると，$0 < e < 1$ であるから，

$$\log_e \frac{\sqrt{5gr\sin\varphi}}{v_0} < n \leqq \log_e \frac{\sqrt{5gr\sin\varphi}}{v_0} + 1$$

ただし，e は反発係数であって，自然対数の底ではないことに注意すること。

また，v_0 の大きさを $\left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha}$ 倍，$\sin\varphi$ の大きさを $e^{2\beta}$ 倍にしたときの衝突回数を N 回とすると，物体 A が N 回だけ点 Q を通過する条件は，同様にして，

$$e^{N-1}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha}v_0 \geqq \sqrt{5gr\cdot e^{2\beta}\sin\varphi} \quad \text{かつ} \quad e^{N}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha}v_0 < \sqrt{5gr\cdot e^{2\beta}\sin\varphi}$$

$$\therefore \quad e^{N-\alpha-\beta-1}v_0 \geqq \sqrt{5gr\sin\varphi} \quad \text{かつ} \quad e^{N-\alpha-\beta}v_0 < \sqrt{5gr\sin\varphi}$$

これを $N-\alpha-\beta$ について整理すると，

$$\log_e \frac{\sqrt{5gr\sin\varphi}}{v_0} < N-\alpha-\beta \leqq \log_e \frac{\sqrt{5gr\sin\varphi}}{v_0} + 1$$

ここで，$\log_e \frac{\sqrt{5gr\sin\varphi}}{v_0} < n \leqq \log_e \frac{\sqrt{5gr\sin\varphi}}{v_0} + 1$ の範囲に整数 n は 1 つしか存在しないことから，

$$N-\alpha-\beta = n$$

$$\therefore \quad N = \underbrace{\boldsymbol{n+\alpha+\beta}}_{(\text{ソ})} \ (\text{回})$$

（岡部律心，岡田和也，山崎裕太郎）

2015 年度 名古屋大学 前期 物理

問題Ⅱ　一様な磁場中での導体棒の運動

出題範囲	磁場を横切る導体棒
難易度	★★★★★
所要時間	25 分
傾向と対策	(1)，(2) は基本的な問題であるが，(3) 以降は微小変化を扱った式変形があり難しい。キルヒホッフの法則と運動方程式によって電流 I と位置 x（またはその微分：速度 v）の（特別な位置についてではなく）運動中全体についての関係式を求め，エネルギー保存則によって点 O，A，B などの特別な位置での未知量を求めるという大まかな形がわかっていれば方針を立てやすいだろう。

解答

(1) （イ）

(2) $I_0 = \dfrac{Mg\tan\theta}{Bl}$

(3) $L = \dfrac{MR^2}{(Bl\cos\theta)^2}$

(4) $\Delta I = \dfrac{Bl}{L}\Delta x$

(5) $a = \dfrac{\sqrt{2}-1}{Bl}LI_0$

(6) $h = \dfrac{LI_0\tan\theta}{Bl}$

(7) $T = \dfrac{\pi\sqrt{ML}}{2Bl}\left(1 + \dfrac{1}{\cos\theta}\right)$

(8) $W = Mgh$

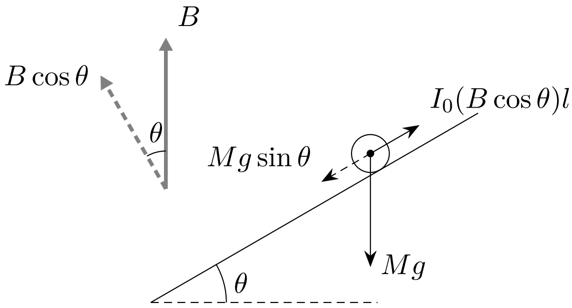
解説

(1)

レンツの法則より，回路を貫く磁束の変化を打ち消す向きに電流は流れる。いま，導体棒が下降運動を始めると回路を上向きに貫く磁束が増加するので，下向きの磁束を発生させる向き，つまり Q から P に向かう方向 **（イ）** に電流が流れる。

(2)

磁場の回路に垂直な成分は $B\cos\theta$ である。よって，レールに沿った方向の導体棒にはたらく力のつり合いより，



$$I_0(B\cos\theta)l - Mg\sin\theta = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{I_0} = \frac{Mg\sin\theta}{Bl\cos\theta} \boldsymbol{=} \boldsymbol{\frac{Mg\tan\theta}{Bl}}$$

(3)

導体棒に流れる電流が一定のとき，コイルに起電力は生じない。よって，導体棒の速さを v_0 とすると，キルヒホッフ第二法則より，

$$v_0(B\cos\theta)l - RI_0 = 0$$

$$\therefore \quad v_0 = \frac{RI_0}{Bl\cos\theta}$$

コイルに蓄えられたエネルギーと導体棒の運動エネルギーが等しいので，

$$\frac{1}{2}M{v_0}^2 = \frac{1}{2}L{I_0}^2$$

$$M\left(\frac{RI_0}{Bl\cos\theta}\right)^2 = L{I_0}^2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{L = \frac{MR^2}{(Bl\cos\theta)^2}}$$

(4)

導体棒の速さは $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ であるから，導体棒に生じる誘導起電力は $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}Bl$ である。また，コイルに生じる起電力は $-L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ であるから，キルヒホッフ第二法則より，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}Bl - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\Delta I = \frac{Bl}{L}\Delta x}$$

(5)

本文と (4) より位置 x で導体棒に流れる電流 I は，

$$I = I_0 + \frac{Bl}{L}x$$

と表せる。

エネルギー保存則より，点 O を通過する瞬間の回路の全エネルギーと点 A での全エネルギーは等しい。(3) より，点 O ではコイルに蓄えられたエネルギーと導体棒の運動エネルギーが等しいので，全エネルギーはコイルに蓄えられたエネルギーの 2 倍である。また，点 A で導体棒は静止するので，回路のエネルギーはコイルに蓄えられたエネルギーのみである。したがって，

$$\frac{1}{2}L{I_0}^2 \times 2 = \frac{1}{2}L\left(I_0 + \frac{Bl}{L}a\right)^2$$

I_0，$I_0 + \dfrac{Bl}{L}a$ はともに正であるから，

$$\sqrt{2}I_0 = I_0 + \frac{Bl}{L}a$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a = \frac{\sqrt{2}-1}{Bl}LI_0}$$

(6)

(4) と同様にして考えると，OB 間で O → B の向きに微小量 $\Delta x'$ だけ移動したとき，キルヒホッフ第二法則より，

$$-\frac{\Delta x'}{\Delta t}Bl\cos\theta - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0$$

$$\therefore \quad \Delta I = -\frac{Bl\cos\theta}{L}\Delta x'$$

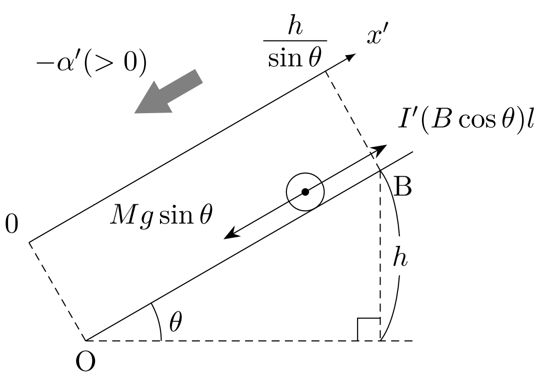
(5) と同様にすると，O からの位置 $x'(x'>0)$ で導体棒に流れる電流 I'（Q → P の向きを正とする）は，

$$I' = I_0 - \frac{Bl\cos\theta}{L}x'$$

と表される。

位置 x' での導体棒の加速度（斜面上向きを正とする）を α' とすると，運動方程式より，

$$M\alpha' = -Mg\sin\theta + I'(B\cos\theta)l$$



（2）より，$Mg\sin\theta = I_0 Bl\cos\theta$ であるから，

$$M\alpha' = (I' - I_0)Bl\cos\theta = -\frac{(Bl\cos\theta)^2}{L}x'$$

これは単振動の運動方程式と同じ形であるので，その角振動数 ω は，

$$\omega = \frac{Bl\cos\theta}{\sqrt{ML}}$$

で表される。振幅は OB の長さ $\dfrac{h}{\sin\theta}$ であり，振幅の中心は $x' = 0$ であるから，点 O での速さは $\omega\cdot\dfrac{h}{\sin\theta}$ で最大となる。これは v_0 と等しい（後述）から，

$$\omega\cdot\frac{h}{\sin\theta} = \frac{Blh}{\sqrt{ML}\tan\theta} = v_0\left(= \frac{RI_0}{Bl\cos\theta}\right)$$

解答に M，R は使えないので，運動エネルギーを考えると，（3）より，

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{Blh}{\sqrt{ML}\tan\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}M{v_0}^2 = \frac{1}{2}L{I_0}^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{h = \frac{LI_0\tan\theta}{Bl}}$$

※点 O での速さが v_0 である理由

（5）の後 A から O に向かい，O に達する直前に導体棒に流れる電流は，$x = 0$ を代入すると I_0 である。点 O を通過する前後で電流は急激に変化しないので，エネルギー保存則より，このときの速さは v_0 である。また，これより解答中にあるように，$I' = I_0 - \dfrac{Bl\cos\theta}{L}x'$ が成り立つことがわかる。

(7)

導体棒が OA 間を運動するときの運動方程式は，加速度を α として，（5）より

$$M\alpha = -\left(I_0 + \frac{Bl}{L}x\right)Bl = -\frac{(Bl)^2}{L}\left(x + \frac{LI_0}{Bl}\right)$$

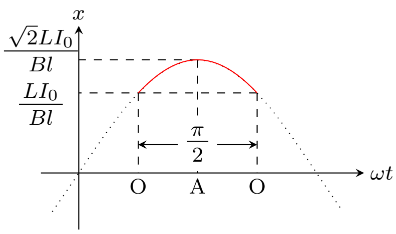
これは単振動の式と同じ形であるので，角振動数 ω' は，

$$\omega' = \frac{Bl}{\sqrt{ML}}$$

である。

また，振動の中心は $x=-\dfrac{LI_0}{Bl}$ であるので，振幅は，

$$a-\left(-\frac{LI_0}{Bl}\right)=\frac{\sqrt{2}LI_0}{Bl}$$



である。よって，導体棒が O → A → O と進むとき，右図より，$\dfrac{1}{4}$ 周期分だけ運動する。

また，(6) より OB 間での単振動の中心は O であるから，O → B と進むときも $\dfrac{1}{4}$ 周期分だけ運動する。

したがって，求める総時間 T は，

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{\omega'}+\frac{2\pi}{\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\pi\left(\frac{\sqrt{ML}}{Bl}+\frac{\sqrt{ML}}{Bl\cos\theta}\right)$$

$$\boldsymbol{=\frac{\pi\sqrt{ML}}{2Bl}\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

(8)

導体棒が水平レール上で静止したとき，回路の全エネルギーは 0 である。よって，抵抗 R で発生した熱エネルギーの総量 W は，スイッチ S を開にしたときの回路の全エネルギーに等しい。

点 B で導体棒に流れる電流 I_{B} は，(6) の I' に $x'=\dfrac{h}{\sin\theta}$ を代入して，

$$I_{\mathrm{B}}=I_0-\frac{Bl\cos\theta}{L}\cdot\frac{h}{\sin\theta}$$

$$=I_0-\frac{Bl}{L\tan\theta}\cdot\frac{LI_0\tan\theta}{Bl}$$

$$=I_0-I_0$$

$$=0$$

したがって，スイッチ S を開にしたときの回路の全エネルギーは，導体棒の位置エネルギーのみである。したがって，

$$\boldsymbol{W=Mgh}$$

（別解）

（5）と同様に考えると，エネルギー保存則よりスイッチを開にした瞬間の回路の全エネルギーは点 O でのコイルに蓄えられたエネルギーの 2 倍であるから，

$$W = \frac{1}{2}L{I_0}^2 \times 2 = L{I_0}^2$$

※補足

本解および別解より，

$$Mgh = L{I_0}^2$$

という関係式が得られるが，これを導く。

（2）より，

$$\tan\theta = \frac{I_0 Bl}{Mg}$$

（6）の解答の h に代入すると，

$$h = \frac{LI_0 \tan\theta}{Bl} = \frac{LI_0}{Bl} \cdot \frac{I_0 Bl}{Mg} = \frac{L{I_0}^2}{Mg}$$

$$\therefore \quad Mgh = L{I_0}^2$$

（ 岡部律心，岡田和也，山崎裕太郎 ）

2015 年度 名古屋大学 前期 物理

問題 III　熱機関の効率

出題範囲	気体の状態変化
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	熱機関の効率についての問題である。熱力学の式の扱いに慣れ，各変化に伴う内部エネルギー，熱，仕事の変化を素早く正確に計算できることが必要である。(1) では値が正になるように答える必要があるので，気体が熱を吸収するのか放出するのか，仕事をするのかされるのか，には十分注意しなければならない。(3)，(6) ではポアソンの公式を利用して断熱変化後の未知量を求める。ポアソンの公式は発展的な内容ではあるが，よく題材にされるため，慣れておくとよいだろう。

解答

(1) **(あ)** (1)　**(い)** (2)　**(う)** (2)

(え) (3)　**(お)** (3)　**(か)** (1)

(a) $\dfrac{5}{2}R(T_1 - T_A)$　**(b)** $R(T_1 - T_A)$　**(c)** $\dfrac{3}{2}R(T_2 - T_A)$

(d) 0　**(e)** 0　**(f)** $\dfrac{3}{2}R(T_2 - T_B)$

(2) $W = R(T_A - T_1) + \dfrac{3}{2}R(T_2 - T_B)$　**(3)** 32 倍以上

(4) $e = \dfrac{9 - 56x}{12(1 - x)}$　**(5)** $x = \dfrac{1}{32}$，$e_{\min} = 0.62$　**(6)** $e' = 0.75$

解説

まず，理想気体の状態方程式より，

$$p_1 V_1 = RT_1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$p_1 V_2 = RT_A \qquad \cdots\cdots ②$$

$$p_2 V_2 = RT_2 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$p_B V_1 = RT_B \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ。

(1)

(i) 状態 1 →状態 A

体積が減少するとき，気体は外界から仕事をされ **(2)** $_{(い)}$ ，定圧変化であるからその仕事量は，

$$W_{1\to A} = -p_1(V_2 - V_1)$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{R(T_1 - T_A)}}_{(b)}$$

ただし，式変形には①と②を用いた。

また，$T_A < T_1$ であるから，内部エネルギー変化 $\Delta U_{1\to A} = \dfrac{3}{2}R(T_A - T_1)$ は負。熱力学第一法則より，吸収した熱量は内部エネルギー変化と気体にした仕事との和であるから，その符号も負。よって気体は外界に熱を放出する **(1)** $_{(あ)}$ 。その熱量は，

$$-Q_{1\to A} = \Delta U_{1\to A} - W_{1\to A}$$

$$Q_{1\to A} = -\left\{\frac{3}{2}R(T_A - T_1) + R(T_A - T_1)\right\}$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{\frac{5}{2}R(T_1 - T_A)}}_{(a)}$$

(別解)

定圧モル比熱は $C_p = \dfrac{5}{2}R$ であるから，気体が外界に放出する熱量は，

$$Q_{1\to A} = -\frac{5}{2}R(T_A - T_1) = \frac{5}{2}R(T_1 - T_A)$$

(ii) 状態 A →状態 2

定積変化であるから，気体は仕事をせず **(3)** $_{(え)}$ ，求める仕事量は，

$$W_{A\to 2} = \underbrace{\boldsymbol{0}}_{(d)}$$

このとき，熱力学第一法則より，気体が外界から吸収する熱量は内部エネルギーの変化と等しい。また，$T_A < T_2$ であるから，その値は正であり，気体は外界から熱を吸収する **(2)** $_{(う)}$ 。その熱量は，

$$Q_{A\to 2} = \underbrace{\boldsymbol{\frac{3}{2}R(T_2 - T_A)}}_{(c)}$$

（別解）

定積モル比熱は $C_V = \dfrac{3}{2}R$ であるから，気体が外界から吸収する熱量は，

$$Q_{\mathrm{A}\to 2} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_{\mathrm{A}})$$

（iii）状態 2 →状態 B

断熱変化であるから，気体は外界と熱のやり取りを行わず **(3)** (お)，外界とやり取りする熱量は，

$$Q_{2\to \mathrm{B}} = \underset{(\mathrm{e})}{\mathbf{0}}$$

気体が膨張するとき気体は外界に仕事をし **(1)** (か)，その仕事量は熱力学第一法則より，内部エネルギーの変化と大きさが等しく，符号が反転するので，

$$\begin{aligned} W_{2\to \mathrm{B}} &= -\frac{3}{2}R(T_{\mathrm{B}} - T_2) \\ &= \underbrace{\boldsymbol{\frac{3}{2}R(T_2 - T_{\mathrm{B}})}}_{(\mathrm{f})} \end{aligned}$$

（iv）状態 B →状態 1（この問題では必要ないが，このあとの問題のために求めておく）

（ii）とまったく同じように考えると，気体は仕事をせず，仕事量は，

$$W_{\mathrm{B}\to 1} = 0$$

また，気体は外界に熱を放出し，その熱量は，

$$Q_{\mathrm{B}\to 1} = \frac{3}{2}R(T_B - T_1)$$

◆ Column

放熱か吸熱か

ある状態変化の際に気体は外界に熱を放出するのか，または外界から熱を吸収するのかを $p-V$ グラフから判断する方法を紹介しよう。そのためには断熱曲線を利用するのだが，まずはその断熱曲線の性質について理解する必要があるだろう。

ある $1\,\mathrm{mol}$ の気体の微小変化における，気体が外界から吸収する熱量を q，気体が外界にする仕事を w，内部エネルギー変化を dU とすると，熱力学第一法則より，

$$q = dU + w$$

が成り立つ。$dU = C_V dT = \dfrac{C_V}{R}(pdV + Vdp)$，$w = pdV$ と書けることから，

$$q = \frac{C_V + R}{R}pdV + \frac{C_V}{R}Vdp = \frac{C_p}{R}pdV + \frac{C_V}{R}Vdp$$

よって，

$$\begin{aligned} q \gtreqless 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{C_p}{R}pdV + \frac{C_V}{R}Vdp \gtreqless 0 \\ &\Leftrightarrow\; \gamma\frac{dV}{V} \gtreqless -\frac{dp}{p} \end{aligned}$$

始点を i，終点を f という添え字で表現して両辺を積分すると

$$\gamma\int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}}\frac{dV}{V} \gtreqless -\int_{p_\mathrm{i}}^{p_\mathrm{f}}\frac{dp}{p}$$

$$\therefore\;\; \gamma\left(\log V_\mathrm{f} - \log V_\mathrm{i}\right) \gtreqless -(\log p_\mathrm{f} - \log p_\mathrm{i})$$

$$\Leftrightarrow\;\; p_\mathrm{f}{V_\mathrm{f}}^{\gamma} \gtreqless p_\mathrm{i}{V_\mathrm{i}}^{\gamma} \quad \text{（複号はすべて同順）}$$

つまり，積分範囲の始点から終点における各微小変化がすべて吸熱過程 $(q>0)$ ならば，不等号は$>$が採用され，したがって pV^γ の値は増加する。同様に，各微小変化がすべて放熱過程 $(q<0)$ ならば，不等号は$<$が採用され，pV^γ の値は減少する。また，各微小変化がすべて断熱過程 $(q=0)$ ならば，pV^γ の値は一定であり（ポアソンの公式），その式が表す曲線こそ断熱曲線である。

一般に，異なる断熱曲線は互いに交わらないという性質をもつので，上の考察の結果を利用すれば，吸熱し続ける過程では，上にある側の断熱曲線を横切り続け，放熱し続ける過程では，下にある断熱曲線を横切り続けることがわかる（図 1 参照）。

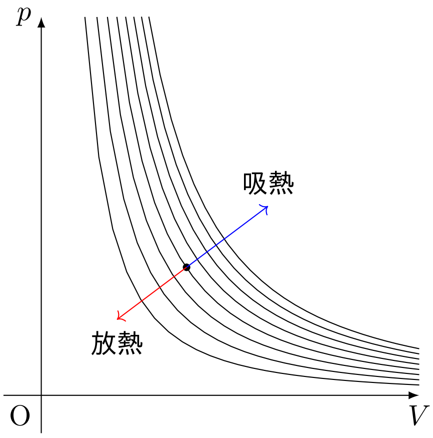


図 1

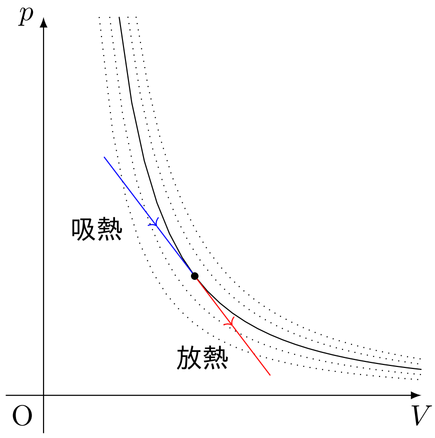


図 2

今回の問題で上の考え方を適用すると，過程 1 → A と過程 B → 1 では下にある断熱曲線を横切り続けるから，これらは放熱過程で，過程 A → 2 では上にある断熱曲線を横切り続けるから，これは吸熱過程であるとわかる。

ちなみに，始点と終点を通る 2 本の断熱曲線だけからでは，その過程がつねに吸熱し続ける過程なのか放熱し続ける過程なのかはいえないということには注意しておかなければならない。たとえば負の傾きをもつ直線に沿って状態が変化するとき，その直線が，ある断熱曲線に接する点で吸熱と放熱が交代してしまうことがある（図 2 参照）。

(2)

(1) で求めた (i) 〜(iv) の状態変化における仕事の総和が，熱機関が 1 サイクルにおいて外界に行う正味の仕事 W に等しい。したがって，

$$\boldsymbol{W} = -W_{1\to\mathrm{A}} + W_{\mathrm{A}\to 2} + W_{2\to\mathrm{B}} + W_{\mathrm{B}\to 1}$$

$$= R(T_{\mathrm{A}} - T_1) + 0 + \frac{3}{2}R(T_2 - T_{\mathrm{B}}) + 0$$

$$\boldsymbol{= R(T_{\mathrm{A}} - T_1) + \frac{3}{2}R(T_2 - T_{\mathrm{B}})}$$

(3)

本文より，断熱変化においては $pV^{\gamma} =$ 一定 が成り立つので，状態 2 →状態 B の変化において，

$$p_2{V_2}^{\gamma} = p_{\mathrm{B}}{V_1}^{\gamma}$$

ここで，

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3}$$

であり，また $\dfrac{V_1}{V_2} = 8$ であるから，

$$p_{\mathrm{B}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} p_2 = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}} p_2 = \frac{1}{32}p_2$$

よって，$p_{\mathrm{B}} \geqq p_1$ を満たすとき，

$$\frac{1}{32}p_2 \geqq p_1$$

$$\therefore \quad p_2 \geqq 32p_1$$

したがって，p_2 は p_1 の **32 倍以上**であればよい。

(4)

熱効率が 1 サイクルで外界から熱を吸収するのは状態 A →状態 2 の変化のみであるから，熱効率 e は，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e} &= \frac{W}{Q_{\mathrm{A}\to 2}} \\
&= \frac{R(T_{\mathrm{A}} - T_1) + \frac{3}{2}R(T_2 - T_{\mathrm{B}})}{\frac{3}{2}R(T_2 - T_{\mathrm{A}})} \\
&= \frac{p_1V_2 - p_1V_1 + \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_{\mathrm{B}}V_1)}{\frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_2)} \\
&= \frac{p_1 - 8p_1 + \frac{3}{2}\left(p_2 - \frac{1}{32}p_2 \cdot 8\right)}{\frac{3}{2}(p_2 - p_1)} \\
&= \frac{9p_2 - 56p_1}{12(p_2 - p_1)} \\
&\boldsymbol{= \frac{9 - 56x}{12(1 - x)}}
\end{aligned}$$

ただし，式変形には①～④および $\dfrac{V_1}{V_2} = 8$ を用いた。

(5)

(3) より, $p_B \geqq p_1$ のとき，$\dfrac{1}{32}p_2 \geqq p_1$ であるから，

$$0 < x \leqq \frac{1}{32} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

(4) より

$$\begin{aligned} e &= \frac{9-56x}{12(1-x)} \\ &= \frac{56(1-x)-47}{12(1-x)} \\ &= \frac{14}{3} - \frac{47}{12(1-x)} \end{aligned}$$

よって，⑤ の範囲で e は単調減少であるから，$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{32}}$ のとき e は最小となる。したがって，

$$\boldsymbol{e_{\min}} = \frac{9 - 56\cdot\dfrac{1}{32}}{12\left(1-\dfrac{1}{32}\right)} = \frac{58}{93} = 0.623\ldots \fallingdotseq \mathbf{0.62}$$

(別解)

⑤ の範囲で e を x で微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{de}{dx} &= \frac{1}{12}\cdot\frac{-56(1-x)-(9-56x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} \\ &= -\frac{47}{12(1-x)^2} < 0 \end{aligned}$$

よって，⑤ の範囲で e は単調減少であるから，$x = \dfrac{1}{32}$ のとき e は最小となる。したがって，

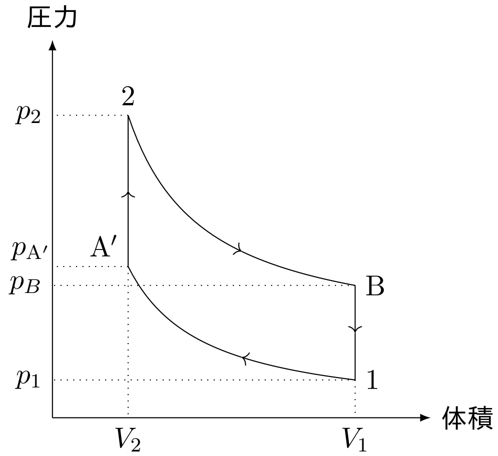
$$e_{\min} = \frac{9 - 56\cdot\dfrac{1}{32}}{12\left(1-\dfrac{1}{32}\right)} \fallingdotseq 0.62$$

(6)

状態 1 から断熱変化によって体積 V_2 となった状態を状態 A′ とする。状態 A′ での圧力を $p_{\mathrm{A'}}$，温度を $T_{\mathrm{A'}}$ とすると，状態方程式より，

$$p_{\mathrm{A'}}V_2 = RT_{\mathrm{A'}} \qquad \cdots\cdots⑥$$

が成り立つ。



状態 2 →状態 B と状態 1 →状態 A′ は断熱変化であるから，ここでの外部との熱のやりとりはなく，状態 A′ →状態 2 で熱を吸収し，状態 B →状態 1 で熱を放出するので，状態 A′ →状態 2 で気体が外部から吸収する熱量を $Q_{\mathrm{A'}\to 2}$ とすると，熱機関の熱効率は，

$$\begin{aligned} e' &= 1 - \frac{Q_{\mathrm{B}\to 1}}{Q_{\mathrm{A'}\to 2}} \\ &= 1 - \frac{\frac{3}{2}R(T_{\mathrm{B}} - T_1)}{\frac{3}{2}R(T_2 - T_{\mathrm{A'}})} \\ &= 1 - \frac{V_1(p_{\mathrm{B}} - p_1)}{V_2(p_2 - p_{\mathrm{A'}})} \\ &= 1 - 8 \cdot \frac{p_{\mathrm{B}} - p_1}{p_2 - p_{\mathrm{A'}}} \end{aligned}$$

と書ける。ここに，①，③，④，⑥，および $\dfrac{V_1}{V_2} = 8$ を用いた。

また，状態 2 →状態 B と状態 1 →状態 A′ は断熱変化なので，以下の 2 式が成り立つ。

$$p_2{V_2}^{\gamma} = p_{\mathrm{B}}{V_1}^{\gamma}$$

$$p_{\mathrm{A'}}{V_2}^{\gamma} = p_1{V_1}^{\gamma}$$

辺々引いて整理すると，

$$(p_{\mathrm{B}} - p_1){V_1}^{\gamma} = (p_2 - p_{\mathrm{A'}}){V_2}^{\gamma}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ \frac{p_{\mathrm{B}} - p_1}{p_2 - p_{\mathrm{A'}}} &= \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} \\ &= \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{e'} = 1 - 8 \cdot \frac{1}{32} = \frac{3}{4} \boldsymbol{= 0.75}$$

であり，これは $\dfrac{p_1}{p_2}$ によらず一定である。

（岡部律心，岡田和也，山崎裕太郎）