2015 年度 名古屋大学 前期 数学

1 方程式の解

出題範囲	微分 (数学 III)/整数の性質
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	方程式の解についての問題である。このような問題では，微分をして増減を調べることがポイントである。極値を求めてしまえば解ける問題も多いが，(2) ではそのような解法は困難で，柔軟な対応が要求された。(3) は背理法で有理数でないことを示す問題だが，どこで矛盾が生じるかはすぐにはわからないかもしれない。見た目は典型的だが，少しひねりがあり，その場で考えられるかどうかが試されている。

解答

(1) $f(x) = x^{-2}2^x$ であるから

$$f'(x) = -2x^{-3}2^x + x^{-2}\log 2 \cdot 2^x$$
$$= \frac{(-2 + x\log 2)2^x}{x^3}$$
$$= \frac{-2 + x\log 2}{x} \cdot \frac{2^x}{x^2}$$

となる。$\dfrac{2^x}{x^2} > 0$ であるので，$f'(x) > 0$ となるための条件は

「$x > 0$ かつ $-2 + x\log 2 > 0$」または「$x < 0$ かつ $-2 + x\log 2 < 0$」

すなわち

$$x < 0,\ \frac{2}{\log 2} < x$$

である。

(2)【証明】方程式 $2^x = x^2$ について，$x = 0$ は解ではない。$x \neq 0$ のとき，この方程式は $x^{-2}2^x = 1$，つまり $f(x) = 1$ と同値である。よって，方程式 $f(x) = 1$ が相異なる 3 つの実数解をもつことを示せばよい。

(1) より，増減表は次のようになる。

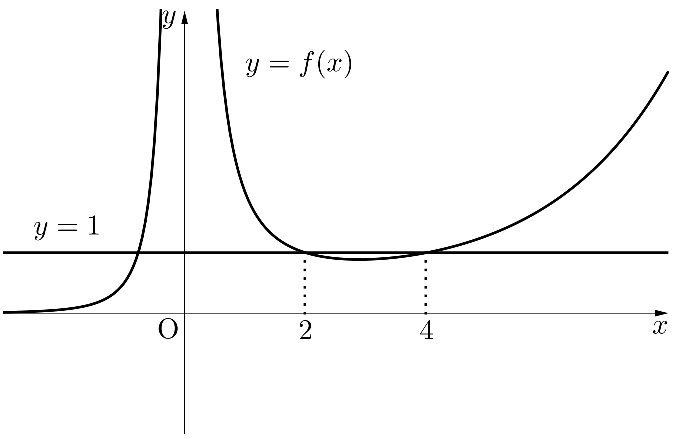
x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ここで

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to-0} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to+0} f(x) = \infty$$

である。また，$f(2) = 1$，$f(4) = 1$ であり，[1] $\dfrac{1}{2} < \log 2 < 1$ より $0 < 2 < \dfrac{2}{\log 2} < 4$ である。以上より，$y = f(x)$ と $y = 1$ のグラフは次のようになる。

[1] $\sqrt{e} < 2 < e$ であることからわかる。



よって，$f(x) = 1$ は相異なる 3 つの実数解をもつ。 (証明終)

(3) (2) のグラフより，$x > 0$ での解は $x = 2$，4 のみである。$x < 0$ での解が有理数かどうかを調べる。

方程式 $x^2 = 2^x$ の $x < 0$ における解が有理数であるとすると，その解は

$$x = -\frac{q}{p}$$

と書ける。ただし，p，q は自然数で，互いに素である。これを元の方程式に代入して整理する。

$$\left(-\frac{q}{p}\right)^2 = 2^{-\frac{q}{p}}$$

$$\left(\frac{q^2}{p^2}\right)^p = 2^{-q}$$

$$\left(\frac{p^2}{q^2}\right)^p = 2^q$$

ここで，右辺は整数なので左辺も整数である。p と q は互いに素だから，

$q=1$ である。すると

$$p^{2p}=2$$

となるが，これを満たす自然数 p は存在せず，矛盾である。なぜなら，

$p=1$ のとき $1\fallingdotseq 2$ であり，$p\geqq 2$ のときは $p^{2p}>2$ となってしまうから

である。よって，方程式 $x^2=2^x$ の $x<0$ での解は有理数でない。

以上より，有理数の解は

$$x=2,\ 4$$

である。

解説

(1) 素直に微分すればよいが，$f(x)$ の形が

$$f'(x)=\frac{(-2+x\log 2)\,2^x}{x^3}$$

ということで，注意が必要である。求める条件は $-2+x\log 2>0$ だと早合点してはいけない。分母が正負どちらも取りうるからである。解答では，わかりやすいように必ず正となるような $\dfrac{2^x}{x^2}$ の部分を先に分離してしまい，考えやすいようにしてある。

(2) 方程式を変形して $f(x)=1$ の形に持っていくことで，(1) の結果が使える。$2^x=x^2$ という方程式を考えているときには，$x=0$ のことも考えなければいけないことに注意しよう。解の存在を示すときに，$f(x)$ の増減を調べてグラフの交点を見る方法は定石である。(1) で $f(x)$ は求めたので，増減表はすぐに書ける。さらに，$x\to\infty,\ -\infty,\ +0,\ -0$ での極限を調べれば，グラフの概形はかける。

ここで，ネックになるのが $f\left(\dfrac{2}{\log 2}\right)$ が 1 より大きいか小さいかということである。この値を直接求め，大小を評価することは難しい。ここでのポイントは，$f(2)=f(4)=1$ ということに気づけるかどうかである。確かに，方程式をよく見れば，これは解であることがわかる。すると，$0<2<\dfrac{2}{\log 2}<4$ であるから，増減表より $f\left(\dfrac{2}{\log 2}\right)<1$ であることがわかる。

(3) (2) が解けていれば，$f(2)=f(4)=1$ であることはわかっているはずなので，グラフを見れば，あとは $x<0$ での解が有理数かどうか，ということを調べればよいことに気づくだろう。この解が無理数であると予想して，背理法でそれが示せないか考えよう。有理数を互いに素な 2 つの整数 $p,\ q$ を用いて $\dfrac{q}{p}$ $(p\fallingdotseq 0)$ と表す手法は定石なので，必ずマスターしよう。

（井上輝義，河合敬宏，沈有程）

2015 年度 名古屋大学 前期 数学

2　高次方程式の解

出題範囲	高次方程式
難易度	★★★☆☆
所要時間	35 分
傾向と対策	4 次方程式の解の問題である。問題の難易度としては標準だが，2 重根号に戸惑った受験生がいたかもしれない。α という数の形を見て，移項しながら 2 乗していけばよい，と思えたかどうかが得点・時間ともに差がつく要因となったであろう。2 次方程式の解から方程式を求める問題は基本的であるが，考え方を応用できるかが問われた。

解答

(1)

$$\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

について，$s = \sqrt{9 + 2\sqrt{17}}$，$t = \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$ とおく。すると

$$s^2 + t^2 = (9 + 2\sqrt{17}) + (9 - 2\sqrt{17}) = 18,\ st = \sqrt{9^2 - (2\sqrt{17})^2} = \sqrt{13}$$

である。$(*)$ について $\sqrt{13}$ を移項し，両辺の 2 乗を考えると

$$(\alpha - \sqrt{13})^2 = (s + t)^2 \qquad \cdots\cdots\ ①$$

$$\alpha^2 - 2\sqrt{13} + 13 = s^2 + t^2 + 2st$$

$$\alpha^2 - 2\sqrt{13} + 13 = 18 + 2\sqrt{13}$$

$$\alpha^2 - 5 = 2\sqrt{13}(\alpha + 1)$$

と整理できる。さらに，この両辺を 2 乗すれば

$$(\alpha^2 - 5)^2 = (2\sqrt{13})^2(\alpha + 1)^2 \qquad \cdots\cdots\ ②$$

$$\alpha^4 - 10\alpha^2 + 25 = 52(\alpha^2 + 2\alpha + 1)$$

$$\alpha^4 - 62\alpha^2 - 104\alpha - 27 = 0$$

である。よって，α は方程式

$$x^4 - 62x^3 - 104x - 27 = 0$$

の解である。求める $f(x)$ は

$$f(x) = x^4 - 62x^3 - 104x - 27$$

(2) α 以外の 7 つの実数について，(1) での α と同様の計算をすることを考える。(1) の 2 度目の 2 乗の計算での結果が一致していれば，その数は

$$f(x) = x^4 - 62x^3 - 104x - 27 = 0$$

の解となる。8 つの実数は各項の符号しか違わないから符号に注目して考察する。

まず，$\alpha_1 = \sqrt{13} - s - t$ は $f(x) = 0$ の解である。実際

$$(\alpha_1 - \sqrt{13})^2 = (-s - t)^2 = (s + t)^2$$

となるので，(1) の ① 以降の α と同じ計算になる。

また，$\alpha_2 = -\sqrt{13} + s - t, \alpha_3 = -\sqrt{13} - s + t$ について

$$(\alpha_2 + \sqrt{13})^2 = \quad (s - t)^2 \Leftrightarrow {\alpha_2}^2 - 5 = 2\sqrt{13}(-\alpha_2 - 1)$$

$$(\alpha_3 + \sqrt{13})^2 = (-s + t)^2 \Leftrightarrow {\alpha_3}^2 - 5 = 2\sqrt{13}(-\alpha_3 - 1)$$

であるから，これらを 2 乗すれば

$$({\alpha_2}^2 - 5)^2 = (2\sqrt{13})^2(-\alpha_2 - 1)^2 = (2\sqrt{13})^2(\alpha_2 + 1)^2$$

$$({\alpha_3}^2 - 5)^2 = (2\sqrt{13})^2(-\alpha_3 - 1)^2 = (2\sqrt{13})^2(\alpha_3 + 1)^2$$

であるから，(1) の ② 以降の α の計算と同じ計算になるので，$f(x) = 0$ の解になる。よって，$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は $f(x) = 0$ の解である。

$f(x) = 0$ は 4 次方程式であり，4 つの解が求まったから，$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 以外は解ではない。

以上より，$f(x) = 0$ の解は

$$\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

$$\alpha_2 = -\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

$$\alpha_3 = -\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

である。

(3) $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の違いは各項の符号の違いだけなので，各項のすべての符号が $+$ である α が最も大きいのは明らかである。

$4 < \sqrt{17} < 4.5$ なので

$$9 + 2\sqrt{17} > 13 > 9 - 2\sqrt{17} > 0$$

であるから

$$\sqrt{9 + 2\sqrt{17}} > \sqrt{13} > \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

である。ゆえに

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2\left(\sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{13}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \alpha_2 > \alpha_1$$

$$\alpha_1 - \alpha_3 = 2\left(\sqrt{13} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_3$$

まとめると

$$\alpha_2 > \alpha_1 > \alpha_3$$

よって，大きい順に並べると

$$\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

$$-\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

$$\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

$$-\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$$

である。

解説

(1) 2 重根号には戸惑うかもしれない。このような数を解にもつような方程式の求め方を考えてみる。

例えば，$a = -1 + \sqrt{3}$ を解に持つような 2 次方程式を求めよ，という問題であれば，-1 を移項して $a + 1 = \sqrt{3}$ とし，両辺を 2 乗して整理すると

$$a^2 + 2a - 2 = 0$$

という方程式が得られるから，a は $x^2 + 2x - 2 = 0$ の解ということがわかる。この「移項して 2 乗」という操作がポイントである。

この問題も，この操作でうまくいかないか？ という予想をたてよう。α の $\sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$ とい

う部分に注目すれば，試しにこれを 2 乗してみると

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2 &= \left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}\right)^2+2\sqrt{9+2\sqrt{17}}\sqrt{9-2\sqrt{17}}+\left(\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2\\ &= 9+2\sqrt{17}+2\sqrt{(9+2\sqrt{17})(9-2\sqrt{17})}+9-2\sqrt{17}\\ &= 18+2\sqrt{13}\end{aligned}$$

と，扱いやすそうな形になる。なお，「移項して 2 乗」という操作を 2 回しなければいけないことに注意しよう。

(2) 8 つの数のうち，$f(x)=0$ の解となる 4 つを見つける問題。α はもちろんその 1 つである。8 つの数どれに対しても，結局は「移項して 2 乗」がポイントになる。解答を見ればわかるとおり，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は「移項して 2 乗」の操作のどこかで α の計算と一致するのである。それならば，結果は α と一致するから，解だとわかる。

4 次方程式の解は (複素数の範囲で)4 つだから，4 つの解がわかった時点で検討を終えてよい。

(3) 4 つの数の大小を判定する問題であるが，結局のところ

$$\sqrt{9+2\sqrt{17}}, \sqrt{13}, \sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

の 3 つの数の大小がわかればよい。どれも 0 より大きいから，それぞれを 2 乗した数の大小を考えればよい。

（井上輝義，河合敬宏，沈有程）

2015 年度 名古屋大学 前期 数学

3　2つの関数のグラフが囲む面積

出題範囲	積分・極限
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	問題自体にひねりはあまりない。前半は，愚直に積分すると膨大な計算を強いられるため，いかに計算を少なくするかが焦点となる。後半は誘導つきの証明問題であり，落ち着いて考えれば易しい問題である。

解答

(1) まず S_1 を求める。

$$S_1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^x \, dx$$
$$= e^{\beta} - e^{\alpha}$$

P，Q における C の接線をそれぞれ l, m とすると

$$l : y = e^{\alpha}(x-\alpha) + e^{\alpha}$$
$$m : y = e^{\beta}(x-\beta) + e^{\beta}$$

ここで，P，Q は曲線 C と直線 $y = tx$ の交点なので

$$e^{\alpha} = t\alpha$$
$$e^{\beta} = t\beta$$

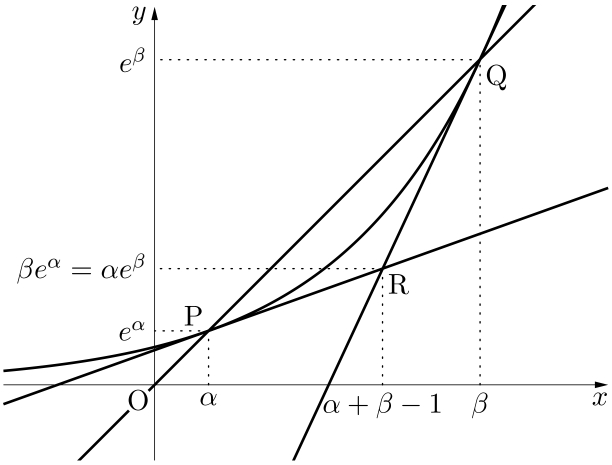
l と m の交点が R なので，R の x 座標を r として

$$e^{\alpha}(r-\alpha+1) = e^{\beta}(r-\beta+1)$$
$$r = \alpha+\beta-1$$

よって R の座標は，直線 l, m の式に上の x 座標を代入して

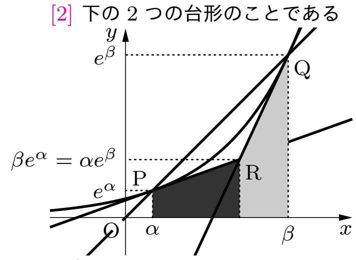
$(\alpha+\beta-1, \beta e^{\alpha}) = (\alpha+\beta-1, \alpha e^{\beta})$ と表される。[1]

[1] l の式に r を代入すると左の座標が，m の式に代入すると右の座標が導き出される。



よって，S_2 の面積は，上の図より，S_1 から台形 2 つ[2]の面積を引いたものと考えて

[2] 下の 2 つの台形のことである



$$
\begin{aligned}
S_2 &= S_1 - \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} + \beta e^{\alpha}\right)(\beta - 1) - \frac{1}{2}\left(\alpha e^{\beta} + e^{\beta}\right)(1 - \alpha) \\
&= S_1 - \frac{1}{2}e^{\alpha}\left(\beta^2 - 1\right) - \frac{1}{2}e^{\beta}\left(1 - \alpha^2\right) \\
&= S_1 - \frac{1}{2}t\left\{\alpha\left(\beta^2 - 1\right)\right\} - \frac{1}{2}t\left\{\beta\left(1 - \alpha^2\right)\right\} \quad \left(e^{\alpha} = t\alpha,\ e^{\beta} = t\beta \text{より}\right) \\
&= S_1 - \frac{1}{2}t(\alpha\beta + 1)(\beta - \alpha)
\end{aligned}
$$

以上より，$\dfrac{S_2}{S_1}$ は

$$
\begin{aligned}
\frac{S_2}{S_1} &= 1 - \frac{t(\alpha\beta + 1)(\beta - \alpha)}{2t(\beta - \alpha)} \\
&= 1 - \frac{1}{2}(\alpha\beta + 1) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \alpha\beta)
\end{aligned}
$$

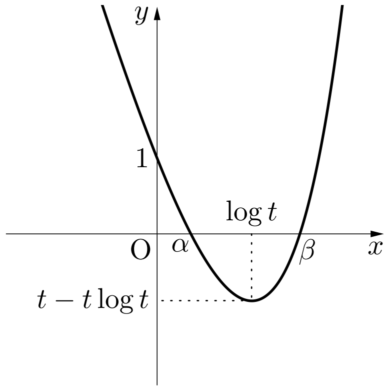
(2) $f(x) = e^x - tx$ とおくと

$$f'(x) = e^x - t$$

$f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	$\cdots$	$\log t$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$t - t\log t$	

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ であり，$f(x)$ の概形は以下のようになる。



このとき，$t > e$ より，$f(1) = e - t < 0$ のため，グラフより $\alpha < 1$ である。

また，$0 < \alpha < 1$ より $t\alpha = e^{\alpha} < e$ なので，$\alpha < \dfrac{e}{t}$ が成り立つ。

ここで，$t > e(> 0)$ のとき，$e^t > t^2$ であるので，両辺の自然対数をとって $t > 2\log t$ である。

よって，$f(2\log t) = t(t - 2\log t) > 0$ なので，$\beta < 2\log t$ が成り立つ。

よって，$0 < \alpha\beta < 2e\dfrac{\log t}{t}$ であり，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} 2e\frac{\log t}{t} = 0$ であるから，はさみ打ちの原理より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \alpha\beta = 0$ である。

以上より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}$ である。

解説

(1) 指数関数から接線の式を引いたものを愚直に積分するのはおすすめしない。工夫しないと計算量が膨大な量となり，計算ミスを起こしかねない。本問のように，積分する代わりに台形の面積を使って計算を簡略にすることはよくあるので，この問題で慣れておくといいだろう。

(2) 誘導されている式を用いることで $t > 2\log t$ を示している。もし誘導が無くても，$t > e$ の条件と，t と $2\log t$ の増減を考えれば容易に導き出すことができる。

別解

(1) $S_2 = \triangle\mathrm{PQR} -$ (曲線 C と PQ で囲まれる面積) である。

$\overrightarrow{\mathrm{RP}} = (1-\beta, t\alpha(1-\beta))$，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = (1-\alpha, t\beta(1-\alpha))$ なので

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQR} &= \frac{1}{2}|(1-\beta)t\beta(1-\alpha) - (1-\alpha)t\alpha(1-\beta)| \\ &= \frac{t}{2}(\beta-\alpha)(\beta-1)(1-\alpha)\ (\alpha < 1 < \beta\text{より})\text{[3]}\end{aligned}$$

[3] $t > e$ なので，$x = 1$ で $y = tx$ は $y = e^x$ より上にあるから，図より $\alpha < 1 < \beta$ である。

曲線 C と PQ で囲まれる面積は

$$\left[tx - e^x\right]_\alpha^\beta = \frac{t}{2}(\beta^2 - \alpha^2) - (e^\beta - e^\alpha)$$
$$= \frac{t}{2}(\beta^2 - \alpha^2) - (t\beta - t\alpha)$$

よって

$$S_2 = \frac{t}{2}(\beta - \alpha)(\beta - 1)(1 - \alpha) - \left\{\frac{t}{2}(\beta^2 - \alpha^2) - (t\beta - t\alpha)\right\}$$
$$= t(\beta - \alpha)\frac{(1 - \alpha\beta)}{2}$$

となる。

別解解説

(1) S_2 を $\triangle$PQR から引いて求めた。図より三角形の面積から引いて求める工夫を考えるのは自然である。

（河合敬宏，沈有程）

2015年度 名古屋大学 前期 数学

4 動点の数直線上の位置とその確率

出題範囲	確率/漸化式
難易度	★★★☆☆
所要時間	30 分
傾向と対策	(1)，(2) は漸化式を解くのが多少面倒であり，限られた時間の中で解くためには順次代入する方が賢い選択だろう。(3) は標準的であるが，問題文の条件を正しく言い換えるよう気をつけるとよい。

解答

(1) n 回試行を繰り返した後に石が点 k に存在する確率を $p(n,k)$ とする。

$n=0$ のときは以下の通りである。

$$\begin{cases} p(0,1)=1 \\ p(0,2)=p(0,3)=p(0,4)=p(0,5)=0 \end{cases}$$

また，条件より以下の漸化式が成立する。

$$\begin{cases} p(n+1,1)=\dfrac{1}{2}p(n,2) \\ p(n+1,2)=p(n,1)+\dfrac{1}{2}p(n,3) \\ p(n+1,3)=\dfrac{1}{2}\{p(n,2)+p(n,4)\} \\ p(n+1,4)=\dfrac{1}{2}p(n,3)+p(n,5) \\ p(n+1,5)=\dfrac{1}{2}p(n,4) \end{cases}$$

この漸化式に[1]順次 $p(n,k)$ を代入していくと

[1] 横列に k，縦列に n を並べた表などを書いて計算すると簡便である。

$$\begin{cases} p(6,1)=\dfrac{5}{16} \\ p(6,2)=0 \\ p(6,3)=\dfrac{1}{2} \\ p(6,4)=0 \\ p(6,5)=\dfrac{3}{16} \end{cases}$$

(2) 偶数回目の移動の後，石は奇数番目の点に存在することに注目すると，5 つの点すべてに印がついている，つまり石が少なくとも 1 回は点 5 に移動するのは

(i) 4 回目の移動で点 5 に移動する場合 (その後の移動は不問)

(ii) 4 回目の移動で点 3 に移動し，その後 $3 \to 4 \to 5$ と移動する場合

の 2 通りに限られる。[2]

[2] このようにすることで，排反な 2 つの事象に分けることができた。

(i) このときの確率は

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

である。

(ii) まず 4 回目の移動で点 3 に移動する確率は，漸化式に順次代入すると

$$\frac{1}{2}$$

となる。その後 $3 \to 4 \to 5$ と移動することから，(ii) が起こる確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

である。

以上より，6 回の移動の後 5 つの点すべてに印がついている確率は

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

(3) n 回目の試行の後，点 4，5 に印がついていない確率を $q(n)$ とし，点 3，4，5 に印がついていない確率を $r(n)$ とすると，求める確率は $q(n) - r(n)$ である。

$q(n)$ について，石は以下のように移動する必要がある。

(i) $n = 2m$（m は自然数）のとき[3]

[3] $1 \to 2$ と移動した後，$2 \to 1 \to 2$ または $2 \to 3 \to 2$ という移動を数回繰り返して，最後に $2 \to 1$ または $2 \to 3$ という移動をするという状況を考えている。

$$1 \to 2, \begin{cases} 2 \to 1 \to 2 \\ \text{または} \\ 2 \to 3 \to 2 \end{cases}, \cdots, \begin{cases} 2 \to 1 \to 2 \\ \text{または} \\ 2 \to 3 \to 2 \end{cases}, \begin{cases} 2 \to 1 \\ \text{または} \\ 2 \to 3 \end{cases}$$

ここで，$2 \to 1 \to 2$ と移動する回数を k とすると，$2 \to 3 \to 2$ と移動する回数は $\dfrac{n-2-2k}{2} = m - 1 - k$ である。よって，点 4，5 に石

が 1 度も移動しない確率は

$$\begin{aligned} q(2m) &= \sum_{k=0}^{m-1} 1 \cdot {}_{m-1}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1-k} \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^{m-1} \text{[4]} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1} \end{aligned}$$

[4] 二項定理による。

(ii) $n=2m+1$（m は 0 以上の整数）のとき

$$1 \to 2, \begin{cases} 2 \to 1 \to 2 \\ \text{または} \\ 2 \to 3 \to 2 \end{cases}, \cdots, \begin{cases} 2 \to 1 \to 2 \\ \text{または} \\ 2 \to 3 \to 2 \end{cases}$$

ここで，$2 \to 1 \to 2$ と移動する回数を k とすると，$2 \to 3 \to 2$ と移動する回数は $\dfrac{n-1-2k}{2} = m-k$ である。よって，点 4，5 に石が一度も移動しない確率は

$$\begin{aligned} q(2m+1) &= \sum_{k=0}^{m} 1 \cdot {}_{m}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{m-k} \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^{m} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{m} \end{aligned}$$

$r(n)$ について，これは $1 \to 2 \to 1 \to \cdots$ と点 1，2 を往復する確率なので，m を 0 以上の整数として

$$r(2m) = r(2m+1)^{\text{[5]}} = \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

[5] $1 \to 2$ という移動は確率 1 で起こることに注意。

となる。

以上より，印が 3 つの点についている確率は

(i) $n=2m$（m は自然数）のとき

$$q(2m) - r(2m) = \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

(ii) $n=2m+1$（m は 0 以上の整数）のとき

$$q(2m+1) - r(2m+1) = \left(\frac{3}{4}\right)^{m} - \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

となる。

解説

(1) 問題文をよく読み，状況を理解することが大切である。解答では漸化式を立てたが，問題文の条件から点の移動の仕方が理解できれば，$n = 6$ まで計算できただろう。

(2) 5 つの点すべてに印がつくということは，1 度でも石が点 5 に移動することと同じであるから，6 回のうちに少なくとも 1 回は石が点 5 に移動する確率を求めればよい。6 回目までに点 5 に移動することができるのは，4 回目か 6 回目のいずれかである。特に，4 回目のときの移動に注目すれば，排反な 2 つの事象で考えることができる。計算については，(1) の結果を利用するとよい。

(3) 「印が点 4，5 についていない確率」から「印が点 3，4，5 についていない確率」を引いたものとして求めることができる。「印が点 4，5 についていない確率」について，解答では石が点 2 にある状態から，$2 \to 1 \to 2$ という移動や，$2 \to 3 \to 2$ という移動をひとつのまとまりとして考えた。このように考えると見通しがよく，計算も簡便になるだろう。

（青木徹，辻啓吾，沈有程）