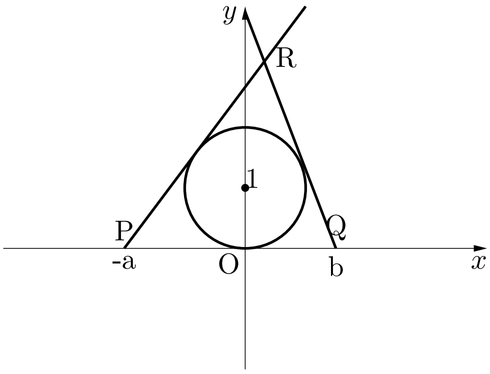
2015 年度 名古屋大学 前期 数学

1 円の２本の接線とその交点

出題範囲	図形と方程式
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	標準的な設問である。特別な発想は要求されないので，計算を間違えなければ答えにたどり着けるであろう。解説に記したような幾何的な考察をすることで，計算ミスを防ぎたい。

解答



(1) 円 C の方程式は

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdot \text{①}$$

点 Q を通る直線の式は，傾きの逆数を k として[1](y 軸に平行な場合は $k = 0$)

$$ky = x - b \qquad \cdots\cdots\cdot \text{②}$$

[1] 傾きではなく，その逆数をとったのは，直線が y 軸に平行な場合でも取り扱えるようにするためである。x 軸に平行であることはない。

② を ① に代入して，円と直線の交点を求める。

$$(ky+b)^2 + (y-1)^2 = 1$$

これを整理して

$$(k^2+1)y^2 + 2(kb-1)y + b^2 = 0$$

これを y の 2 次方程式とみたときの解が円と直線の交点の y 座標となるが，円と直線は接しているので，この 2 次方程式は重解をもち，判別式は

0 である。

すなわち，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (kb-1)^2 - (k^2+1)b^2 = (1-b^2) - 2bk = 0$$

ゆえに

$$k = \frac{(1-b^2)}{2b}$$

よって，直線 QR の式は

$$(1-b^2)y - 2b(x-b) = 0$$

(2) (1) で b を $-a$ に置き換えれば, 直線 PR の式

$$(1-a^2)y + 2a(x+a) = 0$$

が得られる。これらを連立したときの解が 2 直線の交点である。

$$\begin{cases} (1-b^2)y - 2b(x-b) = 0 \\ (1-a^2)y + 2a(x+a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{a-b}{ab-1}, y = \frac{2ab}{ab-1}$$

よって，R の座標は

$$\left(\frac{a-b}{ab-1}, \frac{2ab}{ab-1}\right)$$

(3) R の y 座標が正なので

$$\frac{2ab}{ab-1} > 0$$

より，$ab > 1$

PQ の長さは $a+b$

QR の長さは

$$\begin{aligned} \mathrm{QR} &= \sqrt{\left(b - \frac{a-b}{ab-1}\right)^2 + \left(\frac{2ab}{ab-1}\right)^2} \\ &= \frac{a(1+b^2)}{ab-1} \end{aligned}$$

PR の長さは

$$\begin{aligned} \mathrm{PR} &= \sqrt{\left(-a - \frac{a-b}{ab-1}\right)^2 + \left(\frac{2ab}{ab-1}\right)^2} \\ &= \frac{b(1+a^2)}{ab-1} \end{aligned}$$

これらを足し合わせて

$$
\begin{aligned}
T &= (a+b) + \frac{a(1+b^2)}{ab-1} + \frac{b(1+a^2)}{ab-1} \\
&= \frac{2ab(a+b)}{ab-1}
\end{aligned}
$$

となる。

(4) $a+b=4$ より

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{8ab}{ab-1} \\
&= \frac{8}{1-\dfrac{1}{ab}}
\end{aligned}
$$

よって，ab が最大の時に T が最小になる。

相加相乗平均の関係より

$$
\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2} = 2
$$

であるから，ab は $a=b=2$ のとき T は最小値 $\dfrac{32}{3}$ をとる。

解説

(1) $b=1$ で直線が y 軸に平行になるので，傾きを文字でおく際は注意しよう。

また，検算として，求めた直線の式に $b=1$ を代入して，y 軸に平行になることを確認するとよい。

(2) a と b の値を入れ替えたとき，R の座標は x 座標について反転し，y 座標についてはそのままとなるはずである。これは値を逆にすることで，直線が y 軸周りでのみ反転するからである。

(3) a と b の値を入れ替えても，図形が y 軸について反転するだけなので，T の値は変わらない。ゆえに，a と b に関する対称式となるはずである。

（松下祐樹，沈有程）

2015 年度 名古屋大学 前期 数学

$\boxed{2}$ 確率

出題範囲	場合の数と確率
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	実際に手を動かしてみると，動きがわかる。(1) がそのための強い誘導になっており，偶奇で場合分けをするとよいことに気づく。(3) は推移を考えれば，答えの見当がつくが，その値が n によらない値で，計算が必要がないこと気づく力が大切。

解答

(1) 各回の試行後，各点に石がある確率を書き出すと，以下のとおり。

	1	2	3	4	5
初期状態	1	0	0	0	0
1 回目	0	1	0	0	0
2 回目	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
3 回目	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
4 回目	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$
5 回目	0	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0
6 回目	$\frac{5}{16}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{16}$

よって

$$P_6(1)=\frac{5}{16},\ P_6(2)=0,\ P_6(3)=\frac{1}{2},\ P_6(4)=0,\ P_6(5)=\frac{3}{16}$$

である。

(2) 6 回の試行後に 5 つの点すべてに印がつくのは

- 6 回目の試行後に石が点 5 にあるとき
- 6 回目の試行後に石が点 5 にないとき

のどちらかのパターンであり，後者のパターンは

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 4 \to 3$ と動くときのみなので，求める確率は

$$\frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

(3) 1 回の試行で石は隣接する点にしか移動しないので，奇数回の試行後に石は点 2 か 4 に，偶数回の試行後に石は点 1 か 3 か 5 にある。

このことから，n が奇数のとき

$$P_n(1) = P_n(3) = P_n(5) = 0$$

$$P_n(2) + P_n(4) = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

である。

n が偶数のとき，$n-1$ は奇数であるので

$$\begin{aligned} P_n(3) &= \frac{1}{2}P_{n-1}(2) + \frac{1}{2}P_{n-1}(4) \\ &= \frac{1}{2}\left(P_{n-1}(2) + P_{n-1}(4)\right) \\ &= \frac{1}{2} \quad (\text{① より}) \end{aligned}$$

以上より，

$$P_n(3) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ \dfrac{1}{2} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

解説

(1) 試行回数が 6 回と少ないので，すべて書き出して解いてしまったほうがよいだろう。確率の問題において，小さな値を試すことが後半の設問を解くヒントになることがある。

(2) (1) で書き出したものを使えばよいが，6 回繰り返したあとに点 5 にあるかないかで場合分けするのがポイントである。

(3) (1) で書き出していれば，$P_n(3)$ は 0 と $\frac{1}{2}$ が交互に現れつづけることが予想できる。あとは偶奇で場合分けすれば難しい計算は必要ないので，丁寧な説明を心がけよう。

（松下祐樹，沈有程）

2015 年度 名古屋大学 前期 数学

3 二重根号と方程式

出題範囲	高次方程式
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	(3) は (2) を十分に理解していれば解ける。(3) にて，根号の前の符号の正負違いの解が出ているが，これは 2 次方程式の解の公式で，根号の前の符号が ± になるのと同じ理屈である。解の公式をただ暗記するのではなく，自分で導出して，根号の前の符号について考察した経験があると解きやすい。2 次方程式の解の公式への理解が問われた良問。

解答

(1)

$$\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2 = \left(9+2\sqrt{17}\right)+2\sqrt{\left(9+2\sqrt{17}\right)\left(9-2\sqrt{17}\right)}+\left(9-2\sqrt{17}\right)$$
$$= 18+2\sqrt{81-68}$$
$$= 18+2\sqrt{13}$$

(2)

$$\alpha-\sqrt{13}=\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

両辺を 2 乗して

$$\left(\alpha-\sqrt{13}\right)^2 = 18+2\sqrt{13} \Leftrightarrow \alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=18+2\sqrt{13}$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha^2-5\right)=2\sqrt{13}\left(\alpha+1\right)$$

さらに両辺を 2 乗して

$$\left(\alpha^2-5\right)^2=52\left(\alpha+1\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$$

よって，求める $f(x)$ は

$$f(x)=x^4-62x^2-104x-27$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&x^4-62x^2-104x-27=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(x^2-5\right)^2-52(x+1)^2=0\\
\Leftrightarrow\ &\left\{x^2-5-2\sqrt{13}(x+1)\right\}\left\{(x^2-5+2\sqrt{13}(x+1)\right\}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left\{\left(x-\sqrt{13}\right)^2-\left(18+2\sqrt{13}\right)\right\}\left\{\left(x+\sqrt{13}\right)^2-\left(18-2\sqrt{13}\right)\right\}=0
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2=18+2\sqrt{13}\\
&\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2=18-2\sqrt{13}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\left(x-\sqrt{13}\right)^2-\left(18+2\sqrt{13}\right)\\
=&\left\{\left(x-\sqrt{13}\right)-\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)\right\}\left\{\left(x-\sqrt{13}\right)+\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)\right\}\\
&\left(x+\sqrt{13}\right)^2-\left(18-2\sqrt{13}\right)\\
=&\left\{\left(x+\sqrt{13}\right)-\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)\right\}\left\{\left(x+\sqrt{13}\right)+\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

したがって，解は

$$
\begin{aligned}
x=&\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}},\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},\\
&-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},\ -\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}
\end{aligned}
$$

解説

(2) この問題を解いた受験生の中には，$f(x)$ が複数存在する場合，どの $f(x)$ を選んだかによって，(3) の答えが変わるのではないかと懸念した者もいるかもしれない。

しかし，問題の条件を満たす $f(x)$ が存在し，一意に定まるということが以下のようにして示せる。

【証明】本解の中で条件を満たす $f(x)$ を構成したので存在はする。

条件を満たす $f(x)$ を整数係数ではなく，有理数係数まで拡大しても一意

であることを示せばよい。[1]

まず $\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$

を解にもつ有理数係数多項式の最小の次数が 4 であることを示す。

これは α を解にもつ次数 3 以下の多項式が存在しないことをいえばよい。

この証明の中で，有理数係数の中で多項式の割り算を行う。つまり，多項式の割り算において，割る数，割られる数，商，余りに出てくる全ての整式が有理数係数であることは証明なしに用いる。

[1] 整数係数の範囲では，後で用いる多項式の割り算において，余りの多項式の次数が下がらない場合がある。例えば，有理数係数の範囲では $x^2\div 2x=\frac{1}{2}x$ となるが，整数係数の範囲では，余りの多項式の次数を下げることができないため，この割り算を実行できない。

(i) α を解にもつ 1 次式が存在する場合

1 次多項式は $ax-b$ の形で書けるが，このような多項式が α を解に持つならば，

$$a\alpha-b=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{b}{a}$$

となり，$\dfrac{b}{a}$ は有理数だが，α は有理数ではない。

もし互いに素な整数 p，q を用いて $\alpha=\dfrac{q}{p}$ と表せるとき，

移項して

$$\frac{q}{p}-\sqrt{13}=\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

両辺を 2 乗して，

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2+13-\frac{2q}{p}\sqrt{13}=18+2\sqrt{13}$$

移項して

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2-5+\left(2-\frac{2q}{p}\right)\sqrt{13}=0$$

これを満たす p，q はないので不適。

また，このことから有理数係数の 1 次多項式は有理数解を持つことがわかる。

(ii) α を解にもつ 2 次式が存在する場合

2 次多項式は $ax^2+bx+c=0$ の形で書けるが，このような多項式が α を解にもつとする。

$a\neq 0$ なので，多項式を $\dfrac{1}{a}$ 倍することで最高次数を 1 と考えてよい。

そのような多項式を $x^2+kx+l=0$ とする。(k，l は有理数)

$\alpha^2=2\sqrt{13}\alpha+2\sqrt{13}+5$ なので，

$\alpha^2+k\alpha+l=0$ に代入して，$(2\sqrt{13}+k)\alpha+(5+l)+2\sqrt{13}=0$

$2\sqrt{13}$ は無理数なので，$2\sqrt{13}-k \fallingdotseq 0$

よって，

$$\begin{aligned}&\left(2\sqrt{13}+k\right)\alpha+(5+l)+2\sqrt{13}=0\\ \Leftrightarrow&(2\sqrt{13}-k)\left\{\left(2\sqrt{13}+k\right)\alpha+(5+l)+2\sqrt{13}\right\}=0\\ \Leftrightarrow&\left(52-k^2\right)\alpha+52-k(5+l)+(10+2l-2k)\sqrt{13}=0\end{aligned}$$

ここで k が有理数なので $52-k^2 \fallingdotseq 0$ であり，最後の式の全体を $52-k^2$ で割ると，

$$\alpha+c+d\sqrt{13}=0$$

(ただし，$c=\dfrac{52-k(5+l)}{52-k^2}$，$d=\dfrac{10+2l-2k}{52-k^2}$ として，c，d は有理数)

となる。

$\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ を代入して，

$$(1+d)\sqrt{13}+\sqrt{18+2\sqrt{13}}+c=0$$

つまり，$(1+d)\sqrt{13}+\sqrt{18+2\sqrt{13}}$ は有理数となる。

$(1+d)\sqrt{13}+\sqrt{18+2\sqrt{13}}$ が無理数となることは，α が無理数となることと同様のやり方で示せるので，これは不適である。

(iii) α を解にもつ 3 次式が存在する場合

3 次多項式 $g(x)$ が条件を満たす場合，本解の $f(x)$ を $g(x)$ で割ると

$$f(x)=g(x)h(x)+R(x)$$

となるが，$R(x)$ は割り算の余りなので，次数は $g(x)$ より低く，$R(x)$ の次数が 1 か 2，もしくは $R(x)=0$。

(iii−1) $R(x)$ の次数が 1 か 2 の場合

上の割り算の式で $x=\alpha$ を代入すると，$f(\alpha)=g(\alpha)=0$ なので，$R(\alpha)=0$ となるが，$R(x)$ は有理数係数多項式なので，次数が 1 か 2 の場合は上の議論より不適。

(iii−2) $R(x)=0$ の場合

$f(x)=g(x)h(x)$ となるが，$h(x)$ は 1 次式なので，有理数解 $\dfrac{q}{p}$

をもつ。（q，p は互いに素な整数）

このとき，$f\left(\dfrac{q}{p}\right)=g\left(\dfrac{q}{p}\right)h\left(\dfrac{q}{p}\right)=0$ なので，$\dfrac{q}{p}$ は $f(x)$ の解である。

$$f\left(\frac{q}{p}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{q}{p}\right)^4-62\left(\frac{q}{p}\right)^2-104\frac{q}{p}-27=0$$

$$\Leftrightarrow q^4-62q^2p^2-104qp^3-27p^4=0$$

$$\Leftrightarrow q^4=p\left(62q^2p+104qp^2+27p^3\right)$$

q と p は互いに素なので，$p=1$ しかない。

このとき $p=1$ を代入して

$$q(q^3-62q-104)=27$$

となるが，q は 27 の約数になるので，$q=1$ で上の式が成立しないことを考えると，q は 3 の倍数となる。

よって，$q^3-62q-104$ が 3 の倍数にならないので，上の式が成立するためには q は 3 で 3 回割れる。つまり 27 の倍数になるので，$q=27$ 以外では不適。

しかし，$q=27$ でも上の式は成立しない。

よって $R(x)=0$ でも不適。

以上より，α を解に持つ有理数係数多項式の次数は最小で 4 となる。

上の議論から得られた結論を用いて，α を解にもつ 4 次の有理数係数多項式で，x^4 の係数が 1 なものはただ 1 つのみであることを示す。

まず，条件を満たす多項式が 2 つあったとして，これらを $A(x)$，$B(x)$ とおく。

$C(x)=A(x)-B(x)$ は 4 次の項が打ち消し合うので，次数が 3 以下であり，$C(\alpha)=A(\alpha)-B(\alpha)=0$ となるので，α を解にもつ次数 3 以下の有理数係数多項式が得られたことになる。

これは上で示したことに反するので，条件を満たす多項式が 2 つ存在することはない。

以上より，求めるべき $f(x)$ は一意に存在している。　(証明終)

α は最高次数の係数が 1 の整数係数多項式の解として表せたが，このよう

な数を代数的数という。[2]

本問で求めた $f(x)$ は最小多項式と呼ばれるものであり，代数的数に対して最小多項式を求めることは数学的興味の対象となりうる。

最小多項式の次数に関する記述は，解説では計算で無理やり求めたが，主に大学の数学科で学ぶ「代数学」という分野の道具を使えば簡明に記述できる。

[2] 有理数に根号を添加したものが必ず代数的数になるとは限らず，例えば $\sqrt{\frac{1}{2}}$ は代数的数でない。

(3) (2) と逆の手順をたどれば自然と因数分解できる。次数が 4 になっているが，方針としては，2 次方程式の解の公式を導出するときと全く同じである。

（松下祐樹，沈有程）