2018年度 東京大学 前期 物理

第1問　台が動く振り子

出題範囲	重心運動，相対運動
難易度	★★★★☆
所要時間	得意：20 分　　ふつう：25 分　　苦手：30 分
傾向と対策	この問題は動く台に取りつけられた振り子の問題であった。 Ⅰの前半は，微小振動ではないため，単振動ではない。このことから，Ⅰ(1) では，運動量保存則やエネルギーの式から解くということがわかる。大学入試では，振り子を考える際には，単振動になる微小振動のときを考えることがほとんどであるため，この問題でも単振動だと思って取り掛かった人もいたかもしれない。そのあと，Ⅰ(4) ではじめて微小振動について考えるので，混乱した人もいただろう。Ⅰ(2) では，相対速度を考えると見通しがよい。ここでは，丁寧に図を描いていれば解けたと思われる。また，Ⅰ(3) では，点 Q が重心であることが示唆される。このことはⅡを解くにあたって，頭に入れておくと非常に見通しがよくなったであろう。 Ⅱでは，台に外力を加えた場合を考えている。ここでは，慣性力の議論によって見かけの重力が生じ，その結果，見かけの重力による力のつり合う点を振動中心とする振動であることを把握したい。また，Ⅱ(1) では，最大の高さを求める際に，台となす角が振動中心の角度の 2 倍の角度になることに注意したい。このことは，振動のはじめが $\theta = 0$ であることと，振動の，振動中心における対称性からわかる。Ⅱ(3) では，$F(t)$ を議論するには，道具として運動方程式を評価することをすぐに思いつきたい。選択肢から，$F(t)$ の $t = 0,\ t_0$ でのそれぞれの値がわかればよいということがわかる。$t = 0$ での値は簡単にわかるので $t = t_0$ での値が問題になる。運動方程式を変形し，与えられた条件 $0 < a < g$ を用いて不等式の評価にもちこむという方針が標準的だと思われる。Ⅱ(4) では状況がⅠと同じであり，その結果をうまく用いたい。前半は，Ⅰ(3) で示唆される点 Q が重心であることを用いる問題である。また，後半では，微小振動する振り子の周期が，振り子をつり下げている点からの長さのみで決まることからⅠとまったく同じ結果になることもすぐに思いつきたい。ここでは，物理的な感覚が身についている人は迷うことなく解けただろうが，そうでない人では時間をロスしてしまった人もいるだろう。 これらのことから，この問題のように，出題の物理的な意味を考えさせ，あとの問題でそこが本質になってくるという出題は，物理の感覚が備わっているかを問う東大らしい良問であるといえる。

解説

I

(1)

小球と台の，小球が最初に最下点を通過するときの速度の x 成分をそれぞれ v_x，V_x とおく。

x 軸方向の運動量保存則より，

$$0 = mv_x + MV_x$$

$$\therefore \quad V_x = -\frac{m}{M}v_x \qquad \cdots\cdots ①$$

速度の y 成分は 0 なので，エネルギー保存則より，

$$mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}m{v_x}^2 + \frac{1}{2}M{V_x}^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

①を②に代入すると，

$$mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}m{v_x}^2 + \frac{1}{2}M\left(-\frac{m}{M}v_x\right)^2$$

$$\therefore \quad {v_x}^2 = \frac{2M}{m+M}gL(1-\cos\theta_0)$$

$$\therefore \quad v_x = \boldsymbol{\sqrt{\frac{2M}{m+M}gL(1-\cos\theta_0)}} \quad (\because \ v_x > 0)$$

(2)

点 P から見た小球の相対速度の x 成分は $v-V$ である。点 P から距離 l だけ離れた糸上の点での相対速度の x 成分はその $\dfrac{l}{L}$ 倍であるから，求める速度を w とおくと，

$$w = V + \frac{l}{L}(v-V)$$

$$\therefore \quad w = \boldsymbol{\frac{vl+V(L-l)}{L}}$$

(3)

(2) の答えで $w=0$ として,

$$0 = vl_0 + V(L-l_0) \qquad \cdots\cdots ③$$

(1) と同様にして,運動量保存則より,

$$0 = mv + MV$$

$$\therefore \quad V = -\frac{m}{M}v \qquad \cdots\cdots ④$$

④を③に代入して,

$$0 = vl_0 + \left(-\frac{m}{M}v\right)(L-l_0)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{l_0 = \frac{m}{m+M}L}$$

(別解)

問題文より,点 Q はこの系の重心であり,重心はそれぞれの物体(質点)を結ぶ線分を質量の逆比に内分する点なので,$l_0 = \dfrac{m}{m+M}L$

(4)

(3) より,小球と点 Q 間の距離 l_1 は,

$$l_1 = L - l_0 = \frac{M}{m+M}L$$

ゆえに,単振り子の周期を考えて,

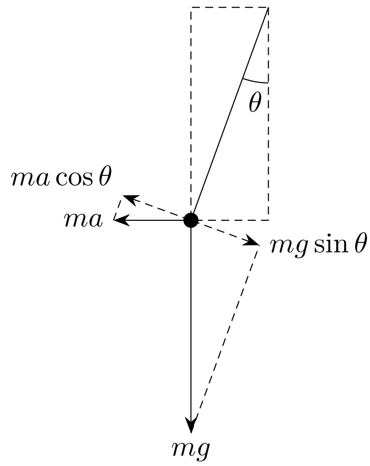
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{m+M}\frac{L}{g}}}$$

II

(1)

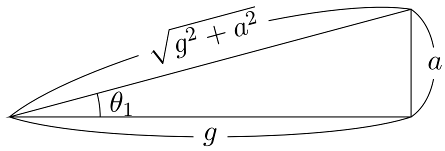
力 $F(t)$ が加わるとき，台とともに動く座標系から見ると小球には左向きに ma の慣性力が加わる。θ を右図のように I と同様にとり，つり合いの位置を $\theta=\theta_1$ とおく。円運動の接線方向の力のつり合いより，



$$ma\cos\theta_1 = mg\sin\theta_1$$

$$\therefore \quad \tan\theta_1 = \frac{a}{g}$$

台に対する小球は振動し，その振動中心はつり合いの位置 $\theta=\theta_1$ で，はじめは $\theta=0$ で静止している。求める高さは，角度がつり合いの位置の 2 倍となる高さであるから，



$$h+L(1-\cos 2\theta_1)$$

$$= h+2L\sin^2\theta_1$$

$$= \boldsymbol{h+2L\frac{a^2}{g^2+a^2}}$$

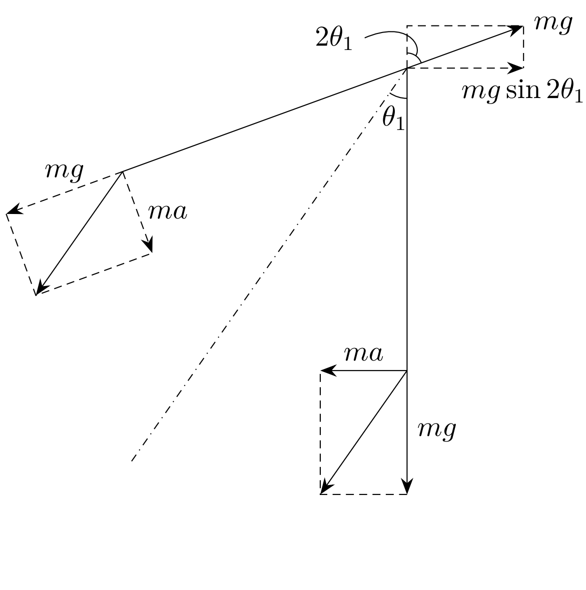
(2)

$t=t_0$ において，小球の鉛直方向の速さは 0 になる。また，時刻 $t=t_0$ で台と小球ともに，速度の x 成分は at_0 である。よって，エネルギーと仕事の関係より，

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}(m+M)(at_0)^2+mg\cdot 2L\frac{a^2}{g^2+a^2}}$$

(3)

振り子の対称性を考えると，$t=0$ のときと $t=t_0$ のときで小球にはたらく力には対称性があるから，右図より，$t=t_0$ のときの，ひもに加わる張力の x 成分は $mg\sin 2\theta_1$ になる。II (1) より，



$$mg\sin 2\theta_1 = 2mg\frac{ag}{g^2+a^2}$$

$$= 2ma\frac{1}{\left(\frac{a}{g}\right)^2+1}$$

よって，$0 < a < g$ であるから，$ma < mg\sin 2\theta_1 < 2ma$ である。したがって，台の運動方程式は，

$$Ma = F(t_0) - mg\sin 2\theta_1$$

であるから，$(M+m)a < F(t_0) < (M+2m)a$ となり，条件を満たすものは**イ**である。

※注

対称性に注目せずに，素直に台の運動方程式を立てると，

$$Ma = F(t) - m\sqrt{g^2+a^2}\cos(\theta-\theta_1)\sin\theta$$

となり，$t=0$ で $\theta=0$，$t=t_0$ で $\theta=2\theta_1$ であることを用いて $F(0)$，$F(t_0)$ の式が求まる。あとは本解の後半の不等式評価と同様にして結論が得られる。

(4)

台に x 方向の外力が加わっていないことから，Ｉと同じ状況である。$t=t_0$ では，台から見た小球は静止していることから，時刻 $t=t_0$ における床から見た小球の速度の x 成分が at_0 で，これは時刻 $t=t_0$ における点 Q の速度の x 成分と等しい。点 Q はＩ（2）より重心である。外力がつり合っている方向では重心速度が一定であることから，点 Q の速度の x 成分は一定で $\boldsymbol{at_0}$ である。また，a が g に比べて十分小さいとき，点 Q から見た小球の微小振動の周期は，振幅には依存せず $\boldsymbol{T_2} = T_1 \boldsymbol{= 2\pi\sqrt{\frac{M}{m+M}\frac{L}{g}}}$ である（振り子の等時性）。

◆ Column

微小振動ではない単振り子の周期

以下では，時刻 t での微分を，物理量の上に・をつけて表す。なお，内容としては数学 III の微積分の知識があれば読めるようになっている。

本問 I の前半のように，微小振動ではない単振り子の運動は単振動ではない。このような単振り子の振動を運動方程式を直接解くことで解析することはできないが，力学的エネルギー保存の式は立てることができる。また，それを用いて，この振動の周期が単振動の周期 $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$（l は振り子の長さ，g は重力加速度）とは違うことがわかる。以下では，微小振動ではない単振り子の周期について考えてみる。

いま，振り子の鉛直下方向となす角を $\theta(t)$ とし，$-\pi < \theta < \pi$ であるとする（反時計回りを増加する向きとなるように正の向きを定める）。時刻 $t = 0$ で $\theta = \theta_0(0 < \theta_0 < \pi)$ から静かに手を離した場合の運動を考える。初期条件から $\dot{\theta}(0) = 0$ である。

いま，振り子の先にある物体の質量を m とすると，運動方程式は以下のようになる。

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \qquad \cdots\cdots①$$

上述した通り，これはそのまま解くことのできない（θを初等的な関数では表せない）方程式である。しかし，①の両辺に $\dot{\theta}$ をかけると，

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\dot{\theta}\sin\theta$$

ここで，合成関数の微分より $\dfrac{d}{dt}\left(A^2\right) = 2A\dot{A}$，$\dfrac{d}{dt}\left(\cos B\right) = -\sin B\cdot\dot{B}$ だったことから，この式は以下のように変形できる。

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}^2\right) = \frac{2g}{l}\frac{d}{dt}\left(\cos\theta\right)$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}^2 - \frac{2g}{l}\cos\theta\right) = 0$$

ここで，両辺を t で積分して $\dfrac{1}{2}ml^2$ をかけると力学的エネルギー保存則である次式が導かれる。

$$\dot{\theta}^2 - \frac{2g}{l}\cos\theta = \text{一定} \qquad \cdots\cdots②$$

$$\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 - mgl\cos\theta = \text{一定}$$

②より，時刻 t と $t=0$ において，

$$\dot{\theta}^2 - \frac{2g}{l}\cos\theta = 0^2 - \frac{2g}{l}\cos\theta_0$$

となる。さらに変形して，

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} \qquad (\because \cos\theta - \cos\theta_0 > 0)$$

$$1 = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\frac{d\theta}{dt}$$

いま，この振動は $\theta=0$ を中心に対称性をもつので，振動の周期を T とすると，$t=\dfrac{3}{4}T$ から $t=T$ になるまでに，θ は $\theta=0$ から $\theta=\theta_0$ になる。このことから，両辺を $t=\dfrac{3}{4}T$ から $t=T$ まで積分すると，

$$1 = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\int_{\frac{3}{4}T}^{T} 1dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$\therefore \quad T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

したがって，右辺の積分が求まれば，微小振動ではない単振り子の周期がわかる。

いま，$-\pi < \theta < \pi$ において $\sin\dfrac{\theta}{2}$ は単調増加であり，$-\theta_0 \leqq \theta \leqq \theta_0$ において，

$$-\sin\frac{\theta_0}{2} \leqq \sin\frac{\theta}{2} \leqq \sin\frac{\theta_0}{2}$$

$$\therefore \quad -1 \leqq \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_0}{2}} \leqq 1 \qquad (\because \theta_0 \fallingdotseq 0 \text{ より } \sin\frac{\theta_0}{2} \fallingdotseq 0)$$

$\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_0}{2}}$ は単調増加な関数なので，

$$\sin\phi = \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_0}{2}} \qquad (\theta=0 \text{ で } \phi=0,\ \theta=\theta_0 \text{ で } \phi=\frac{\pi}{2}) \qquad \cdots\cdots ③$$

という変数変換をすることができる。これによって先ほどの右辺を置換積分しよう。

$\cos^2\phi = 1-\sin^2\phi = \dfrac{\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}}$ である。これを用いて，

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0} &= \sqrt{\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-\left(1-2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)} \\
&= \sqrt{2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \sqrt{2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\cdot\frac{\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}}} \\
&= \sqrt{2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\cos^2\phi} \\
&= \sqrt{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\phi \qquad \cdots\cdots④
\end{aligned}$$

$\left(\because \sin\dfrac{\theta_0}{2}\right.$，$\cos\phi$はともに正)

また，③の両辺を ϕ で微分すると，

$$\cos\phi = \frac{\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\dfrac{d\theta}{d\phi}}{\sin\dfrac{\theta_0}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad d\theta &= \frac{2\sin\dfrac{\theta_0}{2}\cos\phi}{\cos\dfrac{\theta}{2}}d\phi \\
&= \frac{2\sin\dfrac{\theta_0}{2}\cos\phi}{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}}d\phi \\
&= \frac{2\sin\dfrac{\theta_0}{2}\cos\phi}{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}\sin^2\phi}}d\phi \qquad \cdots\cdots⑤
\end{aligned}$$

④，⑤より，

$$\begin{aligned}
T &= 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} \\
&= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}\sin^2\phi}}
\end{aligned}$$

$$K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}\sin^2\phi}}$$ とおく。これは**第一種完全楕円積分**とよばれる。

いま，$1 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}\sin^2\phi}}$ より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi < K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$$

すなわち，$4\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ を両辺にかけると，

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} < 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)=T \qquad \cdots\cdots ⑥$$

となる。不等式の左辺は微小振動の単振り子の周期であり，**厳密な周期は微小近似した場合の周期よりも大きい**ことがわかった。

実は，$K\left(\sin\dfrac{\theta_0}{2}\right)$ は数学 III（積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx$）と大学の学部 1 年程度の微積分（マクローリン展開，項別積分）によって値を求めることができて，

$$K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}\right)$$

となることが知られている。ここで，!! は自然数を 1 つおきにかけた積で，例えば $5!!=5\cdot3\cdot1=15$，$6!!=6\cdot4\cdot2=48$ である。この式より，単振り子の厳密な周期は，初期条件である θ_0 に依存しており，振り子の等時性が破れていることもわかる。

また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}$ は明らかに正なので，ただちに $K\left(\sin\dfrac{\theta_0}{2}\right)>\dfrac{\pi}{2}$ がわかり，⑥が従う。

興味のある人はキーワード（$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx$，マクローリン展開，項別積分）を参考にしてほしい。θ_0 の値によってどれくらい振り子の等時性の破れが生じるのか，数値計算をしてみるのも面白いかもしれない。

なお，第一種完全楕円積分 K は，複素数の範囲においてその逆関数が豊かな性質をもっていて，学部 3，4 年程度の複素解析という数学の分野で扱われる。これも，興味のある人は調べてみよう。

（ 三澤颯大，森本亮太，岡田和也，山崎裕太郎 ）

2018年度 東京大学 前期 物理

第 2 問　単振動する平行板コンデンサー

出題範囲	コンデンサー，電位，単振動
難易度	★★★★☆
所要時間	得意：25 分　　ふつう：30 分　　苦手：35 分
傾向と対策	第 2 問は，例年通り電磁気の分野からの出題。しかし，Ⅰ，Ⅱともに最後の設問で単振動の周期が問われており，力学の要素が強くなっている。この年の大問 3 つの中では最も難しく感じた人が多いだろう。設問数は多くないが，似たタイプの問題を解いたことがないと方針が立てづらく，そのうえ 1 問 1 問の計算量も多いため，見た目以上に時間がかかる構成になっている。第 1 問の力学も難問だったため，心理的な負荷も相まって，非常に差がついた大問だと思われる。 Ⅰは，2 枚の金属板がばねでつながれた平行板コンデンサーの問題。平行板コンデンサーの一方の極板にはたらく力が $\frac{1}{2}QE$ で表されることを覚えていなければ，(1) から解けなくなってしまう。(2) は (1) が解けていれば問題なく解けるが，(3) は単振動の周期を求める問題であり，力学の要素が強くなる。 Ⅱは，Ⅰからさらに金属板が 3 つ増えた回路を考える。見た目のインパクトもさることながら，実際に解いてみると計算量が多く，試験場で最後まで解ききるのは難しい。(1) は，各金属板の電荷分布から金属板間の電場を求め，金属板 3 にはたらく力のつり合いの式を立てる。ここで計算ミスをすると後ろの問題にも響くため，正確さが求められる。(2) は，各金属板間の電場さえ求まっていれば，あとは足し合わせて V になるように式を立てるだけだが，やはり計算ミスに注意。(3) は，導線でつながれている金属板 1 と金属板 5 が等電位であることに気づけるかがすべて。ここまで解き進められた人なら確実に取りたい。(4) は，再び単振動の周期を求める問題。(3) までができていれば方針はすぐに立つが，やはり時間の制約が厳しい。 全体としては，問われている電磁気の事項は少ないが，力学との融合問題であること，計算量が多いことから，東京大学の物理の問題の中でも難しいものとなっている。普段から分野に縛られない融合問題に取り組んでいること，本番の緊張感の中でも手早く正確に計算できるように訓練しておくことが求められる。

解説

I

(1)

コンデンサーの電気容量 C_0 は $C_0 = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$ である。コンデンサーの電気量を Q_0 とすると，

$$Q_0 = C_0 V = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V$$

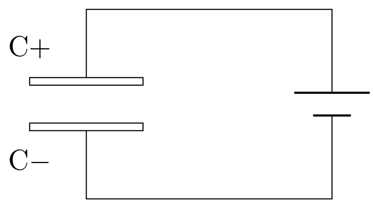
金属板間の電場の大きさ E_0 は $E_0 = \dfrac{V}{d}$ であるから，求める静電気力の大きさは，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} Q_0 E_0 &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \frac{S}{d} V \cdot \frac{V}{d} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon_0 \frac{SV^2}{2d^2}}\end{aligned}$$

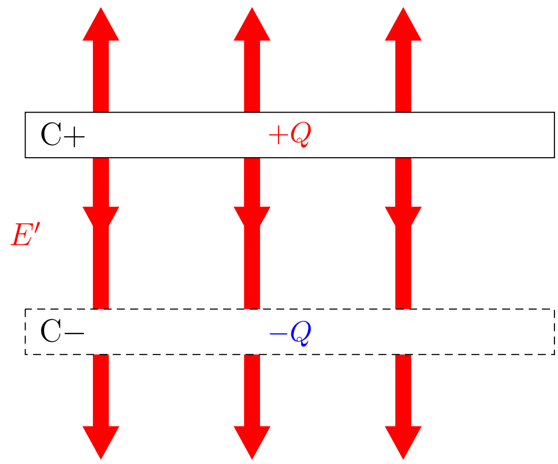
◆ **Check!!**

平行板コンデンサーの極板にはたらく力

平行板コンデンサーの一方の極板にはたらく力が $\dfrac{1}{2}QE$ で表されることを復習しておこう。2 枚の極板 C+，C− と電源をつないだ下のような回路を考える。このとき，極板 C+，C− の電気量はそれぞれ $+Q$，$-Q$，極板間には大きさ E の電場が生じているとする（なお，この Check!!中で用いる文字は，解説中の文字とは関係ない）。

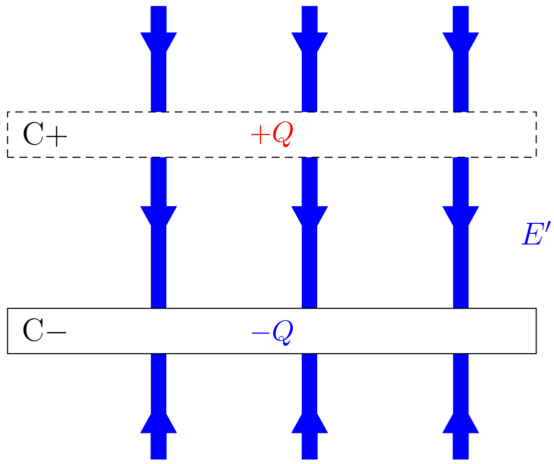


まず，極板 C+ に蓄えられた電荷によってつくられる電場は，その大きさを E' とおくと，下の図のようになる。このとき，極板 C− が受ける静電気力の大きさは QE' になる。

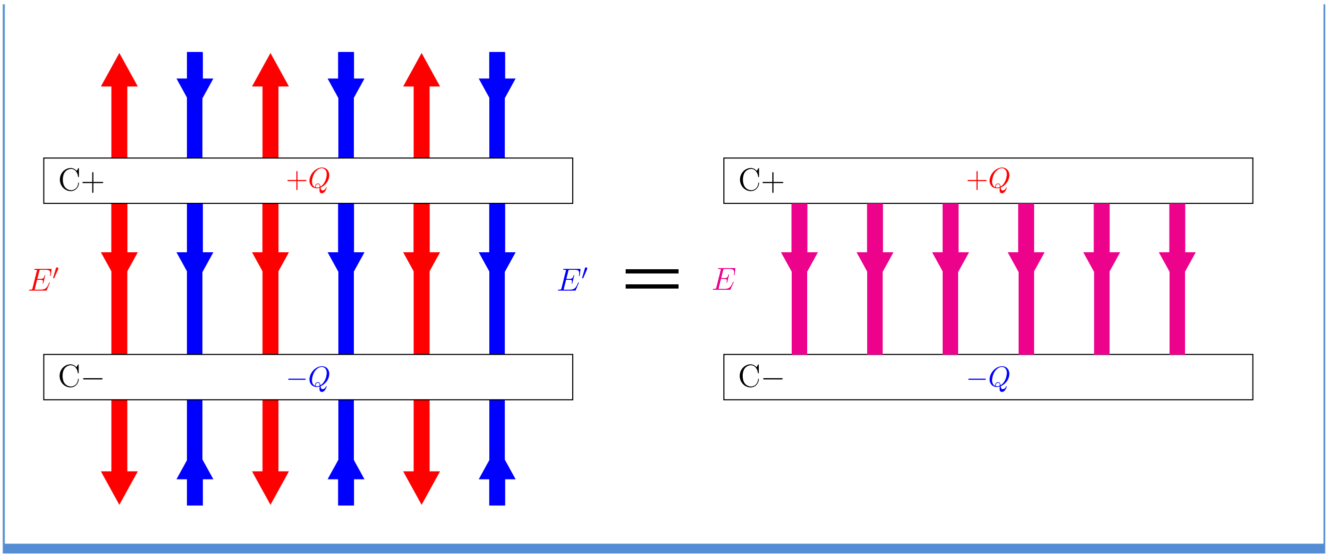


また，極板 C+ と C− は電荷の正負以外はすべて同じ条件であるから，極板 C− に蓄えられた電荷によってつくられる電場の大きさは，極板 C+ と同様に E' となる。

よって，極板 C− に蓄えられた電荷によってつくられる電場を考えると次のようになり，極板 C+ が受ける静電気力の大きさも同じく QE' になることがわかる。



これらの電場を重ね合わせると，極板の外側では電場が打ち消しあい，極板間のみに大きさ $2E'$ の電場が生じることがわかる。これが E と等しいことから，$E' = \dfrac{1}{2}E$ であり，それぞれの極板が受ける力の大きさは，$QE' = \dfrac{1}{2}QE$ となることがわかる。



(2)

金属板の間隔が d となったときのばねの縮みを x_1 とする。力のつり合いより，

$$-kx_1 + \varepsilon_0 \frac{SV^2}{2d^2} = 0 \qquad (\because \ \text{I}\,(1)\,)$$

$$\therefore \quad x_1 = \varepsilon_0 \frac{SV^2}{2kd^2}$$

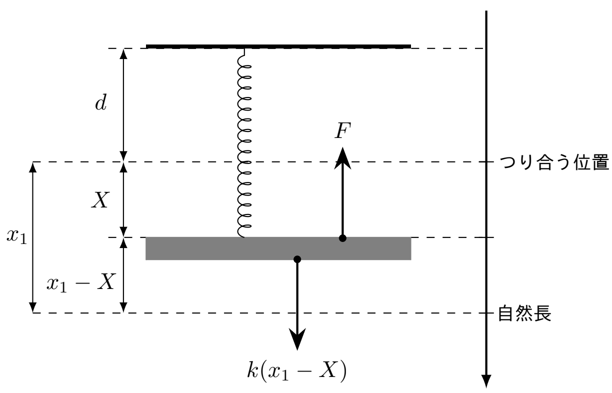
したがって，ばねに蓄えられている弾性エネルギーは，

$$\frac{1}{2}k{x_1}^2 = \boldsymbol{\frac{1}{8k}\left(\varepsilon_0 \frac{SV^2}{d^2}\right)^2}$$

(3)

下の金属板のつり合いの位置からの変位を，下向きを正として X とする。(1) と同様に考えると，下の金属板にはたらく静電気力の大きさ F は，(1) で求めた静電気力の d を $d+X$ に置き換えたものだから，

$$F = \varepsilon_0 \frac{SV^2}{2(d+X)^2}$$



下の金属板の加速度を，下向きを正として α_1 と

すると，右図より運動方程式は，

$$
\begin{aligned}
m\alpha_1 &= k(x_1 - X) - F \\
&= k\left(\varepsilon_0 \frac{SV^2}{2kd^2} - X\right) - \varepsilon_0 \frac{SV^2}{2(d+X)^2} \\
&= \varepsilon_0 \frac{SV^2}{2d^2} - kX - \varepsilon_0 \frac{SV^2}{2d^2}\left(1 + \frac{X}{d}\right)^{-2} \\
&\fallingdotseq \varepsilon_0 \frac{SV^2}{2d^2} - kX - \varepsilon_0 \frac{SV^2}{2d^2}\left(1 - \frac{2X}{d}\right) \qquad \left(\because \left|\frac{X}{d}\right| \ll 1\right) \\
&= -\left(k - \varepsilon_0 \frac{SV^2}{d^3}\right) X
\end{aligned}
$$

ここで，角振動数を ω_1 として単振動の運動方程式 $m\alpha_1 = -m{\omega_1}^2 X$ と比較すると，

$$
\omega_1 = \sqrt{\frac{kd^3 - \varepsilon_0 SV^2}{md^3}} \qquad (\because\ \omega_1 \geqq 0)
$$

したがって，求める周期は，

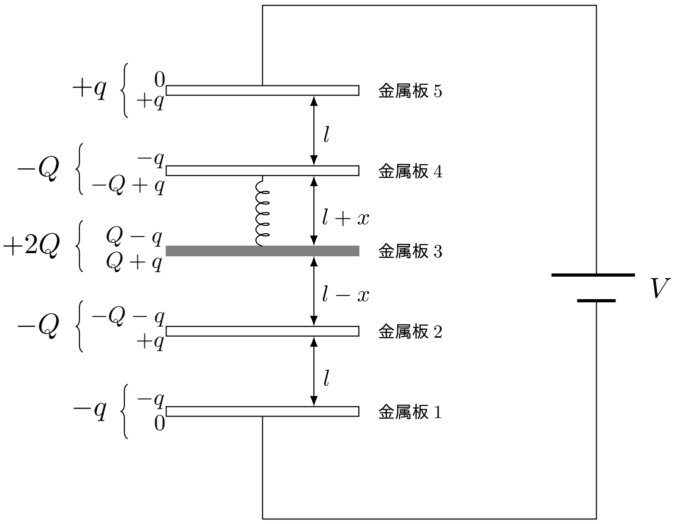
$$
\frac{2\pi}{\omega_1} = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{md^3}{kd^3 - \varepsilon_0 SV^2}}}
$$

II

金属板 i から見た金属板 j の電位を V_{ij}，金属板 i と金属板 j 間の電場を E_{ij} と表す（ただし，i，j は 1，2，3，4，5 のいずれか）。また，図で下向きを電場の正の向きとする。

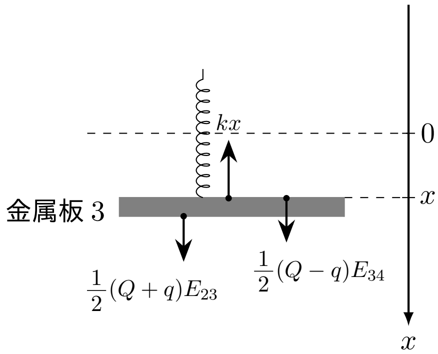
(1)

電源の電圧が V になってからの，各金属板の表面における電荷の分布は右図のようになっているので，



$$\left.\begin{aligned} E_{12} &= \frac{q}{\varepsilon_0 S} \\ E_{23} &= \frac{Q+q}{\varepsilon_0 S} \\ E_{34} &= \frac{-Q+q}{\varepsilon_0 S} \\ E_{45} &= \frac{q}{\varepsilon_0 S} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots ①$$

このとき，金属板 3 の表面の電荷と金属板間の電場を考えると，金属板 3 にはたらく力は右図のようになっているから，力のつり合いより，



$$-kx + \frac{1}{2}(Q+q)\frac{Q+q}{\varepsilon_0 S} + \frac{1}{2}(Q-q)\frac{-Q+q}{\varepsilon_0 S} = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{2Qq}{k\varepsilon_0 S}}$$

(2)

V_{12}，V_{23}，V_{34}，V_{45} を足し合わせると，金属板 1 と金属板 5 の電位差 V になるから，

$$\begin{aligned} V &= V_{12} + V_{23} + V_{34} + V_{45} \\ &= lE_{12} + (l-x)E_{23} + (l+x)E_{34} + lE_{45} \\ &= l\frac{q}{\varepsilon_0 S} + (l-x)\frac{Q+q}{\varepsilon_0 S} + (l+x)\frac{-Q+q}{\varepsilon_0 S} + l\frac{q}{\varepsilon_0 S} \qquad (\because ①) \\ &= \frac{2(2lq - xQ)}{\varepsilon_0 S} \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

したがって，求める全電気容量 $\dfrac{q}{V}$ は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\frac{q}{V}} &= \frac{q\varepsilon_0 S}{2(2lq - xQ)}\\ &= \frac{\varepsilon_0 S}{2\left(2l - \dfrac{x}{q}Q\right)}\\ &= \frac{\varepsilon_0 S}{2\left(2l - \dfrac{2Q^2}{k\varepsilon_0 S}\right)} \qquad (\because \text{Ⅱ}(1))\\ &\boldsymbol{= \frac{k(\varepsilon_0 S)^2}{4(lk\varepsilon_0 S - Q^2)}}\end{aligned}$$

(3)

金属板 3 の変位が x のときの金属板 5 の電荷を $q(x)$ とおくと，金属板 1 と金属板 5 の電位差はⅡ(2)と同様に考えて，②で q を $q(x)$ に置き換えたものになる。

また，スイッチ 1 を開いてスイッチ 2 を閉じたとき，金属板 1 と金属板 5 は導線でつながれているため，電位差は 0 となる。したがって，

$$0 = \frac{2\{2lq(x) - xQ\}}{\varepsilon_0 S}$$

$$\therefore \quad q(x) = \boldsymbol{\frac{x}{2l}Q}$$

(4)

Ⅱ(1)と同様に金属板 3 にはたらく力を考えて，金属板 3 の加速度を α_2 とすると運動方程式は，

$$\begin{aligned}m\alpha_2 &= -kx + \frac{1}{2}\{Q + q(x)\}\frac{Q + q(x)}{\varepsilon_0 S} + \frac{1}{2}\{Q - q(x)\}\frac{-Q + q(x)}{\varepsilon_0 S}\\ &= -kx + \frac{2Q}{\varepsilon_0 S}q(x)\\ &= -kx + \frac{2Q}{\varepsilon_0 S}\cdot\frac{x}{2l}Q \qquad (\because \text{Ⅱ}(3))\\ &= -\left(k - \frac{Q^2}{\varepsilon_0 Sl}\right)x\end{aligned}$$

ここで，角振動数を ω_2 として単振動の運動方程式 $m\alpha_2 = -m{\omega_2}^2 x$ と比較すると，

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k\varepsilon_0 Sl - Q^2}{m\varepsilon_0 Sl}} \qquad (\because \ \omega_2 \geqq 0)$$

したがって，求める周期は，

$$\frac{2\pi}{\omega_2} = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{m\varepsilon_0 Sl}{k\varepsilon_0 Sl - Q^2}}}$$

（一丸友美，岡田和也，岡部律心，山崎裕太郎）

2018年度 東京大学 前期 物理

第3問　管でつながった3本の液柱

出題範囲	状態方程式，熱力学第一法則
難易度	★★★☆☆
所要時間	得意：20 分　　ふつう：25 分　　苦手：30 分
傾向と対策	今回題材とされているのは，管でつながった条件の異なる 3 本の容器に入れられた液体という，見慣れないものである。最初に問題の図を見て複雑そうな問題だと思った人は少なくはないだろう。しかし，問題自体は，自ら物理量を設定し条件式を立てることで解法が見えてくるようになっており，それほど難解ではないことがわかる。今回のように，一見複雑そうで初めて見る設定の問題でも，自分で必要だと思われる物理量を設け，状況を数式で整理することで一気に視界が開けるような問題というのは，東京大学の入試では頻繁に出題される。そして，そのプロセスを自分でたどることのできる力こそ物理で必要とされる力であるから，ぜひともその力を身につけられるように普段から意識して勉強に励んでほしい。 また，Ⅱ と Ⅲ の問題のつながりは一見不明瞭に思われたかもしれないが，実は積分の考えが背景に潜んでおり，その考えを用いれば，Ⅱの答えを利用して Ⅲ を解くことが可能である（Ⅲ (2) 別解参照）。

解説

液体の密度を ρ，重力加速度を g とおく。

I

容器 A，B，C それぞれの，容器 C の液面の高さにはたらく力は等しいので，

$$5\rho g S h = p_1 S + 2\rho g S h = p_0 S$$

左辺 = 中辺と左辺 = 右辺より，

$$p_1 = 3\rho g h \qquad \cdots\cdots ①$$

$$p_0 = 5\rho g h \qquad \cdots\cdots ②$$

がそれぞれわかるので，

$$\boldsymbol{p_1 = \frac{3}{5} p_0} \qquad \cdots\cdots ③$$

II

(1)

容器 A，C の液面がそれぞれ y，z だけ上がったとすると，液体の体積は変わらないから，

$$\rho g S x = \rho g S y + \rho g S z$$

$$\therefore \quad x = y + z \qquad \cdots\cdots ④$$

また，容器 A，B，C それぞれの，容器 C の最初の液面の高さにはたらく力は等しいので，液面の移動後の容器 B の気体の圧力を $p_1 + \Delta p$ とすると，

$$\rho g S(5h + y) = (p_1 + \Delta p)S + \rho g S(2h - x) = p_0 S + \rho g S z \qquad \cdots\cdots ⑤$$

左辺 = 右辺と②より，

$$\rho g S y = \rho g S z$$

$$\therefore \quad y = z$$

これと④より，

$$y = z = \frac{x}{2}$$

よって，**容器 A，C の液面はともに上向きに $\dfrac{x}{2}$ だけ移動する**。

(2)

容器 B の気体の体積は $4Sh$ から $S(4h+x)$ になるから，

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{S(4h+x)-4Sh}{4Sh} = \frac{x}{4h}$$

また，⑤の左辺 = 中辺と II (1) の結果より，

$$(p_1+\Delta p)S = \rho g S\left(3h+\frac{x}{2}+x\right)$$

$$p_1+\Delta p = \rho g\left(3h+\frac{3x}{2}\right)$$

$$= \frac{p_1}{3h}\left(3h+\frac{3x}{2}\right) \qquad \text{(①を用いた)}$$

$$= \left(1+\frac{x}{2h}\right)p_1$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta p}{p_1} = \frac{x}{2h}$$

(3)

容器 B の気体は一定の圧力 p_1 で液面を x だけ押し下げるとしていいので，求める仕事 W は，

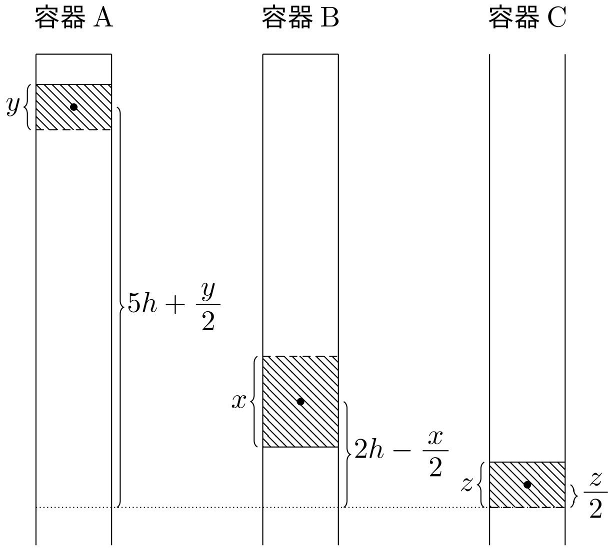
$$W \fallingdotseq p_1 Sx \ \left(= \frac{3}{5}p_0 Sx\right)$$

(4)

位置エネルギーの基準面を，容器 C の最初の液面の高さとすると，最初に容器 B の液面付近にある厚さ x の液体の重心の基準面からの高さは，$2h - \dfrac{x}{2}$ である。よって，この液体の最初の位置エネルギーは，

$$\rho g S x \cdot \left(2h - \frac{x}{2}\right)$$

である。



この液体が，容器 A，C の液面付近に移動すると，それらの液体の重心の基準面からの高さは，それぞれ，$5h + \dfrac{y}{2} = 5h + \dfrac{x}{4}$，$\dfrac{z}{2} = \dfrac{x}{4}$ となる。よって，移動後のそれらの液体の位置エネルギーの和は，

$$\begin{aligned}\rho g S y \cdot \left(5h + \frac{y}{2}\right) + \rho g S z \cdot \frac{z}{2} &= \rho g S \frac{x}{2} \cdot \left(5h + \frac{x}{4} + \frac{x}{4}\right) \\ &= \rho g S \frac{x}{2} \cdot \left(5h + \frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

である。

以上より，求める位置エネルギーの変化 $\varDelta E$ は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varDelta E} &= \rho g S \frac{x}{2} \cdot \left(5h + \frac{x}{2}\right) - \rho g S x \cdot \left(2h - \frac{x}{2}\right) \\ &\fallingdotseq \frac{1}{2} \rho g S x h \qquad (x^2\text{に比例する項は無視した}) \\ &\boldsymbol{= \frac{1}{6} p_1 S x} \ \left(\boldsymbol{= \frac{1}{10} p_0 S x}\right)\end{aligned}$$

(5)

II (3) と (4) の答えを見てわかるとおり，W と $\varDelta E$ は**等しくない**。その差を計算すると，

$$W - \varDelta E = \frac{1}{2} p_0 S x = p_0 S \cdot \frac{x}{2}$$

であるが，これが表すのは**容器 C の液面が大気を押す際にする仕事**である。

Ⅲ

(1)

容器 A の液面が上端に達したとき，$y = h$ であるから，$x = 2h$ である。よって，$V_2 = S(4h + 2h) = 6Sh$ であり，p_2 は $x = 2h$ のときの $p_1 + \varDelta p$ の値である。すなわち，

$$V_2 = 6Sh = \frac{3}{2}V_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{2}$$

$$p_2 = \left(1 + \frac{2h}{2h}\right)p_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{p_2}{p_1} = 2$$

また，ボイル・シャルルの法則より，

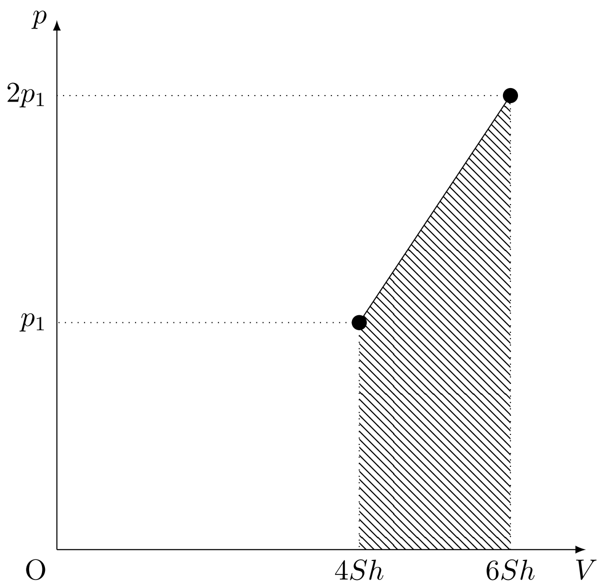
$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\therefore \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

以上より，**体積：$\frac{3}{2}$ 倍，圧力：2 倍，温度：3 倍**となる。

(2)

まず，気体のする仕事 W を考える。Ⅱ (2) より，容器 B の気体の圧力の増加量は体積の増加量に比例する。したがって，p-V 図を描くと右のようになり，W は斜線部の面積と等しい。ここで，Ⅱ (3) で求めた W の値は，x が h に比べて十分小さいときの近似値であるから，その式に $x = 2h$ を代入した値は実際の値とは異なることに注意しなければならない。よって，



$$W = \frac{1}{2}(p_1 + 2p_1)(6Sh - 4Sh) = 3p_1 Sh$$

となる。容器 B の気体の内部エネルギー変化を $\varDelta U$ として熱力学第一法則を立式すると，

$$Q = \varDelta U + W = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + 3p_1 Sh$$

ここで，最初の状態での容器 B の気体の状態方程式

$$p_1 \cdot 4Sh = nRT_1$$

を用いると，

$$Q = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{3}{4}nRT_1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{Q}{T_2 - T_1}} = \frac{3}{2}nR + \frac{\frac{3}{4}nRT_1}{T_2 - T_1}$$

$$= \frac{3}{2}nR + \frac{\frac{3}{4}nRT_1}{3T_1 - T_1}$$

$$= \frac{3}{2}nR + \frac{3}{8}nR$$

$$\boldsymbol{= \frac{15}{8}nR}$$

（別解）

Ⅱ（3）の結果を利用して気体のする仕事 W を求めてみる。

まず，Ⅱ (3) より，圧力 p の容器 B の気体が液面を微小距離 dx だけ押し下げるときの，気体が液体に対してする仕事 dw は，二次の微小項を無視して，

$$dw = pSdx$$

また，Ⅱ (2) と同様の考え方より，液面が dx だけ降下したときの容器 B の気体の圧力の微小変化 dp は，

$$dp = \frac{p_1}{2h}dx$$

これらを用いると，容器 B の気体がする仕事 W は，

$$W = \int_{x=0}^{x=2h} pSdx$$

$$= \int_{p=p_1}^{p=2p_1} pS \cdot \frac{2h}{p_1}dp$$

$$= \frac{2Sh}{p_1}\left[\frac{p^2}{2}\right]_{p_1}^{2p_1}$$

$$= \frac{Sh}{p_1}(4{p_1}^2 - {p_1}^2)$$

$$= 3p_1Sh$$

（ 岡部律心，三澤颯大，岡田和也 ）