2018 年度 東京大学 前期 数学

第 1 問　導関数の変形

出題範囲	微分／極限
難易度	★★☆☆☆
所要時間	得意：15 分　　ふつう：20 分　　苦手：25 分
傾向と対策	導関数をうまく式変形できたかが分かれ道となった。うまく変形できればすぐに増減表を書けるが，そのまま二階微分をするなどの操作をしてしまうと，関数が煩雑になり処理できなくなるだろう。

解答

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{\sin x} + \cos x \\
f'(x) &= \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} - \sin x \\
&= \frac{1}{\sin^2 x}(\sin x - x\cos x - \sin^3 x) \\
&= \frac{1}{\sin^2 x}\{\sin x(1 - \sin^2 x) - x\cos x\} \\
&= \frac{1}{\sin^2 x}\{\sin x\cos^2 x - x\cos x\} \\
&= \frac{\cos x}{\sin^2 x}(\sin x\cos x - x) \\
&= \frac{\cos x}{\sin^2 x}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - x\right)
\end{aligned}
$$

ここで，$0 < x < \pi$ において

$$\frac{1}{2}\sin 2x - x < 0$$

を示す。$g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - x\ (0 \leqq x < \pi)$ とおいて，

$g'(x) = \cos 2x - 1 < 0$ なので，$0 < x < \pi$ において $g(x)$ は単調減少である。

$g(0) = 0$ なので，$0 < x < \pi$ において $g(x) < 0$ である。

よって，$f'(x) = 0$ となるのは，定義域内で $\sin^2 x > 0$ であることもふまえて，$\cos x = 0$，つまり $x = \frac{\pi}{2}$ のときである。

以上より，$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	／
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

となる。極限については

$$\lim_{x \to +0} \frac{x}{\sin x} = 1,\ \lim_{x \to +0} \cos x = 1$$

なので

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 2$$

である。また

$$\lim_{x \to \pi - 0} \frac{x}{\sin x} = \infty,\ \lim_{x \to \pi - 0} \cos x = -1$$

なので

$$\lim_{x \to \pi - 0} f(x) = \infty$$

とわかる。

解説

導関数を $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ でまとめようとする意識があれば，そこから増減がわかりやすい形に変形することも難しくなかっただろう。導関数の正負を考えるときに，定義域で正負が変わらない部分をくくりだし，その部分のみ微分などを行って正負を考える手法は定石である。また，極限については公式を覚えていればすぐに導くことができる。

（松下祐樹，Chen Mark，青木徹）

2018 年度 東京大学 前期 数学

第 2 問　有理数が整数となる条件

出題範囲	数列／整数の性質
難易度	★★★☆☆
所要時間	得意：15 分　　ふつう：20 分　　苦手：25 分
傾向と対策	整数の問題に慣れていれば，すぐに方針の立てられる問題である。(1) は問題文にしたがって計算するだけなので，確実に解答したい。既約分数であることの証明を忘れないようにしよう。(2) について，整数でないことを証明するのには少し工夫が必要であるが，大事な手法なので覚えておこう。

解答

(1) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{{}_{2(n-1)+1}\mathrm{C}_{n-1}} \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \cdot (n-1)! \cdot \frac{(n-1)!n!}{(2n-1)!} \\ &= \frac{(2n+1)\cdot(2n)}{n\cdot(n+1)\cdot n} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n(n+1)} \qquad \cdots\cdots \text{①}\end{aligned}$$

ここで，$2n+1 = n+(n+1)$ であり，さらに n と $n+1$ は互いに素であるから，$2n+1$ と n，および $2n+1$ と $n+1$ は互いに素である。

また，$n(n+1)$ は連続する 2 つの整数の積なので，2 で割り切れる。

以上より，① の分母と分子の共通因子は 2 のみであり

$$p_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$q_n = 2n+1$$

となる。

(2) (1) より $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{q_n}{p_n} \times a_{n-1} \\ &= \frac{q_n}{p_n} \times \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \times a_{n-2} \\ &= \frac{q_n}{p_n} \times \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \times \cdots \times \frac{q_2}{p_2} \times a_1 \\ &= \frac{q_n \times q_{n-1} \times \cdots \times q_2 \times a_1}{p_n \times p_{n-1} \times \cdots \times p_2} \end{aligned}$$

である。ここで，$a_1 = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{1} = 3$，$q_n = 2n+1$ より，分子は奇数である。一方，$p_3 = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ であるから，$n \geqq 3$ のとき，分母は偶数となる。したがって，$n \geqq 3$ のとき，a_n は整数でない。また

- $n = 1$ のとき，$a_1 = 3$
- $n = 2$ のとき，$a_2 = \dfrac{q_2}{p_2} \cdot a_1 = \dfrac{5}{3} \cdot 3 = 5$

である。

以上より，$n \geqq 1$ において，a_n が整数となる n は $n = 1, 2$ である。

解説

(1)

$$ {}_{2n+1}\mathrm{C}_n = \frac{(2n+1)!}{n!\{(2n+1)-n\}!} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} $$

と計算できることは知っておかなければならない。また

$$ \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = (2n+1) \cdot (2n) $$

である。間違えないように注意しよう。

(2) a_n は整数，または整数でない有理数なので，a_n が整数であるかどうかは，分母・分子に含まれる素因数の個数を比較するとよいことがわかる。**解答** では，この観点で問題を解いている。

a_n を分数の形で表すにはさまざまな方法があるが，できるだけ約分した形で表すために，(1) で求めた p_n，q_n を用いるとよい。次に，どの素因数の個数を比較すればいいかを考えよう。分子が奇数である（すなわち，素因数の個数が 0 である）ということに気づけば，分母に素因数 2 が現れるとき，a_n は整数でないことがわかる。

別解

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 &= \frac{2(2n+1)}{n(n+1)} - 1 \\ &= \frac{-n^2+3n+2}{n(n+1)} \\ &= -\frac{\left(n - \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(n - \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)}{n(n+1)}\end{aligned}$$

$4 < \sqrt{17} < 5$ より

$$-\frac{1}{2} < \frac{3-\sqrt{17}}{2} < -1, \quad \frac{7}{2} < \frac{3+\sqrt{17}}{2} < 4$$

なので

$1 \leqq n \leqq 3$ のとき　$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} - 1 > 0$

$4 \leqq n$ のとき　$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} - 1 < 0$

すなわち「$a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > \cdots$」 ……· ② である。

ここで，$n = 1, 2, 3, \cdots$ における a_n の値を順に求めていくと，次の表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n+1}{\frac{1}{2}n(n+1)}$		$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{17}{36}$
a_n	3	5	$\frac{35}{6}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{77}{20}$	$\frac{143}{60}$	$\frac{143}{112}$	$\frac{2431}{4032}$

$n \geqq 8$ のときは，② より

$$(0 <)\ a_n \leqq a_8 = \frac{2431}{4032} < 1$$

であり，a_n は整数でない。

以上より，$n \geqq 1$ において，a_n が整数となる n は $n = 1, 2$ である。

別解解説

(2) まず，n が十分大きいとき，$n!$ が ${}_{2n+1}\mathrm{C}_n$ よりも圧倒的に大きいことに着目しよう。すると，n を大きくしていくと，$0 < \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} < 1$ となり，a_n が整数でなくなるということが予想できる。

したがって，$a_n < 1$ となるような n を求め，そのような n を候補から除外する，という方針で考える。直

接この式を変形して条件を考えるのは大変であるから，(1) で計算した $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を利用して，n に対する a_n の増減を求め，$a_n < 1$ となる n を調べることになる。

（辻啓吾，江崎ゆり子，河合敬宏）

2018 年度 東京大学 前期 数学

第 3 問　点が動く領域の面積

出題範囲	ベクトル／積分／極限
難易度	★★★☆☆
所要時間	得意：20 分　　ふつう：25 分　　苦手：30 分
傾向と対策	ベクトルの終点の存在範囲を考える際に，k の値によって 2 通りの場合分けが生じることに気づきたい。積分は図形的性質を活かして計算しないと面倒になる。極限値の計算は難しくないだろう。

解答

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

となる点 S を取ると，P が C 上を動くとき，S の軌跡は P の軌跡を原点中心に $\dfrac{1}{k}$ 倍拡大したものであり，図 1 のようになる。

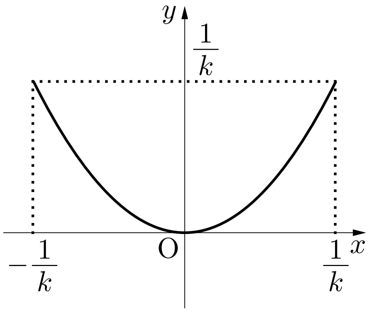


図 1

また，$k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は，Q を線分 OA 上で動かしたとき，x 成分が範囲 $[0, k]$ を動き，y 成分が 0 であるベクトルである。以上より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で定められる点 R の動く範囲は，点 S の軌跡である曲線が x 方向に k だけ平行移動するときに通る領域である。したがって，R の動く領域は，以下の (i)(ii) の 2 通りに分かれる。

(i) $k - \dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{1}{k}$ すなわち　$0 < k \leqq \sqrt{2}$ のとき，図 2 のような領域になる。

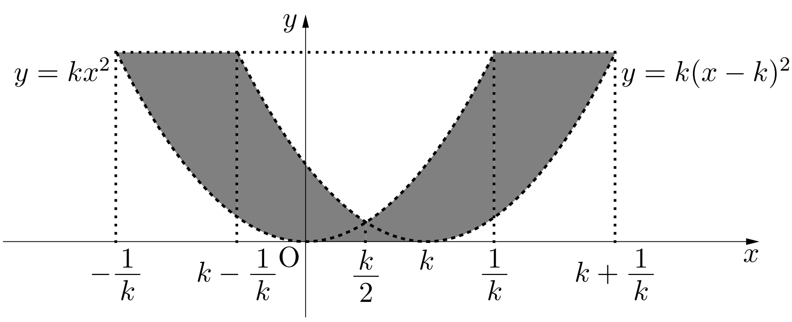


図 2

この面積 $S(k)$ は，対称性により，図 3 のような領域の面積の 2 倍から図 4 のような領域の面積を除いた値になる。

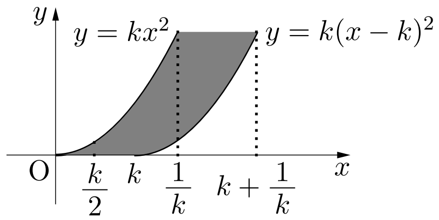


図 3

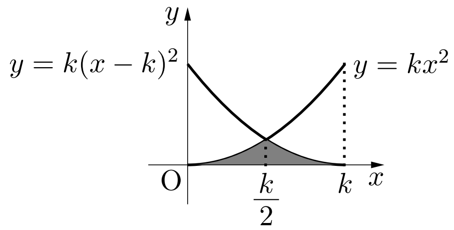


図 4

図 3 の面積は，y 軸方向に積分すれば明らかに $\dfrac{1}{k} \times k = 1$ であるから，

$$S(k) = 2 \cdot 1 - 2\int_0^{\frac{k}{2}} kx^2 dx = 2 - \frac{k^4}{12}$$

である。

（ii）$k - \dfrac{1}{k} \geqq \dfrac{1}{k}$ すなわち $\sqrt{2} \leqq k$ のとき，図 5 のような領域になる。

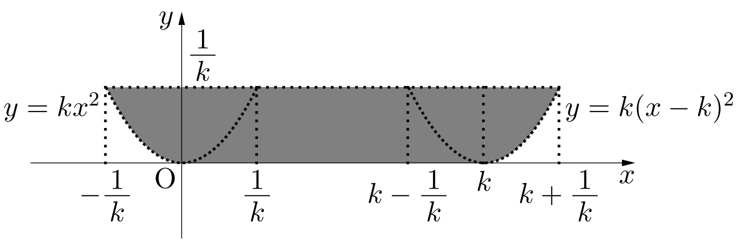


図 5

この面積 $S(k)$ は，対称性に注意して，

$$S(k) = \frac{1}{k} \times k + 2\int_{-\frac{1}{k}}^{0} \left(\frac{1}{k} - kx^2 \right) dx = 1 + \frac{4}{3k^2}$$

である。

以上より

$$S(k) = \begin{cases} 2 - \dfrac{k^4}{12} \ (0 < k \leqq \sqrt{2}) \\ 1 + \dfrac{4}{3k^2} \ (\sqrt{2} \leqq k) \end{cases}$$

である。また

$$\lim_{k \to +0} S(k) = \lim_{k \to +0} \left(2 - \frac{k^4}{12} \right) = 2, \quad \lim_{k \to \infty} S(k) = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{4}{3k^2} \right) = 1$$

である。

解説

ベクトルの足し算によって定められるベクトルの終点の存在範囲を求めるという問題であった。P と Q が独立に動くので，1 つずつ考えていくとよい。求める領域の概形は，$k-\dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{1}{k}$ と $k-\dfrac{1}{k} \geqq \dfrac{1}{k}$ で異なるため，場合分けが必要になる。その後，定積分を求める際は，図形的考察を行ったうえで工夫しないと，計算が面倒になってしまう。極限値を求めるのは簡単だが，有限確定値に収束しているのがポイントである。もし有限確定値に収束しない場合は，答案を見直してみる価値があるだろう。

（小林新九郎，井上輝義，松崎優太）

2018 年度 東京大学 前期 数学

第 4 問　3 次方程式の実数解条件

出題範囲	微分
難易度	★★☆☆☆
所要時間	得意：15 分　　ふつう：20 分　　苦手：25 分
傾向と対策	3 次関数と実数解に関する典型問題である。方程式の解をグラフの共有点の x 座標としてみれば，条件 1 も条件 2 も容易に式で表すことができる。完答したい。

解答

$g(x) = x^3 - 3a^2x - b$ とおくと，与えられた 2 条件は

　条件 1：$y = g(x)$ のグラフは x 軸と異なる 3 つの共有点をもつ

　条件 2：$y = g(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である

とそれぞれ同値である。また

$$g'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x + a)(x - a)$$

となる。

(i) $0 < a \leqq 1$ のとき

$g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$2a^3 - b$	$\searrow$	$-2a^3 - b$	$\nearrow$	$1 - 3a^2 - b$	$\nearrow$

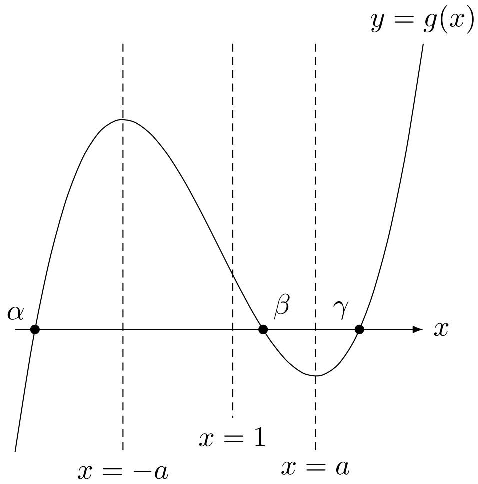
$x \geqq 1$ で $g(x)$ が単調に増加するので，$x > 1$ で x 軸と異なる 2 つの共有点 $(\beta, 0)$ と $(\gamma, 0)$ をもつことはない。したがって，2 条件を満たさない。

(ii) $a > 1$ のとき

$g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$2a^3 - b$	$\searrow$	$1 - 3a^2 - b$	$\searrow$	$-2a^3 - b$	$\nearrow$

2 条件を満たすためには，グラフが右のようになっていればよい。したがって求める条件は



$$\begin{cases} g(1)>0 \\ g(a)<0 \end{cases}$$

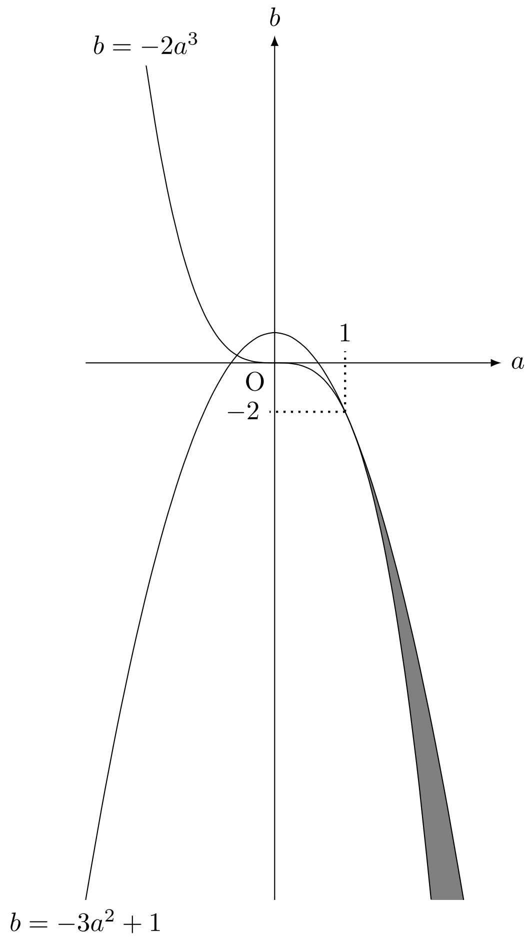
$$\Leftrightarrow\ -2a^3<b<-3a^2+1$$

ここで

$$-2a^3=-3a^2+1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(2a+1)=0$$

(ｉ)(ii) より，求める点 (a,b) の動きうる範囲は次の図の網掛部（境界線を含まない）。



解説

3 次関数 $g(x)$ に対して，$g(x)=0$ の解を $y=g(x)$ と x 軸の共有点の x 座標としてみるのは定石である。$\beta>1$ を満たすために a の値で場合分けが生じることに注意しよう。

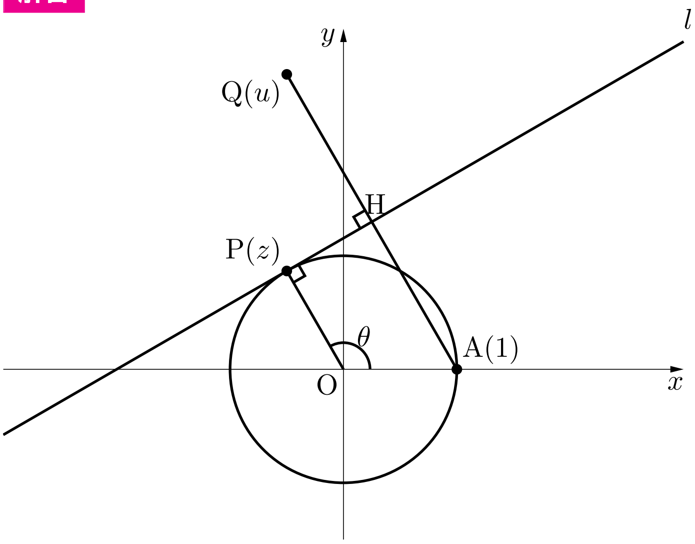
（不死原大知，一丸友美，辻啓吾）

2018 年度 東京大学 前期 数学

第 5 問　複素数と軌跡

出題範囲	複素数平面／図形と方程式
難易度	★★★★☆
所要時間	得意：25 分　　ふつう：30 分　　苦手：35 分
傾向と対策	(1) は図を描いて u が z の整式としてどのように表されるか求めることができれば難しくない。(2) は (1) を使えば軌跡が放物線であることは容易にわかるが，w の範囲を求めるところが面倒である。落ち着いて計算したい。

解答



(1) z は複素数平面上で原点を中心とする半径 1 の円 C 上にあり，$z \fallingdotseq 1$ より，$z = \cos\theta + i\sin\theta\ (0 < \theta < 2\pi)$ とおける。ここで，複素数平面を xy 平面として考える。点 P における C の接線を l とすると l の方程式は

$$(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1 \Leftrightarrow (\cos\theta)x + (\sin\theta)y - 1 = 0$$

となる。ここで，点 A から l に下ろした垂線の足を点 H とおくと，点 Q の定め方より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ なので，実数 t を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= (1 + t\cos\theta, t\sin\theta)\end{aligned}$$

である。点 H は l 上にあるので

$$\cos\theta(1+t\cos\theta)+\sin\theta(t\sin\theta)=1 \quad \text{ゆえに } t=1-\cos\theta$$

である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AH}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(1-\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

となる。これを複素数で表すと

$$u=1+2(1-\cos\theta)z \qquad \cdots\cdots ①$$

となる。ここで，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ より，$\overline{z}=\cos\theta-i\sin\theta$ となるので

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{z+\overline{z}}{2}\\&=\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \quad \left(z\overline{z}=|z|^2=1 \text{ より}, \overline{z}=\frac{1}{z}\text{であるから}\right)\end{aligned}$$

である。したがって，① に代入して，

$$\begin{aligned}u&=1+2\left(1-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)z\\&=-z^2+2z\end{aligned}$$

となる。$z\neq 1$ より，$w=\dfrac{1}{1-u}=\dfrac{1}{(z-1)^2}$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{\overline{w}}{w}&=\frac{(z-1)^2}{(\overline{z}-1)^2}\\&=\frac{(z-1)^2}{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2}\\&=z^2\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|} &= \left|1+\frac{\overline{w}}{w}-\frac{1}{w}\right| \\ &= \left|1+z^2-(z^2-2z+1)\right| \\ &= 2\,|z| \\ &= 2\end{aligned}$$

となる。

(2) $w=X+Yi\,(X$，Y は実数$)$ とおくと，(1) から

$$\begin{aligned}&|w+\overline{w}-1| = 2\,|w| \\ \Leftrightarrow\ & |2X-1| = 2\sqrt{X^2+Y^2} \\ \Leftrightarrow\ & (2X-1)^2 = 4\left(X^2+Y^2\right) \quad \left(|2X-1| \geqq 0 \text{ かつ } 2\sqrt{X^2+Y^2} \geqq 0 \text{ より}\right) \\ \Leftrightarrow\ & X = -Y^2+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

ここで，z の実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下なので，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ であり，$z-1=(\cos\theta-1)+i\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}z-1 &= (\cos\theta-1)+i\sin\theta \\ &= -2\sin^2\frac{\theta}{2}+i\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

となるので

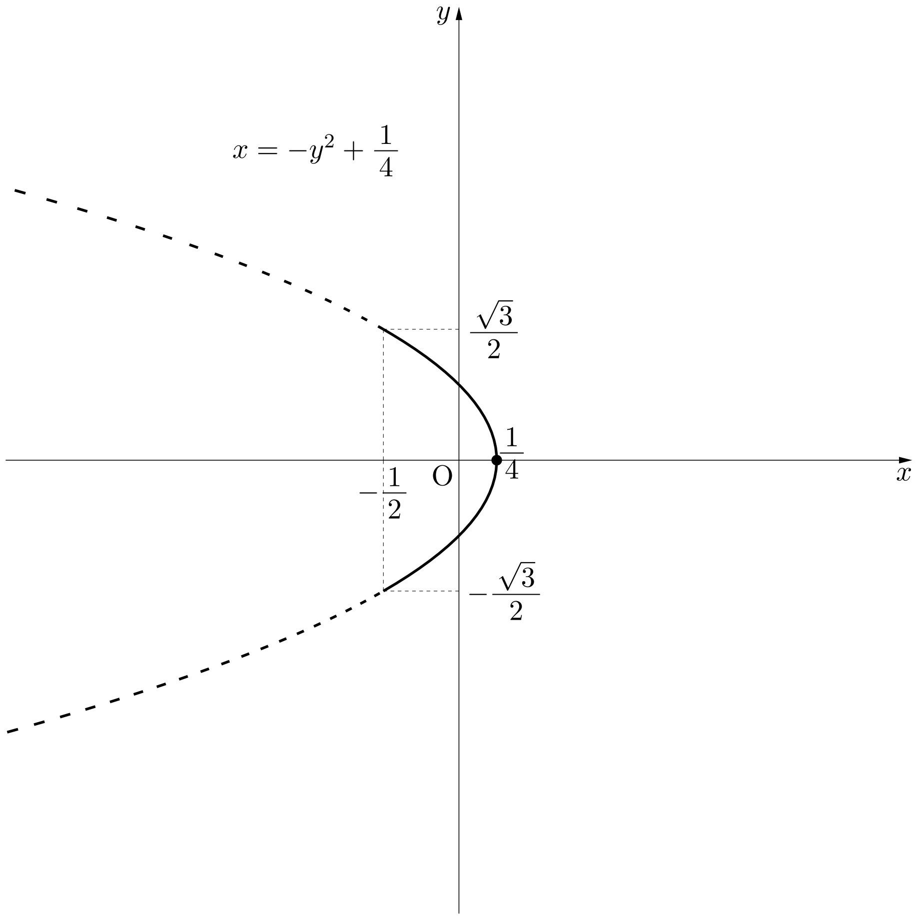
$$\begin{aligned}w &= \frac{1}{(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\left(\cos(-\theta-\pi)+i\sin(-\theta-\pi)\right)\end{aligned}$$

ゆえに

$$Y = \frac{\sin(-\theta-\pi)}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1}{2\tan\dfrac{\theta}{2}}$$

である。$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ より，$\tan\dfrac{\theta}{2} \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ または $\tan\dfrac{\theta}{2} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq Y \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，求める軌跡は xy 平面上で放物線 $x=-y^2+\dfrac{1}{4}$ の $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の部分である。

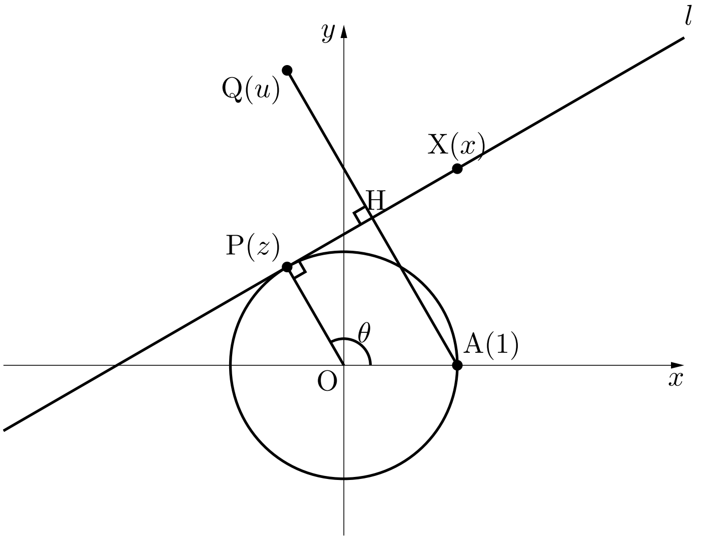


解説

(1) 図を描いてみると，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であることがわかるので，あとは $\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|$ が $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の何倍であるかがわかれば u を z で表すことができる。

(2) (1) の最後で $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ が定数になったので，これを使えば w が放物線上にあることはわかる。**解答** では実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下である条件を極座標形式を用いて変形したが，他の方法は別解で示した。

別解 1



(1) 点 $\mathrm{P}(z)$ における円 C の接線 l 上にある点を $\mathrm{X}(x)$ とおくと，$\dfrac{x-z}{z-0}$ が純虚数になるので，l の方程式は，$|z|=1$ に注意すると

$$\frac{x-z}{z-0}+\overline{\left(\frac{x-z}{z-0}\right)}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \overline{z}x+z\overline{x}-2=0$$

点 $\mathrm{Q}(u)$ は l に関して A と対称にあるので，$\mathrm{AQ}\perp l$ であり，また，l の定義から $l\perp\mathrm{OP}$ で OP と AQ は同一平面上にあるので

$$\mathrm{OP} \parallel \mathrm{AQ}$$

となる。よって，実数 t を用いて $u=tz+1$ とおける。

また，点 $\mathrm{Q}(u)$ は l に関して A と対称なので，$\dfrac{u+1}{2}$ は l 上にある。

よって

$$\overline{z}\left(\frac{u+1}{2}\right)+z\overline{\left(\frac{u+1}{2}\right)}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}\left(\frac{tz+2}{2}\right)+z\left(\frac{t\overline{z}+2}{2}\right)-2=0$$

ゆえに

$$t=2-(z+\overline{z})$$

となるので，u は

$$u = \{2-(z+\overline{z})\}z+1$$
$$= -z^2+2z-|z|^2+1$$
$$= -z^2+2z \quad (|z|=1 \text{ より})$$

以下，**解答** と同じ

(2)

$$\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}=2 \Leftrightarrow \left|\frac{w+\overline{w}}{2}-\frac{1}{2}\right| = |w| \qquad \cdots\cdots\ ①$$

$\dfrac{w+\overline{w}}{2}$ は w の実数部分を表している。よって ① は，xy 平面上で w と原点 O の距離と，w と直線 $x=\dfrac{1}{2}$ の距離が等しいことを表している。[1]

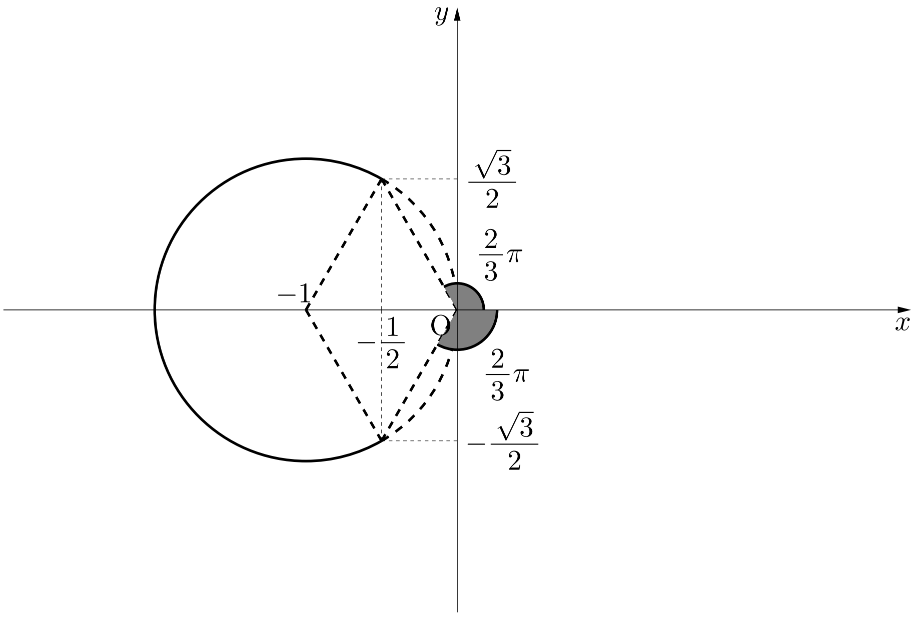
よって，w の軌跡の方程式は

$$\sqrt{x^2+y^2} = \left|x-\frac{1}{2}\right| \quad \text{よって} \quad x = -y^2+\frac{1}{4}$$

次に，w の範囲を調べる。$w=\dfrac{1}{(z-1)^2}$ の両辺の偏角をとると

$$\arg w = -2\arg(z-1)$$

$z-1$ の動く軌跡は以下の実線部になる。

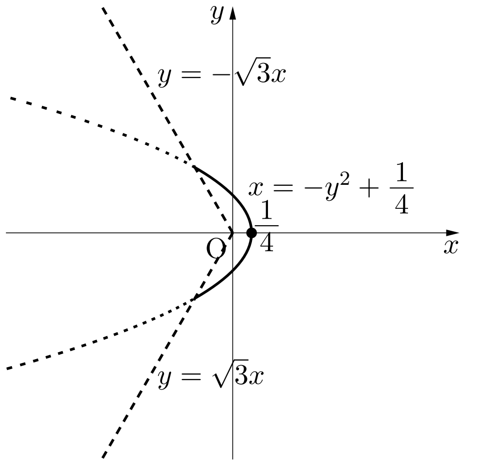


よって，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq \arg(z-1) \leqq \dfrac{4}{3}\pi$ となるので

$$-\frac{8}{3}\pi \leqq \arg w \leqq -\frac{4}{3}\pi \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\pi \leqq \arg w \leqq \frac{2}{3}\pi$$

[1] これは，w は焦点を原点とし，準線を $x=\dfrac{1}{2}$ とする放物線上にあることを意味する。

よって，w の範囲を図示すると以下の実線部になる。

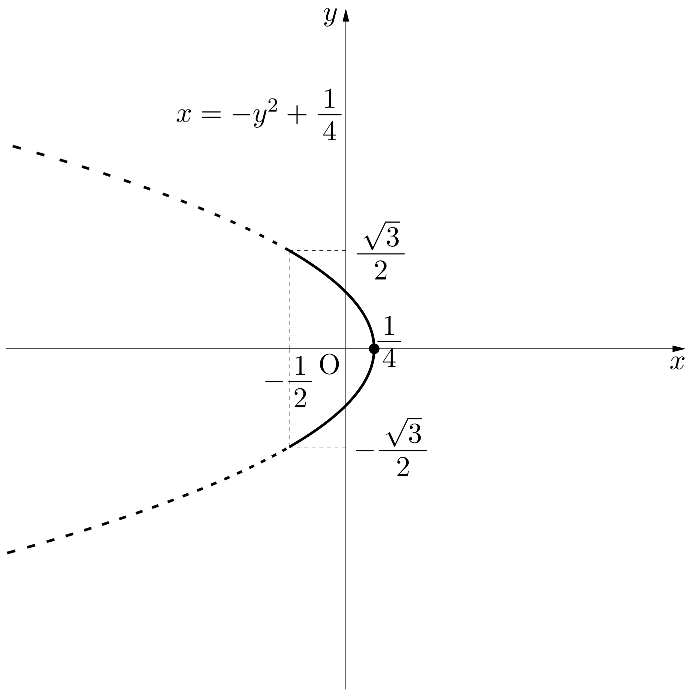


$x=-y^2+\frac{1}{4}$ に $y=-\sqrt{3}x$ を代入すると

$$x=-3x^2+\frac{1}{4}\quad \text{よって}\ x=-\frac{1}{2},\frac{1}{6}$$

$x<0$ となるのは $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。対称性から $x=-y^2+\frac{1}{4}$ と $y=\sqrt{3}x$ の交点のうち，x 座標が負になるのは $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

以上より，求める軌跡は xy 平面上で放物線 $x=-y^2+\frac{1}{4}$ の $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ の部分である。



別解 1 解説

(1) 複素数平面上で接線の方程式を求め，2 点 A，B の中点がその接線上にあることを用いた。定石なのでおさえておこう。

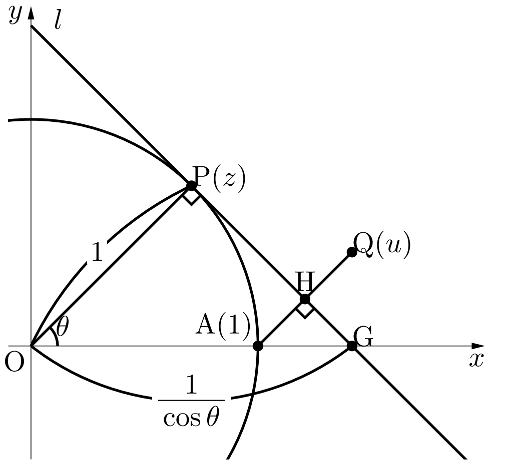
(2) (1) で求めた関係式を変形して図形的に軌跡を求めた。ある複素数 w に対して $\dfrac{w+\overline{w}}{2}$ が w の実数部分を表していることを確認しておこう。

別解 2

(1) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ までは **解答** と同じ

(i) $0<\theta<\dfrac{1}{2}\pi$, $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ のとき

点 P における C の接線を l とし，l と x 軸の交点を点 G とする。



$\triangle$POG $\backsim$ $\triangle$HAG より，

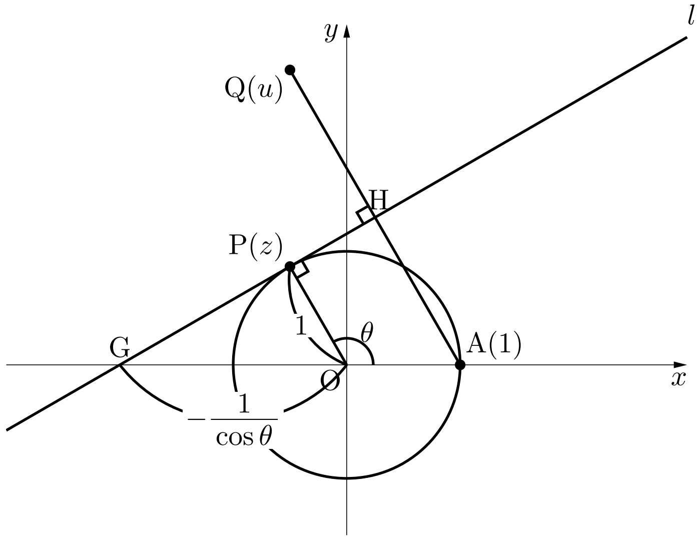
$$\mathrm{PO}:\mathrm{HA}=\mathrm{OG}:\mathrm{AG}\Leftrightarrow 1:\mathrm{HA}=\frac{1}{\cos\theta}:\frac{1}{\cos\theta}-1$$

よって $\mathrm{HA}=1-\cos\theta$ であるから

$$u=1+2(1-\cos\theta)z$$

(ii) $\dfrac{1}{2}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ のとき

点 P における C の接線を l とし，l と x 軸の交点を点 G とする。



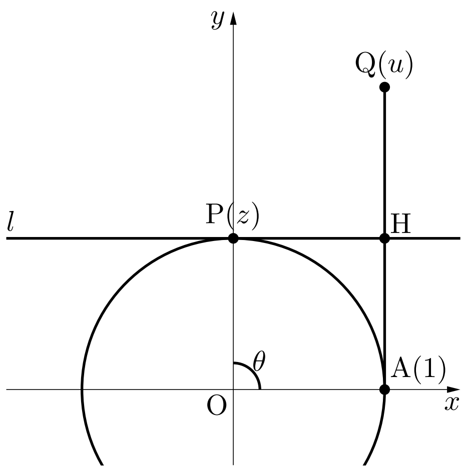
$\triangle$POG $\backsim$ $\triangle$HAG より，

$$\mathrm{PO}:\mathrm{HA}=\mathrm{OG}:\mathrm{AG} \Leftrightarrow 1:\mathrm{HA}=-\frac{1}{\cos\theta}:1-\frac{1}{\cos\theta}$$

よって，$\mathrm{HA}=1-\cos\theta$ であるから

$$u=1+2(1-\cos\theta)z$$

(iii) $\theta=\dfrac{1}{2}\pi$ または $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき



点 P における C の接線を l とすると，$l\ /\!/\ x$ 軸

$\cos\theta=0$ より，$u=1+2z=1+2(1-\cos\theta)z$

以上より，(i)(ii)(iii) のいずれの場合においても $u=1+2(1-\cos\theta)z$ となる。以下，**解答** と同じ。

別解 2 解説

図形的に u を求めた。三角形の相似だけで u を求めることができるが，場合分けが 3 つ必要になってしまうことに注意しよう。

（不死原大知，江崎ゆり子，辻啓吾）

2018 年度 東京大学 前期 数学

第 6 問　球の通過領域

出題範囲	積分 (数学Ⅲ)
難易度	★★★★☆
所要時間	得意：20 分　　ふつう：25 分　　苦手：30 分
傾向と対策	(1)，(2)，(3) は (4) を解くための誘導になっている。立体図形の問題はそのままイメージすることが難しい傾向にあるので，断面図に落とし込んで考える習慣をつけたい。求積自体はあまり難しくないので，V_1，V_2，V_3 の共通部分や包含関係に注意して立体 V の体積を求めたい。

解答

(1) V_1，V_2，V_3 は次で与えられる。

V_1 :$(x-a)^2+y^2+z^2 \leqq r^2$ を $0 \leqq a \leqq 1$ で動かしたもの

V_2 :$(x-1)^2+(y-b)^2+z^2 \leqq r^2$ を $0 \leqq b \leqq 1$ で動かしたもの

V_3 :$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-c)^2 \leqq r^2$ を $0 \leqq c \leqq 1$ で動かしたもの

V_1 と平面 $y=t$ が共有点をもつ条件について考える。V_1 に $y=t$ を代入すると，

$$(x-a)^2+z^2 \leqq r^2-t^2 \quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

となるが，これを満たす点 (x,t,z) が存在することがその条件である。左辺は 0 以上であるから，求める条件は

$$r^2-t^2 \geqq 0$$

よって

$$-r \leqq t \leqq r \qquad \cdots\cdots ①$$

次に，V_3 と平面 $y=t$ が共有点をもつ条件について考える。V_1 に $y=t$ を代入すると，

$$(x-1)^2+(z-c)^2 \leqq r^2-(t-1)^2 \quad (0 \leqq c \leqq 1)$$

となるが，これを満たす点 (x, t, z) が存在することがその条件である。左辺は 0 以上であるから，求める条件は

$$r^2 - (t-1)^2 \geqq 0$$

よって

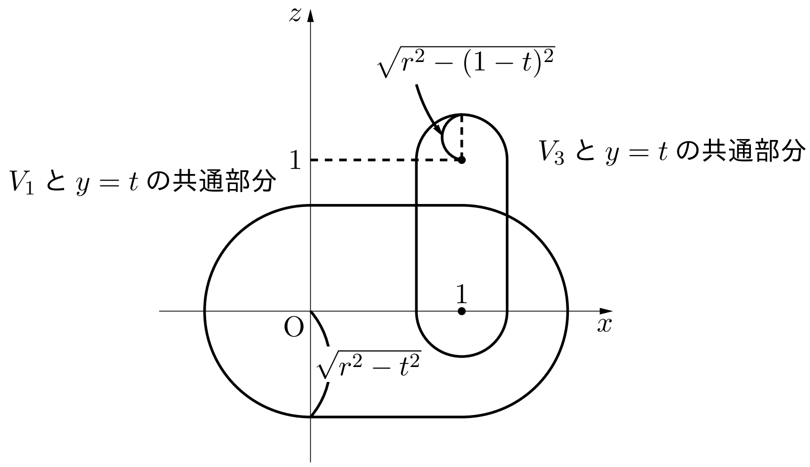
$$1 - r \leqq t \leqq 1 + r \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで，$\dfrac{1}{2} < r < 1$ より，$-r < 1 - r < r < 1 + r$ であることから，① かつ ② より求める条件は

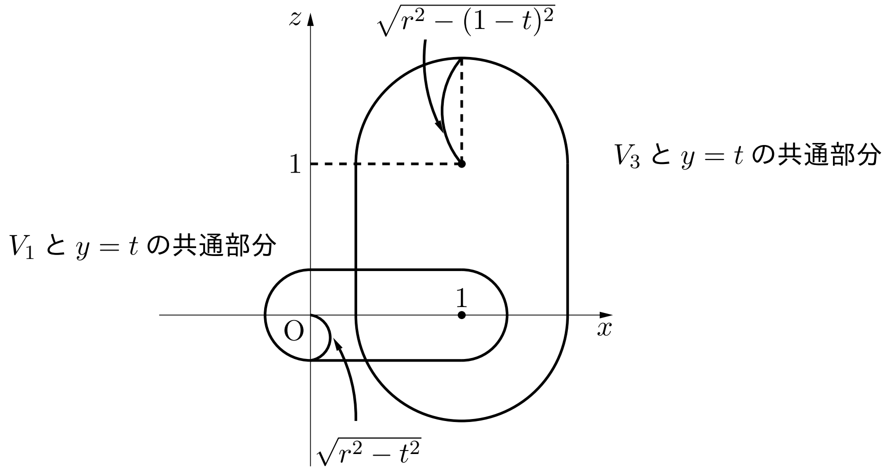
$$1 - r \leqq t \leqq r$$

これら 2 つの共通部分を同一平面上に図示すると，次の 2 つの閉曲線に囲まれた領域である (境界含む)。

$1 - r \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき



$\dfrac{1}{2} < t \leqq r$ のとき



(2) V_1 と V_3，$y=t$ の共通部分が，(1) で求めたすべての t に対して，V_2 と $y=t$ の共通部分に含まれることが求める条件である。

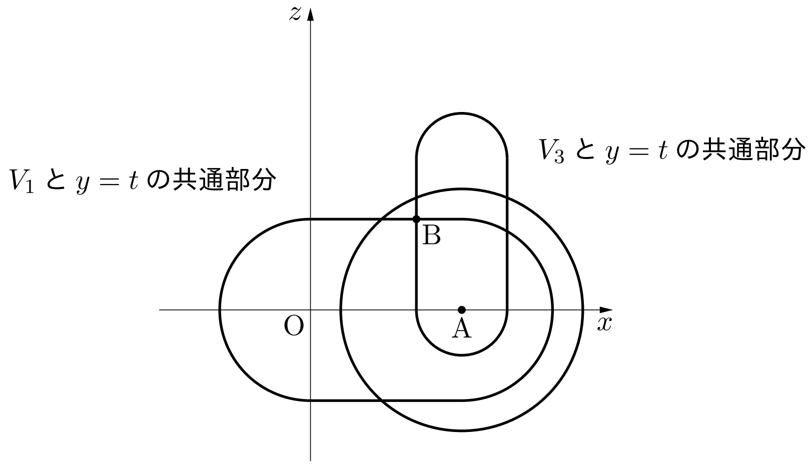
V_2 と $y=t$ の共通部分は，V_2 に $y=t$ を代入して

$$(x-1)^2+z^2 \leqq r^2-(t-b)^2 \quad (0 \leqq b \leqq 1)$$

b を与えられた範囲で動かすと，この図形の通過領域は

$$(x-1)^2+z^2 \leqq r^2$$

である。これを (1) の図に図示すると



のようになる。V_1 と V_3，$y=t$ の共通部分のうち，点 $(1,t,0)$(図の点 A) から最も遠い点は $(1-\sqrt{r^2-(1-t)^2}, t, \sqrt{r^2-t^2})$(図の点 B) であるから，この 2 点の距離が r 以下であることが条件である。よって

$$r^2-(1-t)^2+r^2-t^2 \leqq r^2$$

$$2t^2-2t+1-r^2 \geqq 0$$

$$2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-r^2 \geqq 0$$

が，(1) で求めたすべての t に対して成り立つ。ここで，$1-r \leqq t \leqq r$ だが，$1-r \leqq \frac{1}{2} \leqq r$ であることから，$2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-r^2$ の最小値である $t=\frac{1}{2}$ で成り立つ必要がある。このとき

$$r^2 \leqq \frac{1}{2}$$

よって

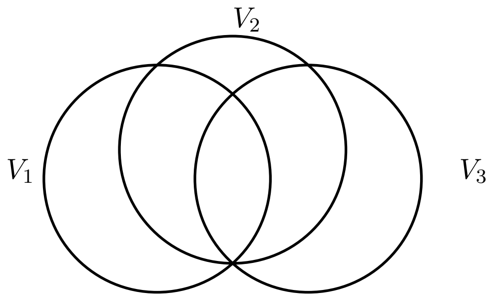
$$r \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

が成り立つ。以上より，求める r の条件は

$$\frac{1}{2} < r \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(3) 以下，領域 X について，その体積を $W(X)$ と表す。

V_1，V_2，V_3 の関係をベン図を用いて表すと次のようになる。



$$\begin{aligned} W(V) =& W(V_1 \cup V_2 \cup V_3) \\ =& W(V_1) + W(V_2) + W(V_3) - W(V_1 \cap V_2) - W(V_2 \cap V_3) - W(V_3 \cap V_1) + W(V_1 \cap V_2 \cap V_3) \\ =& W(V_1) + W(V_2) + W(V_3) - W(V_1 \cap V_2) - W(V_2 \cap V_3) \\ & \left((2) \text{ から } V_3 \cap V_1 \subset V_1 \cap V_2 \cap V_3\right) \end{aligned}$$ [1]

[1] 実際には $V_3 \cap V_1 = V_1 \cap V_2 \cap V_3$ となる。

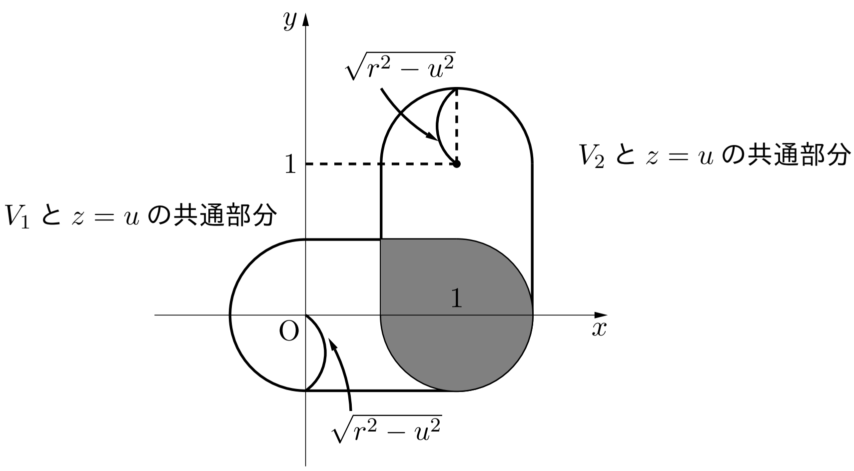
また，V_1，V_2，V_3 は合同，$V_1 \cap V_2$,$V_2 \cap V_3$ は合同である。よって

$$V = 3S - 2T$$

(4) S は，半径 r の半球 2 個と，底面が半径 r の円である高さ 1 の円柱を組み合わせたものの体積であるから

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2$$

$V_1 \cap V_2$ と平面 $z = u(-r \leqq u \leqq r)$ との共通部分は次の網掛部なので，T は網掛け部を u で，$-r \leqq u \leqq r$ の範囲で積分したものである。



これの面積は $\dfrac{3}{4}\pi(r^2-u^2)+(r^2-u^2)=\left(\dfrac{3}{4}\pi+1\right)(r^2-u^2)$ である。

よって，T の体積は

$$\begin{aligned}T&=\int_{-r}^{r}\left(\frac{3}{4}\pi+1\right)(r^2-u^2)\,du\\&=2\left(\frac{3}{4}\pi+1\right)\int_0^r(r^2-u^2)\,du\\&=2\left(\frac{3}{4}\pi+1\right)\left[r^2u-\frac{1}{3}u^3\right]_0^r\\&=2\left(\frac{3}{4}\pi+1\right)\cdot\frac{2}{3}r^3\end{aligned}$$

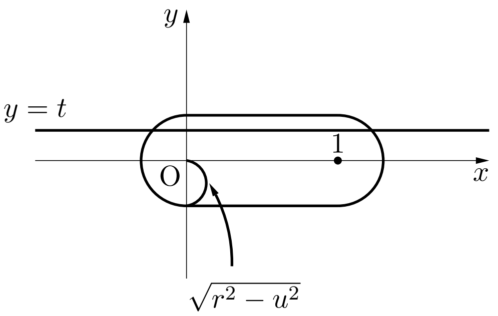
以上より，V の体積は

$$\begin{aligned}3S-2T&=3\cdot\left(\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2\right)-2\cdot 2\left(\frac{3}{4}\pi+1\right)\cdot\frac{2}{3}r^3\\&=2\pi r^3-\frac{8}{3}r^3+3\pi r^2\end{aligned}$$

解説

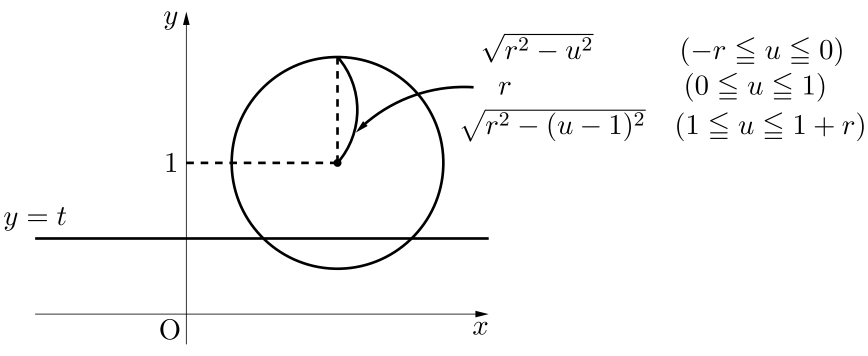
(1) V_1 と V_3 の共通部分を考える問題である。それぞれの図形の概形は半球と円柱を合わせたものであるから，これらと平面 $y=t$ の共通部分の概形を考えるのもそこまで煩雑ではなかっただろう。t の値によって図が変化することに注意したい。最初の t の範囲を求める際の操作を図形的にみると次のようになる。

V_1 と平面 $z=u$ の共通部分は次のようになる。



これがある u において共通部分をもつような t の条件は，($u=0$ のときを考えて)$-r\leqq t\leqq r$ とわかる。

V_3 と平面 $z=u$ の共通部分は次のようになる。



これがある u において共通部分をもつような t の条件は，$(0 \leqq u \leqq 1$ のときを考えて$)1-r \leqq t \leqq 1+r$ とわかる。

(2) 次に，(1) で求めた共通部分が V_2 の内部に入る条件を考える。 V_2 を平面 $y=t$ で切った断面は円もしくは点であるから，$V_1 \cap V_3$ の点で，円の中心から一番遠い点と，円の中心との距離を考えれば十分である。

(3) $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ の体積を S，T で表す問題である。V_1，V_2，V_3 が合同な図形であること，$V_1 \cap V_2$，$V_2 \cap V_3$ が合同な図形であること，$V_1 \cap V_3 \subset V_2$ であることに注意したい。

(4) 上の誘導に従うことで，S と T の値という比較的シンプルな計算をするだけで求まる問題に帰着されている。(3) まで解いたからには，落ち着いて計算して正解したい。

（青木徹，小林新九郎，寺内一記）