2018 年度 東京大学 前期 数学

第 1 問　図形と式

出題範囲	微分／図形と方程式
難易度	★★★★☆
所要時間	得意：25 分　　ふつう：30 分　　苦手：35 分
傾向と対策	(1) は公式を定石通りに運用する力があれば難しくない。(2) は解法を導き出す難易度は高いが，(1) を利用しようという意識があれば手をつけられたかもしれない。この設問に時間をかけすぎないことも重要だっただろう。

解答

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ とおく。C 上の点 $\mathrm{T}(t, f(t))$ における接線の方程式は，

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

$$= (2t - 3)(x - t) + t^2 - 3t + 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

これが原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ を通るので，① に $(x, y) = (0, 0)$ を代入して，

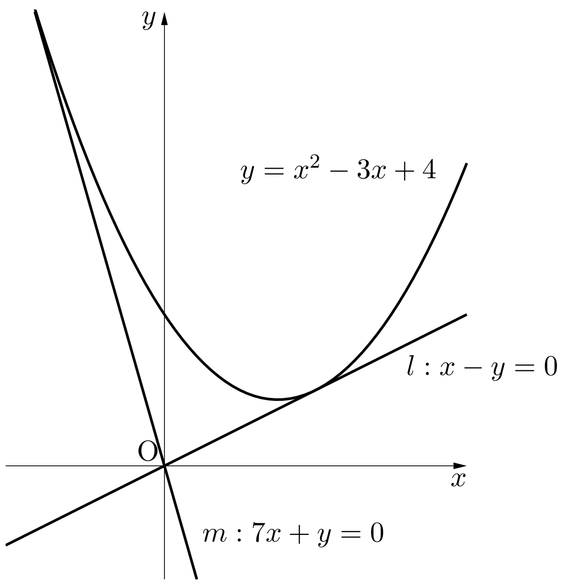
$$0 = (2t - 3)(-t) + t^2 - 3t + 4$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -2,\ 2$$

よって，l，m の方程式は，$t = -2$，2 を接線の方程式 ① に代入して，

$$x - y = 0\ (l \text{ とする}),\ 7x + y = 0\ (m \text{ とする}) \qquad \cdots\cdots ②$$



これより，点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ とおくと，点と直線の距離の公式より L，M は，

$$L = \frac{|a - f(a)|}{\sqrt{2}} = \frac{|(a-2)^2|}{\sqrt{2}}$$

$$M = \frac{|7a + f(a)|}{\sqrt{50}} = \frac{|(a+2)^2|}{\sqrt{50}}$$

よって，

$$\begin{aligned}\sqrt{L} + \sqrt{M} &= \frac{|a-2|}{2^{\frac{1}{4}}} + \frac{|a+2|}{50^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{50^{\frac{1}{4}}}\left(|a+2| + \sqrt{5}|a-2|\right)\end{aligned}$$

(i) $a \leqq -2$ のとき

$$\begin{aligned}\sqrt{L} + \sqrt{M} &= \frac{1}{50^{\frac{1}{4}}}\left\{-a - 2 + \sqrt{5}(2-a)\right\} \\ &= \frac{1}{50^{\frac{1}{4}}}\left\{(-1-\sqrt{5})a + 2\sqrt{5} - 2\right\}\end{aligned}$$

よって，これが最小となるのは $a = -2$ のときで，値は $\dfrac{4\sqrt{5}}{50^{\frac{1}{4}}}$

(ii) $-2 \leqq a \leqq 2$ のとき

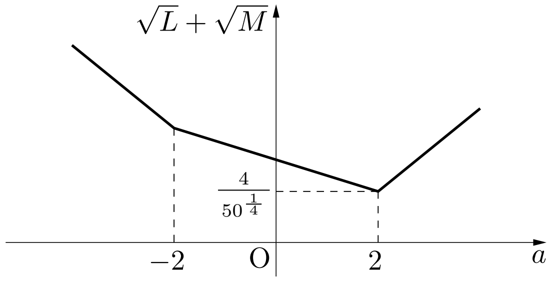
$$\begin{aligned}\sqrt{L} + \sqrt{M} &= \frac{1}{50^{\frac{1}{4}}}\left\{a + 2 + \sqrt{5}(2-a)\right\} \\ &= \frac{1}{50^{\frac{1}{4}}}\left\{(1-\sqrt{5})a + 2 + 2\sqrt{5}\right\}\end{aligned}$$

よって，これが最小となるのは $a = 2$ のときで，値は $\dfrac{4}{50^{\frac{1}{4}}}$

(iii) $2 \leqq a$ のとき

$$\sqrt{L}+\sqrt{M} = \frac{1}{50^{\frac{1}{4}}}\left\{a+2+\sqrt{5}(a-2)\right\}$$
$$= \frac{1}{50^{\frac{1}{4}}}\left\{(\sqrt{5}+1)a+2-2\sqrt{5}\right\}$$

よって，これが最小となるのは $a=2$ のときで，値は $\dfrac{4}{50^{\frac{1}{4}}}$



以上より，$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ が最小となるのは $a=2$ のときで，そのときの点 A の座標は

$$(x, y) = (2, f(2)) = (2, 2)$$

(2) 領域 D のすべての点 (x, y) に対し $px+qy \leqq 0$ $\cdots\cdots$ $(*)$ が成り立つか調べる。

(i) $0 < q$ のとき

領域 D に含まれる $(x, y) = (0, 4)$ に対して $(*)$ が成り立たず不適。

(ii) $q = 0$ のとき

$(*) \Leftrightarrow px \leqq 0$ となるが，領域 D で x は全実数を動くので，$p=0$ のみ適する。

(iii) $q < 0$ のとき

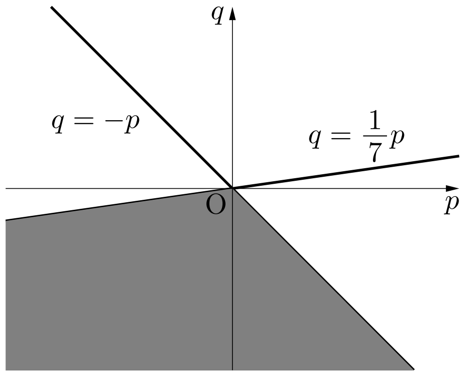
$$(*) \Leftrightarrow y \geqq -\frac{p}{q}x$$

領域 D が $y = -\dfrac{p}{q}x$ の上側に存在することが，$(*)$ が成り立つための必要十分条件なので

② より

$$-7 \leqq -\frac{p}{q} \leqq 1$$
$$\Leftrightarrow 7q \leqq p \leqq -q \quad (-q > 0 \text{ より})$$
$$\Leftrightarrow q \leqq \frac{1}{7}p,\ q \leqq -p$$

以上より，求める範囲は次の図のようになる。（境界はすべて含む。）



解説

(1) 微分して接線を求め，点と直線の公式を使えばよいが，絶対値の場合分けに注意しよう。基本的な手法なので，おさえておきたい。

(2) $px+py \leqq 0\,(q \fallingdotseq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqq -\dfrac{p}{q}x\,(q<0) \\ y \leqq -\dfrac{p}{q}x\,(q>0) \end{cases}$ と変形し，直線 $y=-\dfrac{p}{q}x$ と領域 D の位置関係の問題として考える。q の正負によって変形後の不等号の向きが変わるため，q の正負で場合分けをする必要がある。また，q で式全体を割るため，$q=0$ の場合も分けて考える必要がある。**別解**では，ベクトルの考え方を用いる方法を示した。

別解

(2) 原点を O，点 (x,y) を点 X と名づけると，$px+qy$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の内積と考えることができる。

よって，その内積が 0 以下となる点，つまり $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の角度が 90 度以上となるような点 P を求めればよい。

ここで，直線 OX が l, m であるときをそれぞれ考える。

(i) l のとき

原点を通り l と直交する直線の方程式は ② より

$$y=-x$$

よって，題意を満たす領域はこの直線より下の領域

(ii) m のとき

原点を通り m と直交する直線の方程式は ② より

$$y=\frac{1}{7}x$$

よって，題意を満たす領域はこの直線より下の領域

点 X が領域 D の中を動くとき，OX は l と m の間を動く。よって，答えとなる領域は (i) の領域と (ii) の領域が重なる部分となる。以上より，求める領域は図のようになる。（図は **解答** と同じ）

別解解説

$px+qy$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(p,q)$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(x,y)$ の内積とみれば少ない計算量で解くことができる。$px+qy$ の形をみて，このように内積を用いることを思いつけば，**解答** のような q での場合分けをすることなく楽に解くことができる。

（Chen Mark，釈迦戸雅史，松崎優太）

2018 年度 東京大学 前期 数学

第 2 問　二項係数

出題範囲	整数／数列
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	二項係数が題材となる問題は，過去に何度か東大で出題されている。(2) までの誘導を使えば，(3) において n の条件を絞り込むことができる。

解答

(1)

$$a_7 = \frac{{}_{14}\mathrm{C}_7}{7!} = \frac{143}{210} < 1$$

(2) $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{7!} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^3}$ より

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(2n)!}{(n!)^3} \cdot \frac{\{(n-1)!\}^3}{\{2(n-1)\}!}\\ &= \frac{2n(2n-1)}{n^3}\\ &= \frac{2(2n-1)}{n^2}\end{aligned}$$

よって，条件を満たす n の範囲は

$$\frac{2(2n-1)}{n^2} < 1$$

$$2(2n-1) < n^2$$

$$(n-2)^2 > 2$$

n は 1 以上の整数なので，$n \geqq 4$ である。

(3) $a_n > 0$ であるため，(2) より $n \geqq 4$ では $a_n < a_{n-1}$ である。また，(1) より $a_7 < 1$ であるので，

$$1 > a_7 > a_8 > a_9 > \cdots$$

となる。よって，$a_n \ (n \geqq 7)$ は整数にならない。

つまり，a_n が整数となりうるのは，$1 \leqq n \leqq 6$ の範囲に限られる。それぞれ値を代入して調べると，

$$a_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_1}{1!} = 2$$

$$a_2 = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!} = 3$$

$$a_3 = \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{3!} = \frac{10}{3}$$

$$a_4 = \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{4!} = \frac{35}{12}$$

$$a_5 = \frac{{}_{10}\mathrm{C}_5}{5!} = \frac{21}{10}$$

$$a_6 = \frac{{}_{12}\mathrm{C}_6}{6!} = \frac{77}{60}$$

以上より，a_n が整数となるのは，$n = 1,\ 2$ のときである。

解説

(1) n に 7 を代入して計算するだけである。

(2) まず，組合せの式を n からなる式に変形することを考えよう。変形して不等式を整理したあとは，n が自然数であることを考えれば，答えは出るはずである。

(3) a_n が整数となる n を直接求めるのは不可能である。ここで，これまでの小問を利用することを考える。(1) と (2) の結果をみれば，n が 7 以上の時に a_n が 1 より小さくなることがわかる。このことを (3) で使うことを考えて，このことが n が 7 以上の時に a_n が整数になりえないことを意味するということに気づきたい。

（河合敬宏，釈迦戸雅史，青木徹）

2018 年度 東京大学 前期 数学

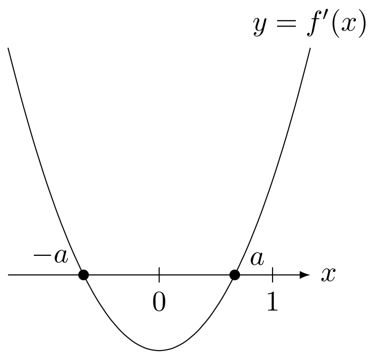
第 3 問　3 次方程式と実数解

出題範囲	微分
難易度	★★☆☆☆
所要時間	得意：15 分　　ふつう：20 分　　苦手：25 分
傾向と対策	3 次関数と実数解に関する典型問題である。(1) では，単調増加を導関数が常に正であることに言い換えればよい。(2) では，方程式の解をグラフの共有点の x 座標とみれば，条件 1 も条件 2 も容易に式で表すことができる。完答したい。

解答

(1) $x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加することは，$x \geqq 1$ のとき常に $f'(x) \geqq 0$ と同値である。$f(x) = x^3 - 3a^2x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2$$
$$= 3(x+a)(x-a)$$



$a > 0$ より $f'(x)$ のグラフは右のようになるので，$x \geqq 1$ のとき $f'(x) \geqq 0$ となる a の条件は

$$0 < a \leqq 1$$

(2) $g(x) = x^3 - 3a^2x - b$ とおくと，2 条件は

条件 1：$y = g(x)$ のグラフは x 軸と異なる 3 つの共有点をもつ

条件 2：$y = g(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると，$\beta > 1$ である

と同値である。また

$$g'(x) = f'(x) = 3(x+a)(x-a)$$

となる。

(i) $a \leqq 1$ のとき

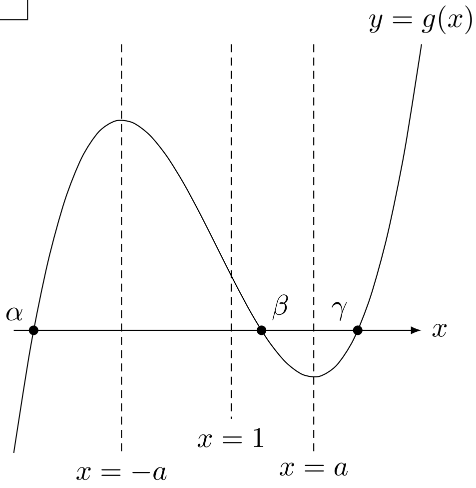
$g'(x) = f'(x)$ と (1) より，$x \geqq 1$ で $g(x)$ が単調に増加するので，$x > 1$ で $y = g(x)$ が x 軸と異なる 2 つの共有点 $(\beta, 0)$ と $(\gamma, 0)$ をもつことはない。したがって条件を満たさない。

(ii) $a > 1$ のとき

$g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$2a^3-b$	$\searrow$	$1-3a^2-b$	$\searrow$	$-2a^3-b$	$\nearrow$

2 条件を満たすためには，グラフが右のようになっていればよい。したがって，求める条件は



$$\begin{cases} g(1) > 0 \\ g(a) < 0 \end{cases}$$

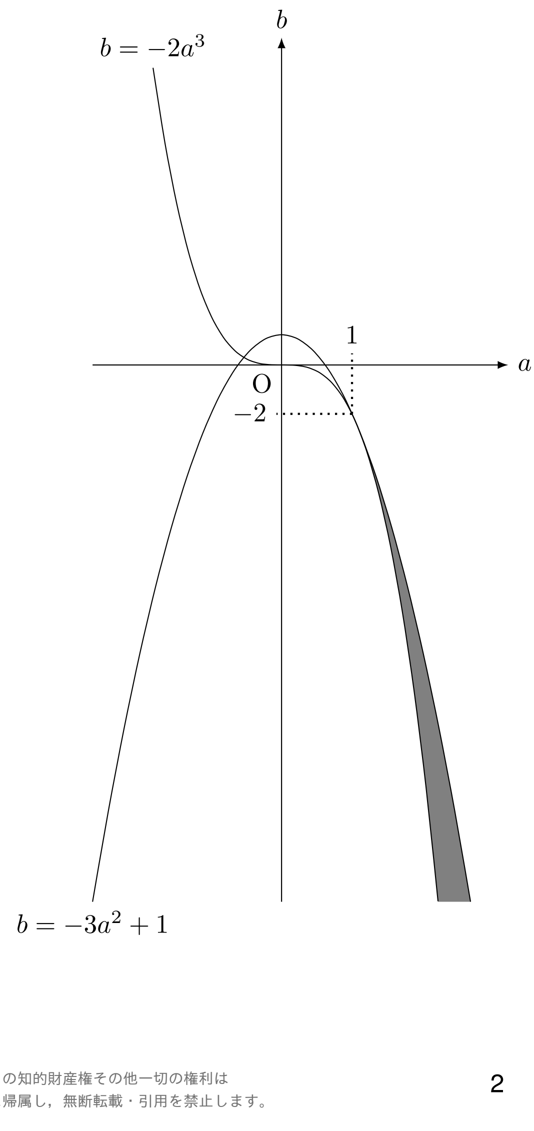
$$\Leftrightarrow\ -2a^3 < b < -3a^2+1$$

ここで

$$-2a^3 = -3a^2+1$$

$$\Leftrightarrow\ (a-1)^2(2a+1) = 0$$

(i)(ii) より，求める点 (a, b) の動きうる範囲は次の図の網掛部（ただし境界線を含まない）。



解説

(1) $f'(x)$ が $x \geqq 1$ で常に 0 以上であるための a の条件を求めればよい。解答ではグラフを使ったが，式で書くと，$f'(x) = 3(x^2 - a^2)$ の $x \geqq 1$ における最小値は $1 - a^2$ なので，これが 0 以上なる条件を求めればよく，それは $0 < a \leqq 1$ となる。

(2) 3 次関数 $g(x)$ に対して，$g(x) = 0$ の解を $y = g(x)$ と x 軸の共有点としてみるのは定石である。$\beta > 1$ を満たすために a の値で場合分けが生じるが，ここで (1) を使うことがわかる。誘導に乗る練習も必要である。

（一丸友美，江崎ゆり子，不死原大知）

2018 年度 東京大学 前期 数学

第 4 問　ベクトルの終点の軌跡

出題範囲	ベクトル／図形と方程式
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	ベクトルを幾何的にみることができれば, 求める領域は簡単に求めることができる。文字を置いて，無理やり解こうとすると計算が煩雑になるので注意しよう。

解答

(1) 点 P の座標を $(p, p^2)\ (-1 \leqq p \leqq 1)$ とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2p, 2p^2)$$

点 Q の座標を (x, y) とおけば

$$\begin{cases} x = 2p \\ y = 2p^2 \\ -1 \leqq p \leqq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 \\ -2 \leqq x \leqq 2 \\ p = \dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

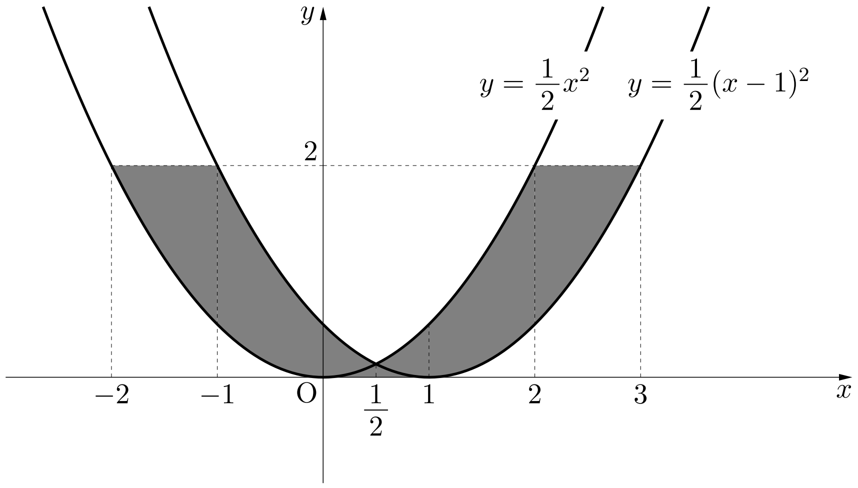
よって，点 Q の軌跡は放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ であり，x の範囲は $-2 \leqq x \leqq 2$ である。

(2) 点 S について，(1) より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(x, \dfrac{1}{2}x^2\right)\ (-2 \leqq x \leqq 2)$ とおけるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \left(x, \frac{1}{2}x^2\right) + (r, 0) \quad (-2 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq r \leqq 1)$$

x と r の値は独立に動くので，これは，点 S の動く領域は，放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2\ (-2 \leqq x \leqq 2)$ を x 軸方向に $+1$ 平行移動させたときに通過する領域であることを表す。

よって，点 S の動く領域は次の図の網掛部である。



この領域は $x = \frac{1}{2}$ について対称なので，求める面積を T とおけば

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}T &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2}x^2dx + \int_{1}^{2} \left\{ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right\} dx + \int_{2}^{3} \left\{ 2 - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right\} dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2}x^2dx + \int_{1}^{3} \left\{ -\frac{1}{2}(x-1)^2 \right\} dx + \int_{2}^{3} 2dx \\
&= \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^{2} + \left[-\frac{1}{6}(x-1)^3 \right]_{1}^{3} + [2x]_2^3 \\
&= \frac{1}{6}\left(8 - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{6}(8-0) + 2(3-2) \\
&= \frac{95}{48}
\end{aligned}$$

したがって，求める面積は $\frac{95}{24}$ である。

解説

(1) 点 P の座標を文字でおけば，点 Q の座標は与式から簡単に求まるので，軌跡もそこから求めることができる。与えられた変換によって，x の範囲も変わることに注意したい。

(2) $2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の終点の軌跡は (1) ですでに求められているので，あとは $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を考えればよい。点 P と点 R がそれぞれ独立に動くことに注意すれば，$+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が x 軸方向の平行移動を表すことが分かる。その後の積分計算では，対称性を利用すれば計算量を少し減らすことができる。

（江崎ゆり子，不死原大知，辻啓吾）