2017 年度 東京大学 前期 物理

第 1 問　摩擦力と積木の関係

出題範囲	単振動・摩擦力
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	第 1 問は力学の問題であるが，Ⅰ，Ⅱは単振動の問題，Ⅲは静止摩擦力の問題というように 2 つの題材が独立して出題されている。単振動，特にばねの運動でない特殊な単振動についての出題は東大によくみられる一方，静止摩擦力についての出題は珍しいものであった。 Ⅰは単純なばねの単振動の問題であり，ミスなく素早く解きたい。ⅠはⅡの誘導という位置づけである。 Ⅱは運動方程式がⅠの運動方程式と同じ形であることに気づくことができれば，Ⅰの単振動と同様に処理して解くことができる。ただし，運動方程式を立てるときに積木 1 と積木 2 の両方について考えることを忘れないように注意したい。 Ⅲは引っ張る力が静止摩擦力に等しくなる瞬間を考えるだけであるが，積木にはたらく力が見た目以上に複雑であり慎重に解く必要がある。特に(2)は，感覚で積木の動き方を考えず，すべての動き方について静止摩擦力を越える瞬間を式で比較しなければ，間違えてしまうかもしれない。 Ⅰ，Ⅱは東大を受験するレベルならば解いてほしい問題である。Ⅲは，(1)はやさしいが(2)については慎重な考察が必要であり，入試本番の緊張感で正答するのは難しかったかもしれない。

解説

Ⅰ

(1)

求める最大の伸びを A とすると，ばねが自然長のときとばねの伸びが最大のときについて，エネルギー保存則より，

$$MgA = \frac{1}{2}kA^2$$

$A \neq 0$ なので，

$$A = \boldsymbol{\frac{2Mg}{k}}$$

（別解）

積木にかかる力がつり合うときの自然長からの伸びを A_0 とする。このときの力のつり合いの式は，

$$kA_0 = Mg$$

$$\therefore \quad A_0 = \frac{Mg}{k}$$

力がつり合う点が振動中心となるので，求める最大の伸びは，

$$A_0 \cdot 2 = \frac{2Mg}{k}$$

◆ **Column**

単振動の振動中心

単振動では力がつり合う点が振動中心になることを確認しておく。

質量 m の物体の加速度を α，座標を x，ばね定数を k，その他の物体にはたらく力をまとめて f とおくと，運動方程式

$$m\alpha = -kx + f$$

$$\therefore \quad \alpha = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{f}{k}\right)$$

振幅を B，角振動数を ω，時刻 $t = 0$ における初期位相を φ とおくと，この単振動は

$$x - \frac{f}{k} = B\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\therefore \quad x = B\sin(\omega t + \varphi) + \frac{f}{k}$$

これより，$\alpha = 0$ のとき，つまり $\sin(\omega t + \varphi) = 0$ のとき，$x = \dfrac{f}{k}$ であることがわかる。つまり，振動中心はつり合い点である。

(2)

積木について，運動方程式を立てると，

$$Ma = -kx + Mg$$

$$\therefore \quad a = -\frac{k}{M}\left(x - \frac{Mg}{k}\right)$$

よって，ア：$\boldsymbol{-\dfrac{k}{M}}$，イ：$\boldsymbol{\dfrac{Mg}{k}}$。

((1)，(2)の別解)

(1)で最初に運動方程式を立ててもよい。

(1)

図 1–2 のように x 軸をとる。積木の加速度を a とすると，積木の運動方程式は

$$Ma = -kx + Mg$$

$$\therefore \quad a = -\frac{k}{M}\left(x - \frac{Mg}{k}\right) \qquad \cdots\cdots(※)$$

ゆえに，振動中心が $x = \dfrac{Mg}{k}$ で，初めに積木を $x = 0$ から静かに放すから，求める最大の伸び A は，

$$A = \frac{Mg}{k} \cdot 2 = \frac{2Mg}{k}$$

(別解)

(※)より，初期条件の時刻 $t = 0$ で $x = 0$ なので，角振動数を $\omega_1 \left(= \sqrt{\dfrac{k}{M}}\right)$ とおくと，

$$x = \frac{Mg}{k}(1 - \cos\omega_1 t)$$

であるから，

$$A = 2 \cdot \frac{Mg}{k} = \frac{2Mg}{k}$$

である。

(2)

(※)より，ア：$-\dfrac{k}{M}$，イ：$\dfrac{Mg}{k}$。

（注）

物理の問題としては，出題の順に解くのは不自然である（「(1)，(2)の別解」のように(2)→(1)の順番で解くほうが自然だろう）。この設問 I では，設問 II を同様に解かせるための誘導としてこのような設問配置になったと考えられる。なお，このような誘導は 2017 年度第 2 問や 2015 年度第 2 問にもみられる。

II

(1)

ひもの張力の大きさを T とする。積木 1 の右端が位置 x であるときの運動方程式は，

$$\begin{cases} \text{積木 } 1 : Ma = T - \dfrac{x}{3L}\mu' Mg & \cdots\cdots ① \\ \text{積木 } 2 : Ma = Mg\sin\theta - T & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

辺々足すと，

$$2Ma = -\frac{x}{3L}\mu' Mg + Mg\sin\theta$$

$$\therefore \quad a = -\frac{\mu' g}{6L}\left(x - \frac{3L}{\mu'}\sin\theta\right) \qquad \cdots\cdots ③$$

よって，ウ：$\boldsymbol{-\dfrac{\mu' g}{6L}}$，エ：$\boldsymbol{\dfrac{3L}{\mu'}\sin\theta}$。

（別解）

初めから，積木 1 と積木 2 の両方からなる系についての運動方程式として

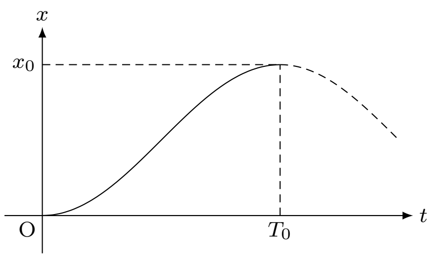
$$2Ma = -\frac{x}{3L}\mu' Mg + Mg\sin\theta$$

を立ててもよい。

(2)

③より，この単振動の角振動数を ω_2 とおくと，$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{\mu' g}{6L}}$ である。

求める時間を T_0 とする。③より，積木 1 は $0 \leqq t \leqq T_0$ で右図のように単振動をし，T_0 は単振動の周期の半分なので，



$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad T_0 = \boldsymbol{\pi\sqrt{\frac{6L}{\mu' g}}}$$

(3)

(2)の図より，単振動の振動中心は $x = \dfrac{1}{2}x_0$ なので，

$$\frac{1}{2}x_0 = \frac{3L}{\mu'}\sin\theta$$

$$\therefore \quad x_0 = \frac{6L}{\mu'}\sin\theta$$

いま，$x_0 = 3L$ ゆえ，

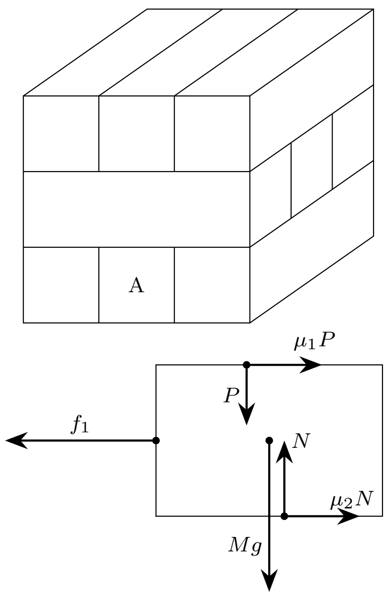
$$3L = \frac{6L}{\mu'}\sin\theta$$

$L \fallingdotseq 0$ なので，

$$\boldsymbol{\mu' = 2\sin\theta}$$

Ⅲ

(1)



下の段の真ん中の積木を A とする。A だけが動き始める瞬間において，2 段目と上の段合わせて 6 個の積木による重力が，下の段の 3 個の積木に均等に加わっていることに注意する。A について図のように力の大きさをおくと，$P = Mg \cdot 6 \cdot \dfrac{1}{3} = 2Mg$ である。A での力のつり合いは，

$$\begin{cases} \text{鉛直方向}: N = P + Mg \\ \text{水平方向}: f_1 = \mu_1 P + \mu_2 N \end{cases}$$

以上より，

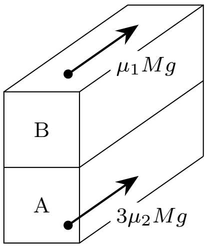
$$N = 2Mg + Mg = 3Mg$$

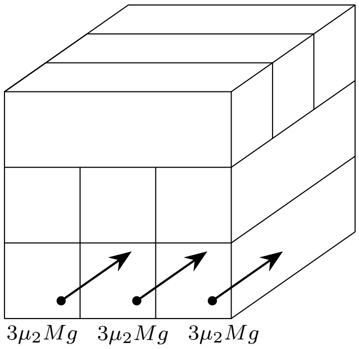
であり，いま $\mu_2 = \mu_1$ なので，

$$\boldsymbol{f_1 = 5\mu_1 Mg}$$

(2)

下の段の真ん中の積木を A，2 段目の真ん中の積木を B とする。各段の積木 1 つひとつについて(1)と同様に考えると，その下の面から加わる垂直抗力の大きさは，下の段では $3Mg$，上の段では Mg である。よって，床と下の段の積木 1 個との間の最大静止摩擦力の大きさは $3\mu_2 Mg$，2 段目と上の段の積木 1 個との間の最大静止摩擦力の大きさは $\mu_1 Mg$ である。





以上をまとめると，

- 9 個すべての積木が同時に動くのに必要な力 $\cdots$ $3\mu_2 Mg \cdot 3$
- A と B のみが同時に動くのに必要な力 $\cdots$ $\mu_1 Mg + 3\mu_2 Mg$

となる。

9 個すべての積木が同時に動き始めるよりも前に A と B のみが同時に動き始める条件を考えればよいので，

$$\mu_1 Mg + 3\mu_2 Mg < 3\mu_2 Mg \cdot 3$$

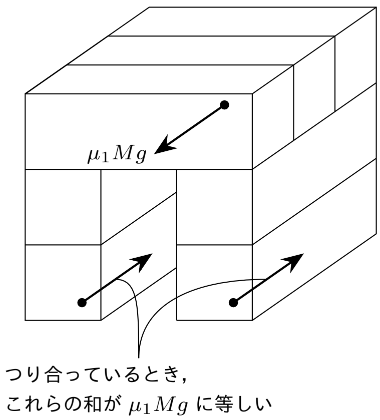
$$\therefore \quad \mu_2 > \frac{1}{6}\mu_1$$

よって，オ：$\boldsymbol{\frac{1}{6}}$。

(別解)

A と B を除いた 7 個の積木からなる系 S を考える。

A と B が動き始める直前に B と上の段との間にはたらく静止摩擦力の大きさは $\mu_1 Mg$ であるから，系 S の力のつり合いを考えると，その瞬間に系 S が床から受ける静止摩擦力の大きさも $\mu_1 Mg$ である。さらに，系 S が床から受ける垂直抗力の大きさは $6Mg$ であるから，A と B が動き出すときにほかの 7 個の積木が動き出さ



ない条件は，最大静止摩擦力の関係を考えると，

$$6\mu_2 Mg > \mu_1 Mg$$

$$\therefore \quad \mu_2 > \frac{1}{6}\mu_1$$

よって，オ：$\frac{1}{6}$。

◆ Column

積木の動き方

この問題のポイントは，「A と B のみが同時に動く」という条件をどう言い換えるか，というところにある。解答ではこれを，「9 個すべての積木が同時に動き始めるよりも前に A と B のみが同時に動き始める」と言い換えたが，本当に条件はこれで合っているのだろうか，ほかの条件で動きはしないのだろうかという疑問をもつ人もいるだろう。以下で，どのようにしてこの条件に思い至るのかを説明する。

まずは想像される動き方を挙げてみる。なお，A と床が滑るのに加え，どことどこが滑るのかを括弧内に書いておいた。

① A のみが動く（A と B との間で滑る）
② A と B のみが動く（B と上の段との間で滑る）
③ A と B と上の段が T 字形になって動く（上の段と 2 段目両脇との間で滑る）
④ 9 個全体が動く（下の段と床との間で滑る）

ほかにも下の段の両脇だけ残して動く，なども想像できなくはないが，これは不自然なので考えないことにする（実際，下と同じように考察すれば起こり得ないことがわかる）。

さて，ここからはこれらの動き方が本当に起こり得るのか考え，起こり得るものだけについて条件を考える。

まずは①，A のみが動くのかどうかについて考える。このとき，垂直抗力を考えれば，A と B の間の最大静止摩擦力は $2\mu_1 Mg$，B と上の段の間の最大静止摩擦力は $\mu_1 Mg$ である。よって，A と B が滑る前に必ず B と上の段が滑ることになるので，「A のみが動く」というのは起こり得ない。

次に②，A と B のみが動く場合だが，A と B の 2 個の積木をまとめて考えると，これらにはたらく

力は B と上の段との間の摩擦力（最大静止摩擦力は $\mu_1 Mg$），および A と床との間の摩擦力（最大静止摩擦力は $3\mu_2 Mg$）である。これらと①の考察より，μ_1 と μ_2 の関係次第では②が起こり得ることがわかる。

次に③，T 字形で動く場合について考える。この問題では積木の側面に摩擦力がはたらかないため，下の段と 2 段目の A と B 以外の両脇の積木を無視して考えてしまった人も多いかもしれない。つまり，「A と B のみが動く」$\Leftrightarrow$「T 字形で動く前に B と上の段との間が滑る」と考えた人も多いのではないか，ということである。果たして T 字形で動くことはあり得るのだろうか。

T 字形で動く限界の状態を考えると，B と上の段との間の最大静止摩擦力は $\mu_1 Mg$，上の段と 2 段目両脇（B 以外の 2 個）との間の最大静止摩擦力は $2\mu_1 Mg$ である（2 段目両脇の積木を忘れないように！）。よって，T 字形で動く（上の段と 2 段目両脇が滑る）前に必ず B と上の段が滑ることになるから，「T 字形で動く」というのは起こり得ない。

この条件で解いてしまった人は，B と上の段 3 個の間の最大静止摩擦力は $\mu_1 Mg$，A と床との間の最大静止摩擦力は $3\mu_2 Mg$ であることから，

$$\mu_1 Mg < 3\mu_2 Mg$$

$$\therefore \quad \mu_2 > \frac{1}{3}\mu_1$$

というような解答をしてしまっただろう。これは，9 個すべての積木が同時に動き始めるよりも前に A と B のみが同時に動き始める条件 $\mu_2 > \dfrac{1}{6}\mu_1$ よりも緩い条件であり，誤っていて起こり得ないことがわかる。

最後に④，9 個全体が動く場合について考える。これは，B と上の段が滑る前に床と下の段が滑る場合であり，起こり得る。

以上より，結局起こり得るのは，

② A と B のみが動く（B と上の段が滑る）

④ 9 個全体が動く（下の段と床が滑る）

の 2 つのみであることがわかる。よって，以上のことをまとめると次のようになる。

$$\begin{cases} \text{9 個すべての積木が同時に動き始める} : 0 < \mu_2 \leqq \dfrac{1}{6}\mu_1 \\ \text{A と B のみが同時に動き始める} : \dfrac{1}{6}\mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

解説にあるような条件は，このような考察をして初めて得られる。文字が多く大変な考察のように思われるかもしれないが，実際考えてみると当たり前であり，比較的すぐこの条件にたどり着くことができる。2 段目と下の段の両脇の 4 個の積木を無視しないことにだけ注意してほしい。

（注）

この設問 III は設問 I，設問 II とは明らかに独立していて戸惑ったかもしれないが，このようなこともあるので落ち着いて解こう。また，設問 III に使われている題材の積木は遊んだことのある人も多いだろう。そのイメージを使うと問題設定の違い（例えばこの問題では積木の側面の摩擦は無視されている）などから誤った答えに行きついてしまうことも多いが，この問題では「どのように動くパターンがあるか」をイメージするのには使ってもよかっただろう。

（ 森本亮太，森田涼介 ）

2017 年度 東京大学 前期 物理

第 2 問　磁場中を運動する導体棒のブランコ

出題範囲	RLC 交流回路・磁場中の荷電粒子の運動
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	第 2 問は，磁場中で電流の流れるブランコの導体棒に，各種電源をつないだときの運動について考える問題である。 Ⅰは，閉回路内における磁束の変化を考えて，ファラデーの法則をもとに式を立てればよい。 Ⅱでは，つり合いの位置付近での単振動について問われている。特に(2)は，運動方程式を立てて考えてもよいが，$\theta = \frac{\pi}{4}$ 方向を鉛直方向と見なしたときに，ブランコの運動が単振り子と見なせることに気づくことがポイント。これは慣性力がはたらいている座標系（非慣性系）での単振り子に，見かけの重力が斜め方向にはたらいていると考えることと同じである。このように分野をまたいだポイントが出題されるのも東大物理の特徴といえる。 Ⅲは，ブランコに交流電圧をつないで十分時間がたったときの，ブランコの運動を考察する問題である。定常状態ではブランコの回路には，導体棒中の誘導起電力と交流電圧がつり合い，電流が流れなくなることに気づけるかどうかがカギである。 Ⅰ～Ⅲとも，後半部は定性的な議論を求められているが，いずれも難易度は高い。前半部の基礎的な問で確実に点数を稼いで，後半部は部分点を確保しに行く姿勢で臨んだ受験生も多かったと思われる。また，この大問では大学で学ぶ「減衰振動」や「強制振動」が題材となっている。化学などでもいえることだが，このように大学での学習範囲の題材を高校生にもわかるように出題するというのも，東大入試の定番問題といえるだろう。

解説

Ⅰ

(1)

ブランコが $\theta = 0$ の位置を通るとき，ブランコは水平成分の速度のみをもつ。したがって磁場に垂直な方向に運動する導体棒と見なして，生じる誘導起電力の大きさは vBL である。

回路の方程式より，

$$vBL = RI_1$$

したがって，

$$\boldsymbol{I_1 = \frac{vBL}{R}}$$

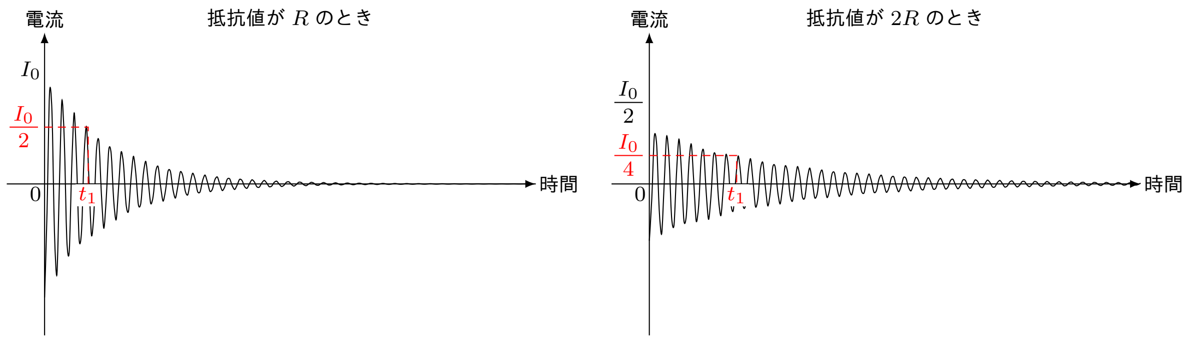
(2)

抵抗で発生したジュール熱は，運動の開始から終了までに減少した力学的エネルギーに等しい。

位置エネルギーの基準を $\theta = 0$ の位置とする。運動開始時の運動エネルギーは 0 であるから，運動開始時の力学的エネルギーは，位置エネルギーと等しく $Mgl(1 - \cos\alpha)$ である。したがって，

$$\boldsymbol{Q = Mgl(1 - \cos\alpha)}$$

(3)



導体棒がブランコとして運動することにより生じる誘導起電力は，交流電源のようなはたらきをする。ブランコは $\theta = 0$ の位置で速さが極大となるので，この誘導起電力による電流は $\theta = 0$ の位置で極大または極小となる。したがって，電流の振幅は(1)の I_1 について考えればよい。(1)より，I_1 は抵抗が大きくなると抵抗が変化する前に比べて小さくなり，発生するジュール熱は小さくなるので，エネルギーの損失が減り減衰しにくくなる。したがって，振動の振幅が半分になるのにかかる時間 t_1 は長くなる。

よって，答えは**ア**。

（別解）

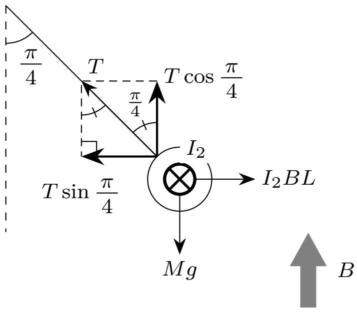
ブランコが磁場から受ける力を考える。レンツの法則とフレミング左手の法則より，誘導起電力によって流れた電流が磁場から受ける力は，常にブランコを減速させる方向にはたらいている。

抵抗が大きくなると電流の振幅が小さくなることから，ブランコが磁場から受ける力も小さくなる。つまりブランコを減速させる力が小さくなるので，振動の振幅が半分になるのにかかる時間は長くなる。

よって，答えはア。

II

(1)



導体棒に大きさ I_2 の電流が流れているとき，導体棒は磁場から，右図において右向きで大きさ I_2BL の力を受ける。

ブランコが $\theta=\frac{\pi}{4}$ のときに静止していることから，2 本の導線の張力の和を T として，鉛直方向および水平方向についてそれぞれ力のつり合いの式を立てて，

$$\text{水平方向：}T\sin\frac{\pi}{4}=\frac{T}{\sqrt{2}}=I_2BL$$

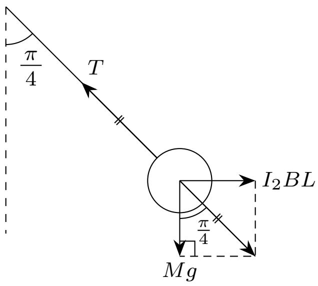
$$\text{鉛直方向：}T\cos\frac{\pi}{4}=\frac{T}{\sqrt{2}}=Mg$$

よって，

$$I_2BL=Mg$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{I_2=\frac{Mg}{BL}}$$

（別解）

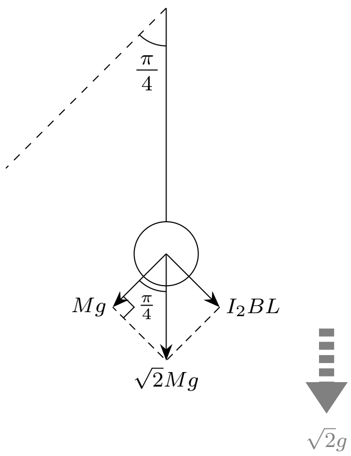


Mg と I_2BL の合力が 2 本の導線の張力の和 T とつり合うので，合力は鉛直方向と $\frac{\pi}{4}$ の角をなすことがわかる。このことから，

$$I_2BL=Mg$$

$$\therefore\quad I_2=\frac{Mg}{BL}$$

(2)



導体棒に流れる電流は，直流電源の起電力に由来する I_2 と，ブランコが振動することで生じた誘導起電力に由来する I' を足し合わせたものであると考えてよい。

ここで，右のように(1)の図を時計まわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させる。Mg と I_2BL はブランコの運動によらず一定であるから，導体棒は常に図で下向きに大きさ $\sqrt{2}Mg$ の力を受ける。つまり，図で下向きに大きさ $\sqrt{2}g$ の仮想的な重力加速度が存在すると見なすことができる。

このようにすると，設問 I において重力加速度を $\sqrt{2}g$ に置き換えた場合として考えることができる。したがって，$\sqrt{2}g$ の仮想的な重力加速度による単振り子の振動を考えればよい。

単振り子の周期は，重力加速度の大きさが g，糸の長さが l のときに $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ であるから，求める周期 P は，

$$\boldsymbol{P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{2}g}}}$$

◆ **Column**

誘導起電力による影響

(2)において I' による影響は無視できるが，その理由を考える。

(2)の図の状態から δ だけ持ち上げて振動を開始させると，導体棒は電流 I' が流れることにより磁場から力を受ける。I' によって導体棒が磁場から受ける力 f' は，速度を $v(t)$ として，

$$f' = -I'BL = -\frac{(BL)^2}{R}v(t)$$

であるから，速度の -1 倍に比例する。速度の -1 倍に比例する力は，例えば空気抵抗などが該当し，一般に運動を減衰させる力である。この力については，2016 年度第 2 問 III や 2015 年度第 2 問 IV で言及されている。

この f' は短時間では単振動に影響を及ぼさないので，(2)においては誘導起電力による影響を無視して周期を求めてよい。また，(3)において振幅が減少するのは，この減衰させる力が原因となる。

(3)

(2)と同様に仮想的な重力加速度による単振動を考える。このブランコの振動は短時間では(2)の図で下向き$\left(\theta = \dfrac{\pi}{4}\right)$を中心とした単振動であるが，時間がたつにつれて抵抗で電流 I' によるジュール熱が発生して単振動のエネルギーが失われ，振幅は減少し，最終的には初めの位置で静止する。これを満たす図は**イ**である。

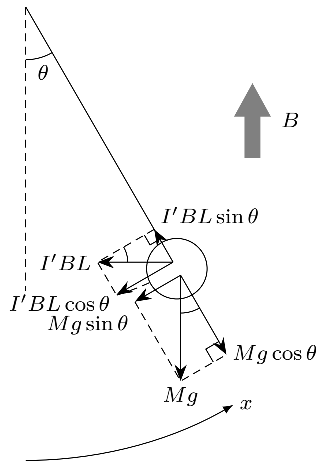
（別解）

(2)で考察したように，ブランコには運動を減衰させる力がはたらいている。したがって，徐々に振幅は減少して最終的には $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ の位置で静止するので，正しい図はイとなる。

◆ Column

誘導起電力を考慮したブランコの運動方程式

誘導起電力を考慮した場合のブランコの運動を考える。簡単のため，電源につないでいない設問 I の状況における運動を考える。



右図で円弧に沿って右向きを x 軸で正の向きとし，$\theta=0$ を原点とする。$x>0$ かつ $\dfrac{dx}{dt}>0$ のときの運動方程式を考える。

設問 I (1)と同様に，導体棒には大きさ $V'=v(t)BL=\dfrac{dx}{dt}BL$ の起電力が生じており，レンツの法則より，その向きは紙面裏側から表側へ貫く方向に電流を流す向きである。よって，電流 I' は磁場から水平左向きに $I'BL$ の力を受ける。したがって右図より，円弧の接線方向にはたらく力は，

$$-Mg\sin\theta-I'BL\cos\theta$$

$$\fallingdotseq -Mg\theta-I'BL \qquad (\because\ \theta\text{は微小量})$$

$$=-\frac{Mg}{l}x-\frac{(BL)^2}{R}\frac{dx}{dt} \qquad \left(\because\ x=l\theta,\ I'=\frac{v(t)BL}{R}\right)$$

よって，ブランコの運動方程式は，

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{Mg}{l}x-\frac{(BL)^2}{R}\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{(BL)^2}{MR}\frac{dx}{dt}+\frac{g}{l}x=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

x や $\dfrac{dx}{dt}$ の符号が変化した際にはブランコの受ける力の向きが変化するが，この変化は運動方程式における x や $\dfrac{dx}{dt}$ の符号としてそのまま表れるので，常に同じ運動方程式を用いることができる。

この微分方程式を解くことは高校での学習範囲を逸脱するのでその過程は省略するが，$t=0$ において $x=l\alpha$ であり，振幅が小さくなりながら長い間振動する場合の解は，

$$x=l\alpha e^{-\frac{(BL)^2}{2MR}t}\left\{\cos\beta t+\frac{\frac{(BL)^2}{2MR}}{\beta}\sin\beta t\right\}$$

$$\left(\text{ただし，}\beta=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2-\left(\frac{(BL)^2}{2MR}\right)^2}\right)$$

である。徐々にブランコの振幅が小さくなりながら長い時間振動するということは，単振り子の運動に対して I' の影響がわずかであるといえるので，$\sqrt{\dfrac{g}{l}} \gg \dfrac{(BL)^2}{2MR}$ である。したがって，$\beta \fallingdotseq \sqrt{\dfrac{g}{l}}$，$\dfrac{\frac{(BL)^2}{2MR}}{\beta} \fallingdotseq 0$ とすると，

$$x \fallingdotseq l\alpha e^{-\frac{(BL)^2}{2MR}t}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \qquad \cdots\cdots ②$$

となる（ただし e は自然対数の底）。②を見ると，t が増加するにつれて振幅 $l\alpha e^{-\frac{(BL)^2}{2MR}t}$ が小さくなりながら，周期 $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ で振動していることがわかる。

設問Ⅰ(3)で考えた，振れ幅が半分になるのにかかる時間 t_1 は，

$$e^{-\frac{(BL)^2}{2MR}t_1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad t_1 = \log 2 \cdot \frac{2MR}{(BL)^2}$$

となるので，R が 2 倍になると t_1 も 2 倍になることがわかる。

さらに，t が微小であるとき，$e^{-\frac{(BL)^2}{2MR}t} \fallingdotseq 1$ と見なせる。このとき②より $x \fallingdotseq l\alpha\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}t\right)$ であり，これは①において第 2 項を無視した場合の解，つまり I' の影響を無視した場合の単振り子の運動を表す。したがって短い時間ではブランコは単振動をすると見なせる。これは，設問Ⅱ(2)でも同様の考え方ができる。

なお，②より，

$$\begin{aligned}
v &= \frac{dx}{dt} \\
&\fallingdotseq l\alpha\left\{-\frac{(BL)^2}{2MR}e^{-\frac{(BL)^2}{2MR}t}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + e^{-\frac{(BL)^2}{2MR}t}\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right)\right\} \\
&= -l\alpha e^{-\frac{(BL)^2}{2MR}t}\left\{\frac{(BL)^2}{2MR}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + \sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right\} \qquad \cdots\cdots ③ \\
&= -l\alpha\sqrt{\left(\frac{(BL)^2}{2MR}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2}\,e^{-\frac{(BL)^2}{2MR}t}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi\right) \qquad \cdots\cdots ③'
\end{aligned}$$

$$\left(\text{ただし，}\tan\varphi = \frac{\frac{(BL)^2}{2MR}}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\right)$$

以上より，I' を具体的に求めてみると，

$$\begin{aligned} I' &= \frac{vBL}{R} \\ &\fallingdotseq -l\alpha e^{-\frac{(BL)^2}{2MR}t}\left\{\frac{(BL)^2}{2MR}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)+\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right\}\cdot\frac{BL}{R} \\ &= -\frac{l\alpha BL}{R}e^{-\frac{(BL)^2}{2MR}t}\left\{\frac{(BL)^2}{2MR}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)+\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right\} \end{aligned}$$

となることがわかる。これを図示したものが，設問 I (3)の抵抗値が R のときのグラフであり，グラフ中の I_0 は③$'$ におけるはじめの振幅 $l\alpha\sqrt{\left(\frac{(BL)^2}{2MR}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2}$ である。

また，τ〔s〕$= \dfrac{2MR}{(BL)^2}$ とおき，角振動数も $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ とおいてしまうと，②より x は

$$x \fallingdotseq l\alpha e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t)$$

と表せる。

さらに，

$$e^{-1} = 0.367879\cdots$$

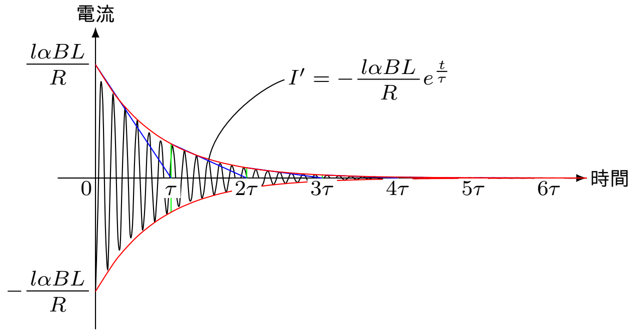
$$e^{-2} = 0.135335\cdots$$

$$e^{-3} = 0.049787\cdots$$

$$e^{-4} = 0.018315\cdots$$

$$e^{-5} = 0.006737\cdots$$

$$e^{-6} = 0.002478\cdots$$



となり，τ の 5〜6 倍の時間が経過すれば，「十分に時間が経過した」や「長時間観察した」あとだといえるであろう。

ちなみに，τ と ω_0 を用いると，③や $\tan\varphi$ は

$$v \fallingdotseq l\alpha e^{-\frac{t}{\tau}}\left\{\frac{1}{\tau}\cos(\omega_0 t)+\omega_0\sin(\omega_0 t)\right\}$$

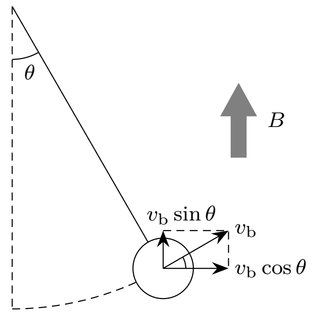
$$\tan\varphi = \frac{\frac{1}{\tau}}{\omega_0}$$

のようにすっきりと表せる。

Ⅲ

(1)

ブランコの速さ v_b は,



$$v_\mathrm{b} = l\frac{d\theta}{dt} = l\beta\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

ブランコと磁束密度の向きを考えて,誘導起電力は,θ が微小量であることから $|\cos\theta| = \sqrt{1-\sin^2\theta} \fallingdotseq \sqrt{1-\theta^2} \fallingdotseq 1$ と近似できるので,

$$\boldsymbol{V} = v_\mathrm{b}\cos\theta\cdot BL$$

$$\fallingdotseq v_\mathrm{b}BL$$

$$\boldsymbol{= \frac{2\pi\beta lBL}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}$$

(別解)

微分を用いず,与えられた近似式 $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ を用いると,

$$v_\mathrm{b} = l\beta\frac{\sin\left\{\frac{2\pi}{T}(t+\Delta t)\right\} - \sin\frac{2\pi t}{T}}{\Delta t}$$

$$= l\beta\frac{\sin\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi\Delta t}{T} + \cos\frac{2\pi t}{T}\sin\frac{2\pi\Delta t}{T} - \sin\frac{2\pi t}{T}}{\Delta t}$$

$\Delta t\to 0$,つまり $\frac{2\pi\Delta t}{T}\to 0$ で $\sin\theta\fallingdotseq\theta$,$\cos\theta\fallingdotseq 1$ なので,

$$v_\mathrm{b} \fallingdotseq l\beta\frac{\sin\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi\Delta t}{T}\cos\frac{2\pi t}{T} - \sin\frac{2\pi t}{T}}{\Delta t}$$

$$= l\beta\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

となる。

(2)

ブランコの運動による電磁誘導の効果と交流電源が接続されている効果が打ち消し合うとは,つまり交流電源の電圧と誘導起電力の向きが逆で大きさが同じであるということである。すると,回路には電流が流れなくなる。したがって,誘導起電力が(1)のように表されるとき,交流電源の電圧は $-\frac{2\pi\beta lBL}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ と表される。よって,求める振幅 A は,

$$\boldsymbol{A = \frac{2\pi\beta lBL}{T}}$$

(3)

(2)で考えたとおり，電流は流れず，抵抗によるジュール熱は発生しない。よって，振動は抵抗の大きさの変化によらず一定である。したがって，

$$\beta' = \beta$$

（大泉雄司，一丸友美，森本亮太）

2017 年度 東京大学 前期 物理

第 3 問　2 つの部屋に分かれた可動なピストンつきのシリンダー

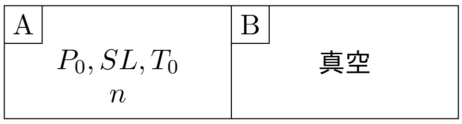
出 題 範 囲	熱力学第一法則
難　易　度	★★☆☆☆
所 要 時 間	25 分
傾向と対策	今年度の第 3 問は熱力学の範囲からの出題であった。例年の熱力学の内容と比べると問題設定がシンプルで，本年度の大問 3 つの中では最も完答しやすいので，確実に点を取りたい。状態変化のイメージがつかみにくければ，P-V 図を描くなどして状況把握をするとよい。ただし，Ⅱにおける状態変化は平衡状態を保ったままの変化ではなく断熱自由膨張であり，同一の P-V 図上で状態変化を曲線で結ぶことができない。 また，Ⅲ，Ⅳ を解くにあたっては領域 A，B それぞれについて考える視点だけでなく，シリンダー全体における熱や仕事のやり取りを考察できる視点ももっておきたい。このように全体を見渡す力を問う問題には 2012 年度第 1 問などがある。

解説

I

気体定数を R とおく。$V_0 = SL \cdots\cdots$ ① とおき，A 内の物質量を n とすると，状態方程式は $P_0V_0 = nRT_0 \cdots\cdots$ ② となる。

3-1



(1)

ピストン 1 の力のつり合いより，

$$P_1S = P_0S + k \cdot \frac{L}{2}$$

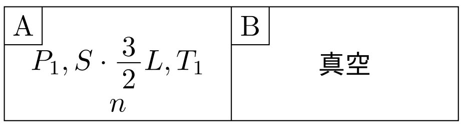
$$\therefore \quad \boldsymbol{P_1 = P_0 + \frac{kL}{2S}}$$

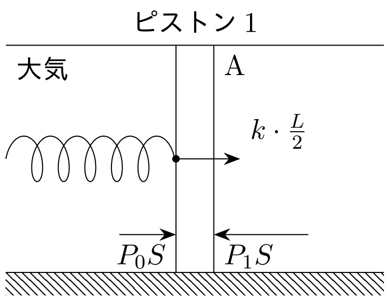
また，ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_1 \cdot \frac{3}{2}V_0}{T_1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{T_1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P_1}{P_0} \cdot T_0 = \boldsymbol{\frac{3}{2}\left(1 + \frac{kL}{2P_0S}\right)T_0}$$

3-2





(2)

A 内の気体が単原子分子理想気体より，定圧モル比熱は，

$$C_V = \frac{3}{2}R$$

である。よって，内部エネルギー変化は，

$$\begin{aligned}\Delta U_0 &= nC_V\Delta T \\ &= n \cdot \frac{3}{2}R \cdot (T_1 - T_0) \\ &= \frac{3}{2}nRT_0\left(\frac{1}{2} + \frac{3kL}{4P_0S}\right)\end{aligned}$$

①，②を用いて，

$$\boldsymbol{\Delta U_0} = \frac{3}{2}P_0SL\left(\frac{1}{2} + \frac{3kL}{4P_0S}\right) \boldsymbol{= \frac{3}{8}L(2P_0S + 3kL)}$$

(3)

熱力学第一法則より，気体がした仕事を W_0 とすると，

$$Q_0 = \Delta U_0 + W_0$$

エネルギー保存則を考える。気体がした仕事 W_0 は，大気がされた仕事とばねに蓄えられた弾性エネルギーになるから，

$$\begin{aligned}W_0 &= P_0\Delta V + \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= P_0\left(\frac{3}{2}V_0 - V_0\right) + \frac{1}{8}kL^2 \\ &= \frac{1}{8}L(4P_0S + kL)\end{aligned}$$

また，(2) より，

$$\Delta U_0 = \frac{3}{8}L(2P_0S + 3kL) = \frac{1}{8}L(6P_0S + 9kL)$$

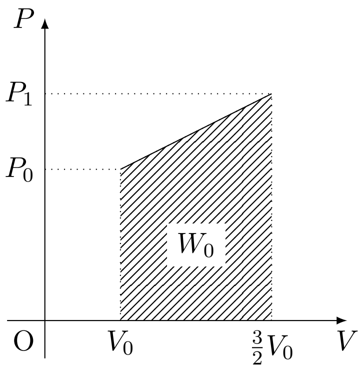
であるから，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q_0} &= \Delta U_0 + W_0 \\ &= \frac{1}{8}L(10P_0S + 10kL) \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{4}L(P_0S + kL)} \end{aligned}$$

（別解）

W_0 の求め方について別解を示す。

状態変化中の気体の圧力 P と体積 V は，ともにばねの縮み x に対して比例して変化するから（下の Column 参照），P は V に対して直線的に変化する。よって，右のような P-V 図がかける。



P-V 図においてグラフと x 軸で囲われた面積が気体のした仕事を表すから，

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{2}(P_0 + P_1)\left(\frac{3}{2}V_0 - V_0\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2P_0 + \frac{kL}{2S}\right)V_0 \\ &= \frac{1}{8}L(4P_0S + kL) \end{aligned}$$

と求まる。

◆ Column

P と V の比例について

P と V は比例する，といった部分を詳しく説明しておこう。

まずは V について，これは，

$$V = Sx + SL \qquad \cdots\cdots③$$

と表される。

次に，P について，(1)と同じように考えれば，ばねが x 縮んだとき（ピストン 1 が x だけ左に移動

したとき）の A 内の圧力を P とし，ピストン 1 についての力のつり合いを考えると，

$$PS = P_0 S + kx$$

$$\therefore \quad P = \frac{k}{S}x + P_0 \qquad \cdots\cdots④$$

となる。③より $x = \dfrac{V}{S} - L$ を④に代入して，

$$P = \frac{k}{S}\left(\frac{V}{S} - L\right) + P_0$$

$$\therefore \quad P = \frac{k}{S^2}V - \frac{kL}{S} + P_0$$

以上より，P は V の一次関数であることがわかる。ばねつきピストンの膨張においてシリンダー内部の圧力 P と体積 V が一次関数である，というのは気づきにくい割によく扱われる設定であるから，理解したうえで覚えてしまうのもよいだろう。

II

気体には熱量も仕事も加えていない（この変化は断熱自由膨張である）から，内部エネルギーの変化は 0 である。よって温度変化も 0 であるから，

$$\boldsymbol{T_2 = T_1}$$

また，ボイル・シャルル則より，

$$\frac{P_1 \cdot \frac{3}{2}V_0}{T_1} = \frac{P_2 \cdot \frac{5}{2}V_0}{T_2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{P_2 = \frac{3}{5}P_1}$$

X

A, B

$P_2,\ \dfrac{5}{2}SL,\ T_2$

n

III

シリンダー内の圧力が P_1 になったらピストン 1 がストッパーから離れる。この状態を Y とする。これは定積変化で

Y

A, B

$P_1,\ \dfrac{5}{2}SL,\ T_3$

n

あるから，熱力学第一法則より $Q_1 = \Delta U_1$ である。よって，ΔU_1 を求めればよいことがわかる。したがって，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q_1} &= \Delta U_1 \\
&= \frac{3}{2}P_1 \cdot \frac{5}{2}V_0 - \frac{3}{2}P_2 \cdot \frac{5}{2}V_0 \\
&= \frac{3}{2}\left(P_1 - \frac{3}{5}P_1\right) \cdot \frac{5}{2}SL \\
&\boldsymbol{= \frac{3}{2}P_1 SL}
\end{aligned}$$

（別解）

ピストン 1 がストッパーから離れるときのシリンダー内の温度 T_3 は，ボイル・シャルル則より，

$$\frac{P_2 \cdot \frac{5}{2}V_0}{T_2} = \frac{P_1 \cdot \frac{5}{2}V_0}{T_3}$$

$$\therefore \quad T_3 = \frac{P_1}{P_2}T_2 = \frac{5}{3}T_1$$

よって内部エネルギーの変化は，

$$\begin{aligned}
\Delta U_1 &= nC_V \Delta T \\
&= n \cdot \frac{3}{2}R \cdot (T_3 - T_2) \\
&= \frac{3}{2}nR \cdot \frac{2}{3}T_1 \\
&= nRT_1
\end{aligned}$$

図 3-2 の状態において気体の状態方程式より，

$$P_1 \cdot \frac{3}{2}V_0 = nRT_1$$

が成立するから，

$$\Delta U_1 = P_1 \cdot \frac{3}{2}V_0 = \frac{3}{2}P_1 SL$$

よって熱力学第一法則より，

$$Q_1 = \Delta U_1 = \frac{3}{2}P_1 SL$$

Ⅳ

(1)

ピストン 2 を無視してシリンダー全体として見れば，Ⅲ と Ⅳ どちらの操作によっても，ともに A 内の気体の圧力が P_1 になってピストン 1 が動き始める。つまり，Ⅲ と Ⅳ はどちらも，ヒーター 2 によってピストン 1 が動き始めるまでシリンダー内の気体を温めるという操作をしており，シリンダー全体として見れば等しい操作である。

よって，Ⅳ の操作後にシリンダー内の全気体を均一にすると（これによって内部エネルギーの合計は変化しない），状態 Y に等しい状態になる。同じ状態での内部エネルギーは等しいから，Ⅲ と Ⅳ でシリンダー内の全気体の内部エネルギーの変化は等しくなる。したがって，

$$\boldsymbol{\Delta U_{\mathrm{A}} + \Delta U_{\mathrm{B}}} = \Delta U_1 \boldsymbol{= \frac{3}{2} P_1 S L}$$

(2)

シリンダー全体で見れば，Ⅲ も Ⅳ も外部に仕事はしていない。よって，熱力学第一法則より，

$$Q_1 = \Delta U_1$$

$$Q_2 = \Delta U_{\mathrm{A}} + \Delta U_{\mathrm{B}}$$

ここで，(1)より $\Delta U_{\mathrm{A}} + \Delta U_{\mathrm{B}} = \Delta U_1$ であるから，

$$\boldsymbol{Q_2 = Q_1}$$

（Ⅳ 別解 1）

先に $Q_2 = Q_1$ を定性的な考えから求め，その後 $\Delta U_{\mathrm{A}} + \Delta U_{\mathrm{B}} = \Delta U_1$ を求める。

シリンダー全体で見ればⅢ と Ⅳ で得られる効果は等しいから，加える熱量は当然等しい。よって $Q_2 = Q_1$ である。

また，B 内の気体がした仕事を W_2 とすると，熱力学第一法則より，

$$\mathrm{B}：Q_2 = \Delta U_{\mathrm{B}} + W_2$$

$$\mathrm{A}：0 = \Delta U_{\mathrm{A}} - W_2$$

辺々足して W_2 を消去して，

$$Q_2 = \Delta U_{\mathrm{A}} + \Delta U_{\mathrm{B}} \qquad \cdots\cdots⑤$$

ここで，$Q_2 = Q_1$ かつ $Q_1 = \Delta U_1$ であるから，

$$\Delta U_{\mathrm{A}} + \Delta U_{\mathrm{B}} = \Delta U_1$$

（Ⅳ 別解 2）

L_{A} を用いて，実際に内部エネルギーの変化と仕事のやり取りを計算する。

（1）

$\Delta U = \dfrac{3}{2} nR\Delta T$ と気体の状態方程式より，$U = \dfrac{3}{2}\Delta(PV)$ である。したがって，

$$\begin{aligned}\Delta U_{\mathrm{A}} &= \frac{3}{2}\left(P_1 \cdot L_{\mathrm{A}} S - P_2 \cdot \frac{3}{2} LS\right) \\ &= \frac{3}{2} P_1 S \left(L_{\mathrm{A}} - \frac{9}{10} L\right) \qquad \left(\because\ P_2 = \frac{3}{5} P_1\right) \\ \Delta U_{\mathrm{B}} &= \frac{3}{2}\left\{P_1 \cdot \left(\frac{5}{2} L - L_{\mathrm{A}}\right) S - P_2 \cdot LS\right\} \\ &= \frac{3}{2} P_1 S \left(\frac{19}{10} L - L_{\mathrm{A}}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \Delta U_{\mathrm{A}} + \Delta U_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2} P_1 SL \qquad \cdots\cdots ⑥$$

（2）

Ⅲ より $Q_1 = \dfrac{3}{2} P_1 SL$ と⑤⑥より，$Q_1 = Q_2$。

（注）

解説と別解 1 では，問題文で与えられた L_{A} という文字を使わなかった。別解 2 のようにこの L_{A} を用いて計算することもできるが，結局 L_{A} は消え，上のような答えとなる。この問題は，「シリンダーの外から見る」という視点をもっていると，少ない計算で素早く解くことができるようになる。

このような，「マクロに見る」視点を使う問題は東大の物理では何度か出題されている，これによって計算が非常に楽になることが多い。何が起こるか定性的に考えてから計算を始めるようにしよう。

（ 森田涼介，三澤颯大，一丸友美 ）