2017 年度 東京大学 前期 数学

第 1 問　2 次関数と軌跡

出題範囲	図形と方程式／2 次関数
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	与えられた $f(\theta)$ を変形して，2 次関数の値が最小になる条件を考える問題である。難しい問題ではないので，確実に完答したい。

解答

(1)

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

であるから，これらを $f(\theta)$ に代入することにより，

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta + 2a\cos^2\theta + (b-3)\cos\theta - a \\ &= 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} f(\theta) - f(0) &= \{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a\} - \{4 + 2a + (b-3) - a\} \\ &= 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - 2a - b - 1 \\ &= (x-1)\{4x^2 + (2a+4)x + 2a + b + 1\} \end{aligned}$$

なので，$0 < \theta < \pi$ において

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1} \quad (\cos\theta - 1 \neq 0 \text{ より}) \\ &= \frac{(x-1)\{4x^2 + (2a+4)x + 2a + b + 1\}}{x-1} \\ &= 4x^2 + (2a+4)x + 2a + b + 1 \end{aligned}$$

である。

(2) $h(x)=g(\theta)$ と定義する。$0<\theta<\pi$ のとき $-1<\cos\theta<1$，すなわち $-1<x<1$ $\cdots\cdots$ ① である。

$h(x)$ が ① の範囲で最小値 0 をとる条件を求める。

2 次関数 $y=h(x)$ の軸は

$$\begin{aligned} h(x) &= 4\left(x+\frac{a+2}{4}\right)^2-4\cdot\left(\frac{a+2}{4}\right)^2+2a+b+1 \\ &= 4\left(x+\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{1}{4}a^2+a+b \end{aligned}$$

より，$x=-\dfrac{a+2}{4}$ であるから，これが定義域に含まれるかどうかで場合を分ける。

(i) $-\dfrac{a+2}{4}\leqq -1$, $1\leqq -\dfrac{a+2}{4}$ すなわち $a\leqq -6$, $a\geqq 2$ のとき

① が開区間であり，-1，1 は範囲に含まれないので，最小値は存在しない。

(ii) $-1<-\dfrac{a+2}{4}<1$ すなわち $-6<a<2$ のとき

$h(x)=4\left(x+\dfrac{a+2}{4}\right)^2-\dfrac{1}{4}a^2+a+b$ より，最小値は $-\dfrac{1}{4}a^2+a+b$ であるから，

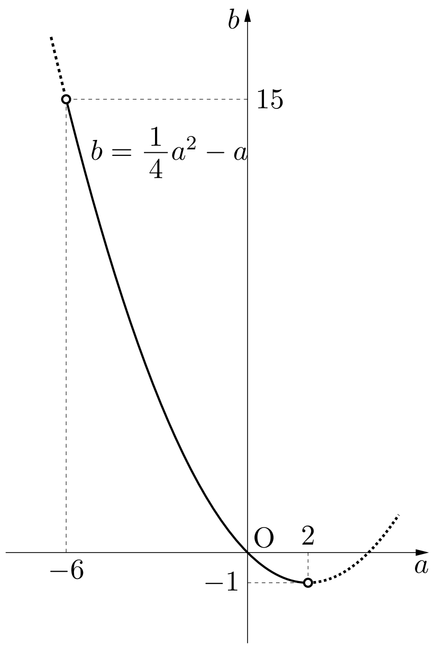
$$-\frac{1}{4}a^2+a+b=0$$

$$b=\frac{1}{4}a^2-a$$

以上 (i)(ii) より，求める条件は

$$-6<a<2 \quad \text{かつ} \quad b=\frac{1}{4}a^2-a$$

であり，図示すると以下のようになる。



解説

(1) $\cos 3\theta$, $\cos 2\theta$ を 3 倍角，2 倍角の公式を使って展開するだけである。問題文に $x = \cos\theta$ の整式で表せと書いてあるので，$f(\theta) - f(0)$ が $\cos\theta - 1$ で割れなかったら計算ミスをしていることになる。

(2) $h(x)$ が x についての 2 次関数なので，軸の値によって場合分けをすればよい。さらに，この問題では，x の定義域が開区間なので，(i) の場合は最小値が存在しない。確実に完答したい。

（不死原大知，寺内一記）

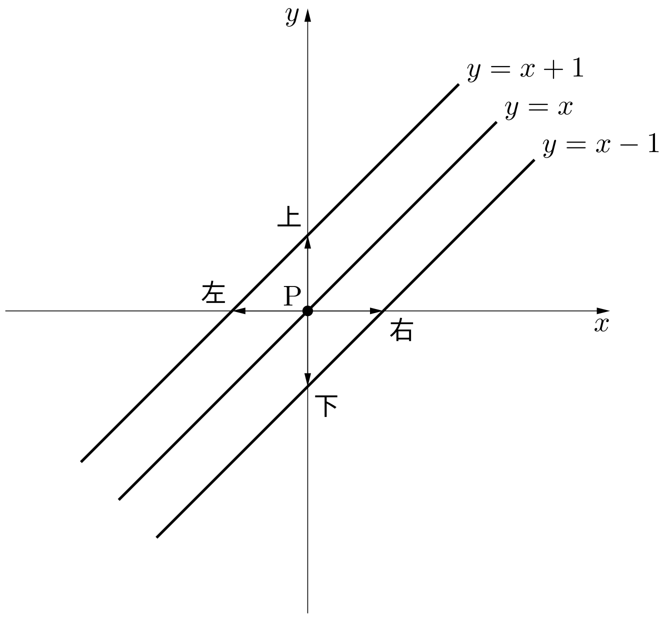
2017 年度 東京大学 前期 数学

第 2 問　ランダムウォークの確率

出題範囲	場合の数と確率
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	(1) で直線 $y=x$ 上の各点をとる確率を場合分けして求めてもよいが計算が煩雑であり，かつ場合分けを見落とす可能性もある。「下」または「右」に移動すると，y 切片が 1 だけ小さい，傾きが同じの直線上へ移動し，「上」または「左」に移動すると，y 切片が 1 だけ大きい，傾きが同じの直線上へ移動するという発想ができるとよい。(2) では，よい方法を探すよりは愚直に計算したほうが早いだろう。

解答

簡単のため，下図のように点 P の移動を「上」「下」「左」「右」で表すことにする。



(1) 点 P が $y=x+k$ (k は整数) 上にあるとする。1 秒後に

(i) 「下」または「右」に行くと $y=x+k-1$ 上に

(ii) 「上」または「左」に行くと $y=x+k+1$ 上に

移る。よって，点 P が最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にあるのは

「下」または「右」に 3 回，「上」または「左」に 3 回

移動した場合であり，その確率は

$$ {}_6\mathrm{C}_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16} $$

(2) 点 P が最初から 6 秒後に原点にあるのは，点 P が上下方向に同じ回数移動し，かつ左右方向に同じ回数移動したときである。つまり，点 P が，「上」に m 回「下」に m 回「左」に $3-m$ 回「右」に $3-m$ 回 $(m=0$, 1，2，3$)$ 移動したときである。

$m=0$，1，2，3 の各場合は互いに排反なので，求める確率は

$$ \sum_{m=0}^{3} \frac{6!}{m!m!(3-m)!(3-m)!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{25}{256} $$

解説

(1) 点 P が $y=x$ 上にあるときの条件を考えれば解答の方法が思いつけるだろう。また，解答の方法が思いつかなくても愚直に計算すれば求めることはできる。その方法は別解で示した。

(2) すべての場合を書き出して確率を求めた。場合分けは 4 つ行えばよいだけなので，愚直に計算するのが手っ取り早いだろう。

別解 1

(1) 6 秒後に点 P が到達できる $y=x$ 上の点は，

$(\pm3,\pm3)$，$(\pm2,\pm2)$，$(\pm1,\pm1)$，$(0,0)$ (複号同順) の 7 点のみである。

以下，上に a 回，下に b 回，右に c 回，左に d 回移動することを (a,b,c,d) と表す。

6 秒後に点 (x,y) にいるとき

$$ \begin{cases} a-b=x \\ c-d=y \\ a+b+c+d=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+x \\ c=d+y \\ 2(b+d)+(x+y)=6 \end{cases} \quad \cdots\cdots\text{①} $$

が成り立つ。b，d が負でない整数であることに注意して

(i) 6 秒後に (3,3) にいる場合

$$ \text{①} \Leftrightarrow b+d=0 \quad \text{すなわち} \quad b=d=0 $$

であるから，(3,0,3,0) のみである。このときの確率は

$$ {}_6\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{4}\right)^6 = 20\left(\frac{1}{4}\right)^6 $$

(ii) 6 秒後に (2,2) にいる場合

$$① \Leftrightarrow b+d=1 \quad \text{すなわち} \quad (b,d)=(1,0),\ (0,1)$$

であるから，(3,1,2,0)，(2,0,3,1) の 2 通り存在する。このときの確率は

$$\frac{6!}{3!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=120\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

(iii) 6 秒後に (1,1) にいる場合

$$① \Leftrightarrow b+d=2 \quad \text{すなわち} \quad (b,d)=(0,2),\ (1,1),\ (2,0)$$

であるから，(1,0,3,2)，(2,1,2,1)，(3,2,1,0) の 3 通り存在する。このときの確率は

$$\frac{6!}{2!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{3!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=300\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

(iv) 6 秒後に (0,0) にいる場合

$$① \Leftrightarrow b+d=3 \quad \text{すなわち} \quad (b,d)=(0,3),\ (1,2),\ (2,1),\ (3,0)$$

であるから，(0,0,3,3)，(1,1,2,2)，(2,2,1,1)，(3,3,0,0) の 4 通り存在する。このときの確率は

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^6=400\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

点 P が 6 秒後に $(-3,-3)$，$(-2,-2)$，$(-1,-1)$ にある確率は，対称性からそれぞれ $(3,3)$，$(2,2)$，$(1,1)$ にある確率に等しく，(i)(ii)(iii)(iv) は互いに排反なので，求める確率は

$$\{2(20+120+300)+400\}\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{5}{16}$$

(2) (1) の (iv) より求める確率は

$$400\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{25}{256}$$

別解 1 解説

(1) 愚直に書き出すときに，文字式を用いれば，数え漏れはなくなるだろう。$\left(\frac{1}{4}\right)^6$ はすべての場合分けで出てくることは想定できるので，最後に計算するほうが楽である。

(2) (1) で既に求めてある。本解とやっていることは特に変わらない。

別解 2

(2) 格子点 (m, n) を

$$\begin{cases} y = x + k & (k = -(m-n)) \\ y = -x + l & (l = m + n) \end{cases}$$

の交点とみなす。また，事象 A，B，C，D を次のようにおく。

A: $y = x + k$ 上から $y = x + k + 1$ 上に移動する。

B: $y = x + k$ 上から $y = x + k - 1$ 上に移動する。

C: $y = -x + l$ 上から $y = -x + l + 1$ 上に移動する。

D: $y = -x + l$ 上から $y = -x + l - 1$ 上に移動する。

このとき，格子点の移動は次のように言い換えることができる。

(i) (m, n) から $(m+1, n)$ に移動する。$\Leftrightarrow$ B かつ C

(ii) (m, n) から $(m-1, n)$ に移動する。$\Leftrightarrow$ A かつ D

(iii) (m, n) から $(m, n+1)$ に移動する。$\Leftrightarrow$ A かつ C

(iv) (m, n) から $(m, n-1)$ に移動する。$\Leftrightarrow$ B かつ D

つまり 1 秒後には，「A または B」かつ「C または D」が起こる。

事象 A，B，C，D が起こる確率をそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とおくと，事象「A または B」と事象「C または D」は独立である。なぜなら，(i)(ii)(iii)(iv) のどの場合においても，「A または B」が起きた時の，「C または D」が起こる条件付き確率は

$$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となり，1 秒後に「C または D」が起こる確率に等しいからである。[1]

事象「A または B」と事象「C または D」は独立なので，t 秒後の点 P の座標は，$y = x$ が「A または B」によって t 回移動した直線と，$y = -x$ が「C または D」によって t 回移動した直線の交点になる。

よって，t 秒後に，点 P が (m, n) にある確率は，点 P が t 秒後に

$$(y = x - (m-n) \text{ 上にある確率}) \times (y = -x + (m+n) \text{ 上にある確率})$$

になる。よって，点 P が 6 秒後に原点にある確率は点 P が 6 秒後に

$$(y = x \text{ 上にある確率}) \times (y = -x \text{ 上にある確率})$$

[1] 事象 X と事象 Y が独立とは

$P_X(Y) = P(Y)$

が成立することをいう。

であり，点 P が 6 秒後に $y=-x$ 上にある確率は，対称性から，点 P が 6 秒後に $y=x$ 上にある確率に等しい。

よって，求める確率は (1) から

$$\left(\frac{5}{16}\right)^2=\frac{25}{256}$$

別解 2 解説

格子点を 2 つの直線の交点としてとらえた解法である。ここで注意するのは，「A または B」と「C または D」が独立であることである。例えば，事象 C'，D'，E'，F' を

C': $y=-2x+l$ 上から $y=-2x+l+2$ 上に移動する。

D': $y=-2x+l$ 上から $y=-2x+l+1$ 上に移動する。

E': $y=-2x+l$ 上から $y=-2x+l-1$ 上に移動する。

F': $y=-2x+l$ 上から $y=-2x+l-2$ 上に移動する。

とし，格子点の移動を

(i) (m,n) から $(m+1,n)$ に移動する。$\Leftrightarrow$ B かつ C'

(ii) (m,n) から $(m-1,n)$ に移動する。$\Leftrightarrow$ A かつ F'

(iii) (m,n) から $(m,n+1)$ に移動する。$\Leftrightarrow$ A かつ D'

(iv) (m,n) から $(m,n-1)$ に移動する。$\Leftrightarrow$ B かつ E'

と言い換えて，A，B が起こる確率をそれぞれ $\frac{1}{2}$，C'，D'，E'，F' が起こる確率をそれぞれ $\frac{1}{4}$ とおく。事象「A または B」と事象「C'または D'または E'または F'」が独立とすると，1 秒後に (m,n) から $(m+1,n)$ に移動する確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\fallingdotseq\frac{1}{4}$$

となるので，事象「A または B」と事象「C'または D'または E'または F'」は独立ではない。つまり，点 P が t 秒後に (m,n) にある確率を

$$(t\text{ 秒後に } y=x+(n-m)\text{ 上にある確率})\times(t\text{ 秒後に } y=-x+(2m+n)\text{ 上にある確率})$$

とすることはできない。

（鈴木陽大，松岡駿，不死原大知）

2017 年度 東京大学 前期 数学

第 3 問　複素数平面上の点の軌跡

出題範囲	複素数平面
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	2016 年度に引き続き，複素数平面から出題された。(1) は基本的な問題であるが，原点が除かれることに注意しよう。(2) は (1) を利用することに気づくのが第 1 段階，その後軌跡の範囲を求めるのが第 2 段階である。複素数平面の問題にある程度慣れていれば難なく解けたであろう。

解答

(1) 点 z は点 α と原点を結ぶ垂直二等分線上を動くから

$$|z-\alpha| = |z-0|$$

$$|z-\alpha| = |z|$$

$w = \dfrac{1}{z}$ より，$z = \dfrac{1}{w}$　(ただし，$w \neq 0$)

上式に代入して

$$\left|\frac{1}{w}-\alpha\right| = \left|\frac{1}{w}\right|$$

$$|1-w\alpha| = 1$$

$$\left|w-\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|} \quad (\alpha \neq 0 \text{ より})$$

よって，点 w の軌跡が描く円の中心は $\dfrac{1}{\alpha}$，半径は $\dfrac{1}{|\alpha|}$ で，除かれる 1 点は原点である[1]。

[1] $w \neq 0$ なので，原点は除かれることも忘れずに述べよう。

(2) 方程式 $x^3 = 1$ の解は

$$x^3 - 1 = 0$$

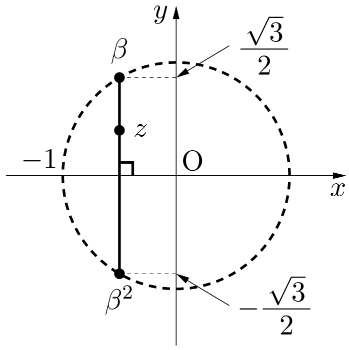
$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x-1=0 \text{ または } x^2+x+1=0$$

より，$x = 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。よって，条件より

$$\beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \beta^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

点 β と点 β^2 を通る直線は，点 -1 と原点を結ぶ線分の垂直二等分線であるから，(1) で $\alpha=-1$ として



$$|w+1|=1 \quad (w \neq 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

が得られる[2]。

[2] この時点で，点 z が点 β と点 β^2 を通る直線上を動くときの点 w の軌跡が得られる。実際には点 z は直線ではなく線分上を動くので，点 w の軌跡は ① の一部である。以降，① のうちどの部分が求める軌跡となるかを調べる。

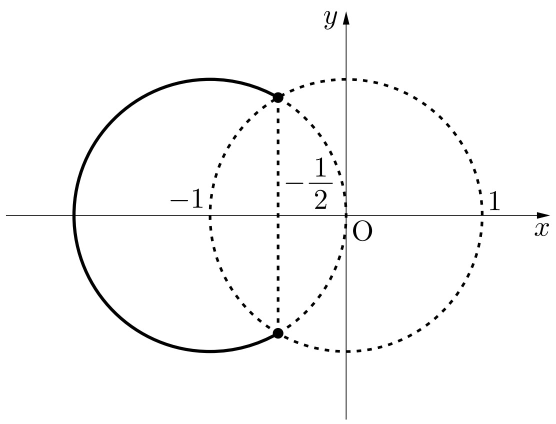
ここで，$|z|$ は $z=\beta, \beta^2$ のときに最大値 1 をとるので，$|z| \leqq 1$ である。$w=\dfrac{1}{z}$ より，$z=\dfrac{1}{w}$ なので

$$|z| \leqq 1$$

$$\left|\frac{1}{w}\right| \leqq 1$$

$$1 \leqq |w| \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② より，点 w の軌跡は，中心 -1，半径 1 の円周上の点のうち，原点を中心とする半径 1 の円の周または外部にある部分である。図示すると以下のようになる（端点は含む）。



解説

(1) 基礎的な問題である。点 z が原点と点 α の垂直二等分線上を動くということは，「点 z と原点との距離」と「点 z と点 α との距離」が等しくなることを意味する。このことを定式化したのち，$z=\dfrac{1}{w}$ を代入すればよい。

(2) まずは (1) を利用することを考えよう。これにより，点 z が点 β と点 β^2 を通る直線上を動くときの点 w の軌跡が得られる。実際には点 z は線分上を動くので，軌跡の範囲は絞り込まれることになる。軌跡の範囲を調べる際には，点 z の動く範囲が直線の一部（すなわち線分）となることによって，何が制限されるのかを考えよう。例えば絶対値 $|z|$ が制限されるから，解答ではこのことを利用した。また，次の別解のように，

偏角を用いて絞り込むこともできる。

別解

(2) $\alpha = -1$ として

$$|w+1| = 1 \qquad \cdots\cdots\cdot \ ①$$

を得るところまでは **解答** と同様。

$$\arg w = \arg \frac{1}{z} = -\arg z$$

である。ここで

$$\beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$\beta^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$$

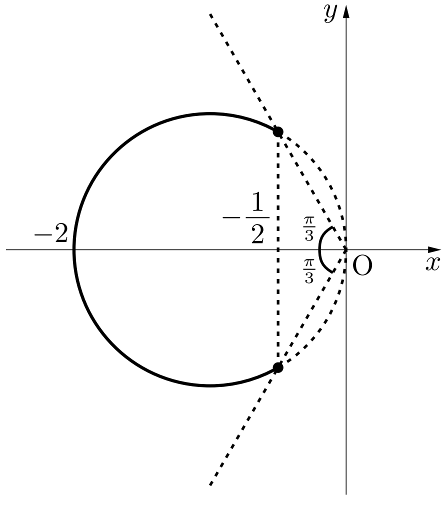
であり，点 z は点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を動くので

$$\frac{2}{3}\pi \leqq \arg z \leqq \frac{4}{3}\pi$$

$$-\frac{4}{3}\pi \leqq -\arg z \leqq -\frac{2}{3}\pi$$

$$-\frac{4}{3}\pi \leqq \arg w \leqq -\frac{2}{3}\pi \qquad \cdots\cdots\cdot \ ②$$

①，② より，点 w の軌跡を図示すると以下のようになる（端点は含む）。



別解解説

絞り込み方は違うが，確かに **解答** と同じ軌跡が得られた。本問の場合，$w = \dfrac{1}{z}$ より $\arg w = -\arg z$ という簡素な関係式が成り立つので，偏角を用いて絞り込むのも比較的容易である。

（神藤駿介，青木徹，大久保佳徳）

2017 年度 東京大学 前期 数学

第 4 問　数列とユークリッドの互除法

出題範囲	数列／整数の性質
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	(1)〜(3) は易しく，ここまでは東大受験生ならばサクサクと解答していきたい。(4) は頭のひねりどころで，差がつく問題であったと思われる。整数問題に多くふれてきた受験生ならば，漸化式の形を割り算の商と余りという形に捉えることで，ユークリッドの互除法により簡単にすませることができただろう。ユークリッドの互除法が思いつかなくとも，別解のように定石に則って考える力も必要である。

解答

(1) $p = 2 + \sqrt{5}$ なので

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{2+\sqrt{5}} = -\frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = 2 - \sqrt{5}$$

$q = 2 - \sqrt{5}$ とおくと

$$a_n = p^n + q^n$$

$$p + q = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 4$$

$$pq = (2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) = -1$$

よって

$$a_1 = p + q = 4$$

$$a_2 = p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 16 - 2 \cdot (-1) = 18$$

(2) $n \geqq 2$ において

$$\begin{aligned} a_1 a_n &= (p+q)(p^n + q^n) \\ &= p^{n+1} + q^{n+1} + pq(p^{n-1} + q^{n-1}) \\ &= a_{n+1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

(3)【証明】$a_1 = 4$ より，(2) から漸化式

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n \quad (n \geqq 1)$$

が得られる。

すべての自然数 n について，a_n が自然数であることを数学的帰納法により示す。

(i) $n=1,\ 2$ のとき

$a_1=4$，$a_2=18$ ゆえ，自然数である。

(ii) $n=k$，$k+1$ のときに a_k，a_{k+1} が自然数であると仮定すると

$$a_{k+2}=4a_{k+1}+a_k$$

なので，a_{k+2} は自然数である。

(i)(ii) より，数学的帰納法から，題意が示された。 (証明終)

(4) 漸化式

$$a_{n+2}=4a_{n+1}+a_n$$

において，漸化式より，全ての自然数に対し $a_n>0$ であり $a_2>a_1$ であることから，任意の自然数 n について $a_{n+1}>a_n$ が成り立つ。したがって，a_{n+2} を a_{n+1} で割った余りが a_n であるとみなせる。よって，ユークリッドの互除法の考え方から

「a_{n+2}と a_{n+1}の最大公約数」=「a_{n+1}と a_nの最大公約数」

これを繰り返すと，

「a_{n+1}と a_nの最大公約数」=「a_2と a_1の最大公約数」

が成り立つ。a_2 と a_1 の最大公約数は，18 と 4 の最大公約数であるから，求める値は 2 である。

解説

(1) ここで，計算ミスすると，後続の問題すべてに影響するので，見直しをしっかりしよう。

(2) 対称式の処理という意味で，典型問題である。何度も経験したことがあるだろう。

(3) a_n の直接の定義から，すべての自然数において a_n が自然数であることを示すのは難しい。(2) で求めた漸化式によって，a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n と順番に決まっていくことに気がつけば，数学的帰納法を思いつくのは難しいことではない。

(4) ユークリッドの互除法が思いつけば易しい問題である。しかし，漸化式をみて，すぐに互除法を思いつくのは難しかったかもしれない。しかし，定石どおり，a_{n+1} と a_n の最大公約数を G とおき

$$a_{n+1}=aG,\ a_n=bG \quad (a \text{ と } b \text{ は互いに素な自然数})$$

として，漸化式に代入すると，a_{n-1} も G を公約数にもつことがわかる。ここで，ユークリッドの互除法の問題を解いたことがあれば，互除法に気づくことができるだろう。

また，任意の自然数 n について $a_{n+1} > a_n$ であることを示さなければいけないことに注意しよう。余りは割る数より小さいからである。

互除法に気づけなくても，漸化式で n，$n-1$，$n-2$，$\cdots$，2，1 と下っていけば G を求めることができる。その方法は 別解 で示した。

別解

(4) a_{n+1} と a_n が最大公約数 G をもつとする。このとき，$n \geqq 2$ において $a_{n-1} = a_{n+1} - 4a_n$ より，a_{n-1} も G を公約数にもつので，G は a_n と a_{n-1} の公約数となっている。

これを繰り返すことで，G は a_2 と a_1 の公約数であることが分かる。$a_1 = 4, a_2 = 18$ より，$G = 1$ または 2 に限られる。漸化式より，$n \geqq 3$ において a_n は偶数と偶数の和となるので，常に偶数である。よって，a_n はすべての n に対し偶数である。したがって

$$G = 2$$

である。

別解解説

漸化式の n の値を小さくしていって最大公約数を求める解法を示した。本質的には互除法と全く同じことをしているのがわかるだろう。

（不死原大知，佐藤賢志郎）

2017 年度 東京大学 前期 数学

第 5 問　共通接線が存在する条件

出題範囲	2 次関数
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	$y=x$ について対称な 2 つの放物線の共通接線について考える問題。(1)，(2) ともに与えられた条件に従って計算するだけである。a の条件など細かい点に留意して答案を作りたい。

解答

(1) $y=ax+b$ として，l と C，D が接するとは

$$\begin{cases} x^2+k=ax+b & \cdots\cdots\ ① \\ (ax+b)^2+k=x & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

の ①，② がともに重解をもつということである。

$$① \iff x^2-ax+k-b=0$$

$$② \iff a^2x^2+(2ab-1)x+b^2+k=0$$

ここで，$a=0$ のときを考えると，① より $k=b$ つまり $y=k$ が C の接線である。しかしこれは，D の接線にはならず矛盾する。よって，$a \fallingdotseq 0$ である。① が重解をもつとき

$$a^2-4(k-b)=0 \Leftrightarrow b=k-\frac{a^2}{4} \qquad \cdots\cdots\ ③$$

② が重解をもつとき

$$(2ab-1)^2-4a^2(b^2+k)=0 \Leftrightarrow 4a^2k+4ab=1 \qquad \cdots\cdots\ ④$$

③，④ より b を消去して

$$4a^2k+4a\left(k-\frac{a^2}{4}\right)=1 \Leftrightarrow 4ka(a+1)=a^3+1 \qquad \cdots\cdots\ ⑤$$

$a \fallingdotseq -1$ であるから

$$k=\frac{a^3+1}{4a(a+1)}=\frac{a^2-a+1}{4a} \qquad \cdots\cdots\ ⑥$$

また，③ に ⑥ を代入して

$$b=\frac{-a^3+a^2-a+1}{4a}$$

(2) $a=2$ を代入し，

$$\begin{cases} b=-\dfrac{5}{8} \\ k=\dfrac{3}{8} \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

よって $y=2x-\dfrac{5}{8}$ は C，D の共通接線の 1 つである。

⑤，⑦ より

$$4\cdot\frac{3}{8}a(a+1)=(a+1)(a^2-a+1) \Leftrightarrow (a+1)(2a-1)(a-2)=0$$

よって

$$a=-1,\frac{1}{2},2$$

$a=\dfrac{1}{2}$ を (1) で求めた b を a で表した式に代入すると，$b=\dfrac{5}{16}$ であり，接線として $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{16}$ が得られる。

また，$a=-1$，$k=\dfrac{3}{8}$ を ③，④ にそれぞれ代入すると

$$1-4\left(\frac{3}{8}-b\right)=0 \quad \text{よって} \quad b=\frac{1}{8}$$

$$4\cdot\frac{3}{8}-4b=1 \quad \text{よって} \quad b=\frac{1}{8}$$

よって，直線 $y=-x+\dfrac{1}{8}$ も C と D の接線になることがわかる。

以上より，共通接線が 3 本あり，それらの傾きと y 切片は

$$\left(2,-\frac{5}{8}\right),\ \left(\frac{1}{2},\frac{5}{16}\right),\ \left(-1,\frac{1}{8}\right)$$

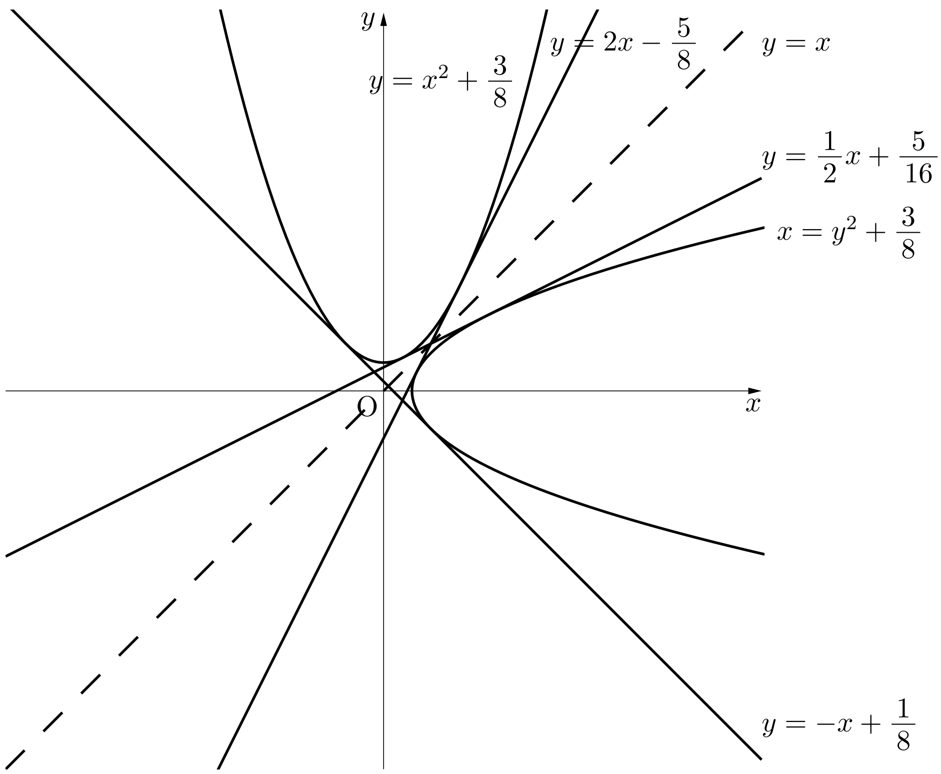
である。

解説

(1) 放物線と直線が接するので，重解条件を用いて条件式をたてればよい。$a\neq 0,-1$ などの条件を忘れないようにしよう。

(2) $a=2$ より，$k=\dfrac{3}{8}$ は問題ないだろう。このとき，⑥ より $a=2,\dfrac{1}{2}$ となることも問題ない (C，D の x と y の入れ替えに対する対称性を考えても $a=\dfrac{1}{2}$ が得られる)。しかし (1) で $a\neq -1$ とされていることに引きずられてしまうと少し手間取ってしまうかもしれない。(なお，$a=0$ の場合はそもそも共通接線が存在しないので考える必要はない。)

参考までに，共通接線が 3 本存在するときのグラフを次に記す。



グラフのとおり，$y = 2x - \dfrac{5}{8}$ と $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{16}$ が $y = x$ に関して対称になっている。

また，$y = -x + \dfrac{1}{8}$ は $y = x$ に関して対称移動させても同じ直線になる。これは，C，D の式

$$C: \quad y = x^2 + k$$

$$D: \quad x = y^2 + k$$

より，C と D は $y = x$ に関して対称であることがわかるので，C と D の共通接線を $y = x$ に関して対称移動させた直線も C と D の共通接線となるからである。ただし，傾きが -1 の直線は，$y = x$ に関して対称移動させても同じ直線である。

別解

(1) 曲線 C 上において $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ より，C 上の点 $(t, t^2 + k)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 + k) = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = 2tx - t^2 + k \ \cdots\cdots \ ①$$

また，曲線 D 上において $\dfrac{dx}{dy} = 2y$ より，D 上の点 $(s^2 + k, s)$ における接線の方程式は

$$x - (s^2 + k) = 2s(y - s) \quad \text{すなわち} \quad x = 2sy - s^2 + k \ \cdots\cdots \ ②$$

①，② が C と D の共通接線になることは

$$y = 2tx - t^2 + k \quad \text{かつ} \quad x = 2sy - s^2 + k$$

が任意の (x, y) において成り立つことと同値である。② に $s = 0$ を代入すると ② $\Leftrightarrow$ $x = k$ となり，これは C の接線にはならない。よって $s \fallingdotseq 0$ であり，このとき，

$$② \Leftrightarrow y = \frac{1}{2s}x + \frac{s}{2} - \frac{k}{2s}$$

となるので，①，② が C と D の共通接線になることは

$$\begin{cases} 2t = \dfrac{1}{2s} & \cdots\cdots ③ \\ -t^2 + k = \dfrac{s}{2} - \dfrac{k}{2s} & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

を満たす $(t, s)(s \fallingdotseq 0)$ が存在することと同値である。③ より，$t = \dfrac{1}{4s}$ である。これを ④ に代入して

$$-\frac{1}{16s^2} + k = \frac{s}{2} - \frac{k}{2s}$$

両辺に $16s^2$ をかけて整理すると

$$8s^3 + 1 - 16ks^2 + 8ks = 0$$

$$(2s + 1)(4s^2 - 2s + 1) - 8ks(2s - 1) = 0$$

$$(2s + 1)\{4s^2 - (8k + 2)s + 1\} = 0$$

よって，(t, s) の満たす条件は

$$\begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ s = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} t = \dfrac{1}{4s} \\ 4s^2 - (8k + 2)s + 1 = 0 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

③ の $\dfrac{(\text{判別式})}{4}$ は $(4k + 1)^2 - 4 = (4k - 1)(4k + 3)$ であることから

(i) $-\dfrac{3}{4} < k < \dfrac{1}{4}$ のとき

共通接線は $y = -x + k - \dfrac{1}{4}$ $\left(t = s = -\dfrac{1}{2}\right)$ のみ

(ii) $k \leqq -\dfrac{3}{4}$ または $k \geqq \dfrac{1}{4}$ のとき

③ の 2 実数解 (重解含む) を α, β として共通接線は

$$y = -x + k - \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1}{2\alpha}x + \frac{\alpha}{2} - \frac{k}{2\alpha} \ \cdots\cdots ⑥, \quad y = \frac{1}{2\beta}x + \frac{\beta}{2} - \frac{k}{2\beta} \ \cdots\cdots ⑦$$

である。ただし，重複含む。

よって，直線 $y = ax + b\ (a \fallingdotseq -1)$ が共通接線のとき，$a = \dfrac{1}{2\alpha}$ または $a = \dfrac{1}{2\beta}$ であり，⑤ は ④ において α を β にしたものなので，$a = \dfrac{1}{2\alpha}$ の場合のみ考えればよい。このとき，

$$③ \Leftrightarrow 4\alpha^2 - (8k+2)\alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha + 1}{8\alpha} \quad (\alpha \fallingdotseq 0 \text{ より})$$

すなわち

$$k = \frac{a^2 - a + 1}{4a}$$

であり，

$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha}{2} - \frac{k}{2\alpha} \\ &= \frac{1}{4a} - \frac{a^2 - a + 1}{4} \\ &= \frac{-a^3 + a^2 - a + 1}{4a} \end{aligned}$$

となる。

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するのは，$k \leqq -\dfrac{3}{4}$ または $k \geqq \dfrac{1}{4}$ のときで，⑤ は ④ において，α を β にしたものなので，$\dfrac{1}{2\alpha} = 2 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{4}$ とする。このとき，③ において，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{4k+1}{2} \\ \alpha\beta = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ k = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$

となり「$k \leqq -\dfrac{3}{4}$ または $k \geqq \dfrac{1}{4}$」を満たす。よって共通接線の傾きと y 切片は

$$\left(2, -\frac{5}{8}\right),\ \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{16}\right),\ \left(-1, \frac{1}{8}\right)$$

別解解説

(1) 微分法を用いて C と D の接線の方程式を表して，その 2 つが任意の (x, y) で一致するとき，それらは共通接線となることを用いた。こちらの解法も使えるようにしたい。

(2) (1) で接線の方程式を k によって場合分けして求めていれば，代入するだけの簡単な問題である。

（青木徹，不死原大知）

2017年度 東京大学 前期 数学

第6問　辺の通過領域の求積

出題範囲	積分 (数学Ⅲ)
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	(1) が適切な誘導になっており，難易度としても標準的な，立体の体積に関する積分計算の問題である。断面の図を有効に活用して立式し，計算ミスがないように落ち着いて解き進めたい。

解答

(1) △OPQ が正三角形であることと，Q$(0,0,1)$ から，点 P は中心 $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の，平面 $z=\frac{1}{2}$ 上の円周上をくまなく動く。よって，実数 $\varphi\,(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ を用いて，$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi, \frac{1}{2}\right)$ とおくことができる。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = 1, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$$

より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$$

ここで $\cos\varphi$ は $-1 \leqq \cos\varphi \leqq 1$ の範囲を動くので，$\cos\theta$ は $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ の範囲を動く。$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ なので，θ がとりうる範囲は

$$30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$$

である。

(2) 点 Q は，平面 $x=0$ 上の原点を中心とした[1]半径 1 の円周上を動く。そのときの辺 OP の通過しうる領域は，Q が $(0,0,1)$ にあるときの辺 OP の通

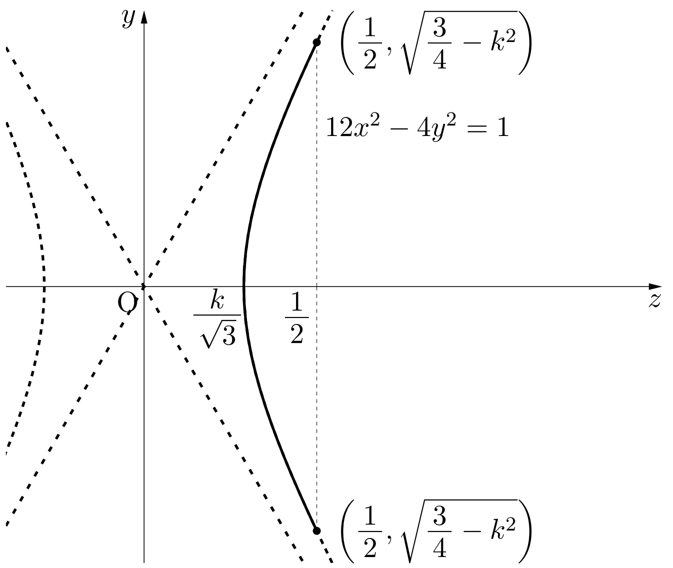
[1] $\mathrm{OQ}=1$ が保たれているからである。

過しうる領域を，x 軸を中心として 360° 回転させたときの通過領域に等しい。

(1) における辺 OP の通過しうる領域は円錐の側面で，その方程式は，平面 $z = t\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ の断面を考えることで

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3t^2 \\ z = t \end{cases}$$

と表される。この円錐面の $x = k$ による断面は，以下に示す双曲線 $3z^2 - y^2 = k^2$ の $0 \leqq z \leqq \dfrac{1}{2}$ の部分となる。



この双曲線上の点と原点の距離の最大値は $\sqrt{1-k^2}$，最小値は $\dfrac{k}{\sqrt{3}}$ なので，これを x 軸を中心として回転させて得られる図形は，中心が等しい半径が $\sqrt{1-k^2}$ と $\dfrac{k}{\sqrt{3}}$ の 2 つの円に挟まれた領域となる。その領域の面積を $S(k)$ として，

$$\begin{aligned} S(k) &= \pi\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2 - \pi\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= \pi\left(1 - \frac{4}{3}k^2\right) \end{aligned}$$

となる。

求める体積 V は $S(k)$ を k について $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ まで積分したもの

で，yz 平面について対称であることを利用して

$$\begin{aligned}V &= 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} S(k)\,dk \\ &= 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk \\ &= 2\pi\left[k-\frac{4}{9}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= 2\pi\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right\} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\end{aligned}$$

解説

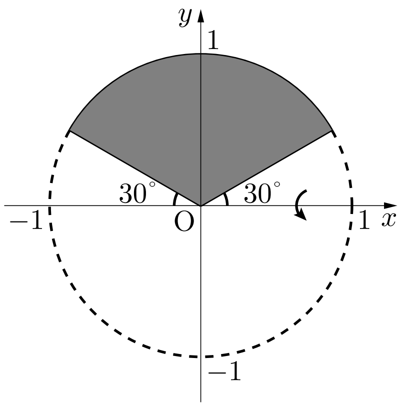
(1) 図をかいてみれば，点 Q は解答で示したように，「$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ かつ $z=\frac{1}{2}$」上を動くことは容易にわかるので，確実に得点したい。また，問題文では，角度が度数法で与えられているので，解答も度数法で表記するのがよいだろう。

(2) 点 Q が yz 平面上で原点を中心とした半径 1 の円周上を動くことに注意しよう。求める立体が，点 Q が (0,0,1) にあるときの辺 OP の通過領域を x 軸を中心に 360° 回転させたものであることに気づくのがポイントである。求める立体が回転体のときは，中心軸に垂直に立体を切って，断面積を求めて，積分するという定石で解くことができる。

別解

(2) まず，点 Q が $x=0$ 上（yz 平面上）を動くという条件がないときを考える。

このとき，点 P は OP$=1$ という条件のみのもとで動くので，OP の通過しうる範囲は原点を中心とした半径 1 の球である。



(1) より点 Q が yz 平面上で点 (0,0,1) を中心とした単位円上を動くとき，点 P は $30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$ を動く。よって求める立体は網掛部の扇形を x 軸まわりに回転した図形となることがわかる。（上図）

その体積は球の一部 V から，三角錐 W (底面の円の半径$\frac{1}{2}$，高さは

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$) を二つ引けばよい。

それぞれの体積は

$$V:\quad \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1-x^2)\pi\,dx = \pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi$$

$$W:\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi$$

よって K の体積は

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{24}\pi = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

別解解説

解答 で，体積を求める立体 K は原点を頂点とする高さが $\dfrac{1}{2}$ の円錐を x 軸を中心として回転させた立体だと述べた。**解答** では，断面積を求めて積分したが，この解答では，K がどのような立体になるかをあらかじめ考えることで，計算を簡単にしている。こちらの方法もマスターしたい。

（沈有程，不死原大知）