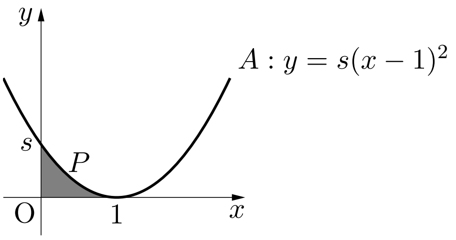
2017年度 東京大学 前期 数学

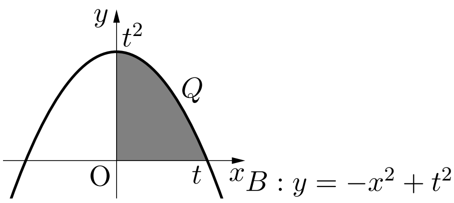
第1問　放物線と面積

出題範囲	2 次関数／微分／積分
難　易　度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	例年通り 2 次関数に関する問題が出題された。面積の計算や微分の計算が複雑だったり手数が多かったりするものの，やるべきことは一本道である。計算ミスをせずに素早く解答したい。

解答

放物線 A，B の概形は次図のようになる。





$$A : y = s(x-1)^2 \quad (s > 0)$$

$$B : y = -x^2 + t^2 \quad (0 < t < 1)$$

A と B がただ 1 点を共有するのは連立方程式

$$\begin{cases} y = s(x-1)^2 \\ y = -x^2 + t^2 \end{cases}$$

がただ 1 つの解をもつときである。

$$\begin{cases} y = s(x-1)^2 \\ y = -x^2 + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = s(x-1)^2 \\ s(x-1)^2 = -x^2 + t^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = s(x-1)^2 \\ (s+1)x^2 - 2sx + s - t^2 = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

$s > 0$ より，$s + 1 \neq 0$ なので，① は x についての 2 次方程式である。よって，

① の判別式を D とすると，A と B がただ 1 点を共有するのは $D = 0$ となると

きである。[1]

すなわち

$$\frac{D}{4}=0 \Leftrightarrow s^2-(s+1)(s-t^2)=0$$

$$\Leftrightarrow -s+st^2+t^2=0$$

$0<t<1$ より $1-t^2 \neq 0$ であるから

$$s=\frac{t^2}{1-t^2} \qquad \cdots\cdots ②$$

これは $s>0$ を満たす。次に P と Q を求める。

$$\begin{aligned} P &= \int_0^1 s(x-1)^2\,dx \\ &= s\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1 \text{[2]} \\ &= \frac{1}{3}s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^t (-x^2+t^2)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+t^2x\right]_0^t \\ &= \frac{2}{3}t^3 \end{aligned}$$

よって

$$\frac{Q}{P}=\frac{\frac{2}{3}t^3}{\frac{1}{3}s}=\frac{2t^3}{\frac{t^2}{1-t^2}}=2t\left(1-t^2\right)$$

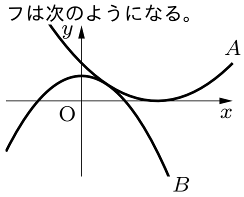
$f(t)=2t\left(1-t^2\right)$ とおく。$f(t)$ を t で微分して

$$f'(t)=2-6t^2=-6\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

よって，$0<t<1$ における $f(t)$ の増減表は次の通りである。

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(0)	$\nearrow$	極大	$\searrow$	(0)

[1] このときの，A と B のグラフは次のようになる。



[2] 積分の公式

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$$

より

$$\int_0^1 (x-1)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1$$

と計算することもできる。

増減表より $f(t) = \dfrac{Q}{P}$ は $t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$s = \dfrac{1}{2}$ のとき最大となり，その値は

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

以上より，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値は

$$\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

解説

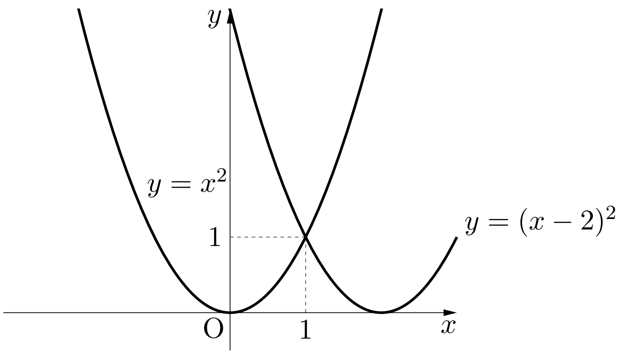
P，Q を計算するのは容易だろう。一般に放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ がただ 1 点を共有するのは，その連立方程式がただ 1 つの実数解（重解含む）をもつときである。特に，重解をもつときに $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は接する。

連立方程式が重解をもたない場合の例として，$y = x^2$ と $y = (x-2)^2$ を連立すると

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = (x-2)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ -4x + 4 = 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots ③$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

となる。③ は重解をもたないので，$y = x^2$ と $y = (x-2)^2$ はただ 1 点 $(1, 1)$ で共有点をもつが，接しない。



また，**解答** で $\displaystyle\int_0^1 (x-1)^2\,dx$ の計算をしたが，これは

$$\int_0^1 (x-1)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1$$

と計算することができる。

一般に，n を自然数として

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つことを示す。

【証明】$f(x)=(ax+b)^{n+1}$ ($a \neq 0$，n は自然数) とおくと

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

である。ここで

$$\begin{aligned}
f(x+h)&=\{a(x+h)+b\}^{n+1}\\
&=\{(ax+b)+ah\}^{n+1}\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k(ax+b)^{n+1-k}(ah)^k
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k(ax+b)^{n+1-k}(ah)^k-(ax+b)^{n+1}}{h}\\
&=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k(ax+b)^{n+1-k}(ah)^k}{h}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k(ax+b)^{n+1-k}a^kh^{k-1}\\
&=a(n+1)(ax+b)^n+\sum_{k=2}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k(ax+b)^{n+1-k}a^kh^{k-1}
\end{aligned}$$

よって，$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=a(n+1)(ax+b)^n$ が成立するので

$$\begin{aligned}
\int(ax+b)^n\,dx&=\int\frac{1}{a(n+1)}f'(x)\,dx\\
&=\frac{1}{a(n+1)}f(x)+C\quad(C\text{ は積分定数})\\
&=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C
\end{aligned}$$

が成立する。 (証明終)

別解

$-s+st^2+t^2=0$ を計算するところまでは **解答** と同じ。

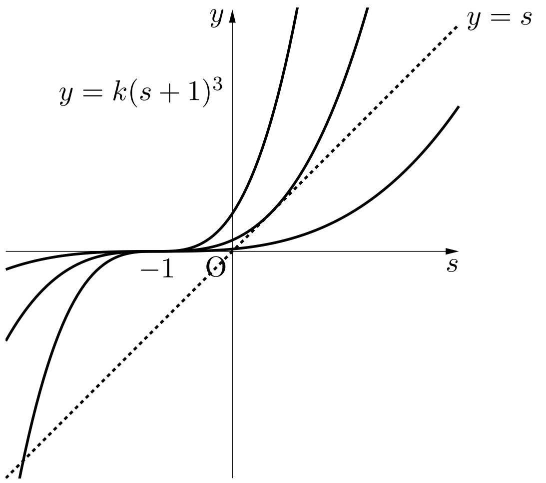
$-s+st^2+t^2=0$ を t について解くと，$t>0$，$s>0$ より $t=\sqrt{\dfrac{s}{s+1}}$

$\dfrac{s}{s+1} = 1 - \dfrac{1}{s+1}$ より，$s > 0$ のとき $0 < \dfrac{s}{s+1} < 1$ となるので，$0 < t < 1$ を満たす。

$$\begin{aligned}\frac{Q}{P} &= \frac{\frac{2}{3}t^3}{\frac{1}{3}s} \\ &= \frac{2}{s+1}\sqrt{\frac{s}{s+1}} \\ &= 2\sqrt{\frac{s}{(s+1)^3}} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{s}{(s+1)^3}$ が最大のとき，$\dfrac{Q}{P}$ が最大となるので，$k = \dfrac{s}{(s+1)^3}(k > 0)$ ……② として，k の最大値を求める。② $\Leftrightarrow k(s+1)^3 = s$ となる。

$y = k(s+1)^3\ (k > 0)$ と $y = s$ のグラフは次のようになる。



よって，$y = k(s+1)^3$ のグラフの形状から，k が最大になるのは，$y = k(s+1)^3$ と $y = s$ が $s > 0$ の領域で接するときだとわかる。

$y = k(s+1)^3$ を s で微分すると，$y' = 3k(s+1)^2$ なので，点 $(a, k(a+1)^3)(a > 0)$ における接線の方程式は

$$y - k(a+1)^3 = 3k(a+1)^2(s-a)$$

$$y = 3k(a+1)^2 s - k(a+1)^2(2a-1)$$

よって，$y = s$ が $y = k(s+1)^3$ に接するとき

$$\begin{cases} 3k(a+1)^2 = 1 \\ k(a+1)^2(2a-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ k = \dfrac{4}{27} \end{cases} \qquad (a > 0,\ k > 0 \text{ より})$$

以上より，k の最大値は $\dfrac{4}{27}$ となるので，$\dfrac{Q}{P} = 2\sqrt{k}$ の最大値は

$$2\sqrt{\frac{4}{27}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

別解解説

解答 では $-s+st^2+t^2=0$ を s について解いたが，**別解** では t について解いた。計算量が増えているが，この方法も知っておきたい。

（森本亮太，松岡駿，不死原大知）

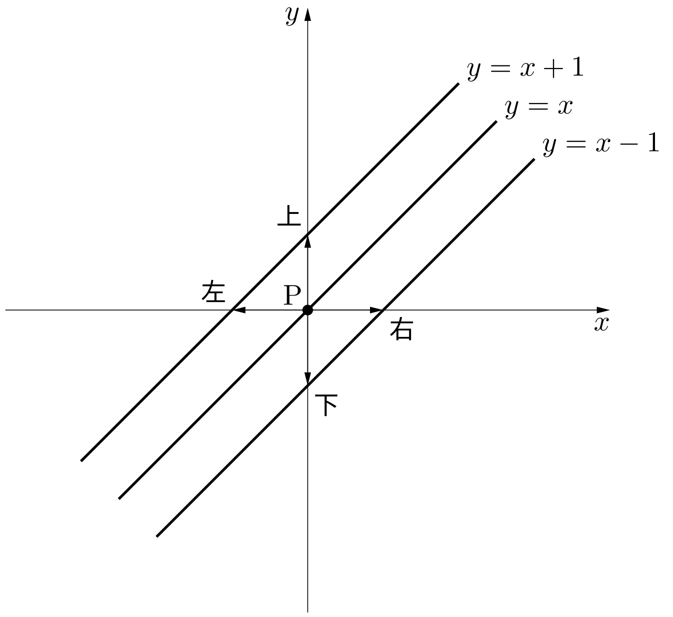
2017 年度 東京大学 前期 数学

第 3 問　ランダムウォークの確率

出題範囲	確率
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	x 座標，y 座標がどのように 1 増加，1 減少すれば $y=x$ 上にたどりつくのかという方針では，計算が煩雑になってしまう。したがって，どのように座標上の格子点を移動するかではなく，傾き 1 で切片が整数である直線群を考えたとき，どのように切片が 1 だけ異なる直線に移動するかを考察した方がよい。ほかの文科の問題よりも簡単であるから，完答して確実に得点したいところである。

解答

簡単のため，図のように，点 P の移動を「上」「下」「左」「右」で表すことにする。



(1) 最初から 1 秒後の点 $\mathrm{P}(s,t)$ の座標について，$t-s=-1$ となるのは，「下」または「右」($(0,-1)$ または $(1,0)$) に移動した場合であり，その確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

(2) 点 P が最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にあるのは

「下」または「右」に 3 回

「上」または「左」に 3 回

に移動した場合であり，その確率は

$$ {}_6\mathrm{C}_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16} $$

解説

(1) は必ず正解したい問題である。(2) は，別解のように，直線 $y=x$ 上の各点をとる確率を場合分けして求めてもよい。しかし，計算が煩雑であり，かつ場合分けを見落とす可能性もある。「下」または「右」に移動すると，y 切片が 1 だけ小さく，傾きが等しい直線上へ移動し，「上」または「左」に移動すると，y 切片が 1 だけ大きく，傾きが等しい直線上へ移動するという発想ができるとよいだろう。

別解

(2) 6 秒後に点 P が到達できる $y=x$ 上の点は，

$(\pm 3, \pm 3)$，$(\pm 2, \pm 2)$，$(\pm 1, \pm 1)$，$(0,0)$ (複号同順) の 7 点のみである。

以下，上に a 回，下に b 回，右に c 回，左に d 回移動することを (a,b,c,d) と表す。

6 秒後に点 (x,y) にいるとき

$$ \begin{cases} a-b=x \\ c-d=y \\ a+b+c+d=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+x \\ c=d+y \\ 2(b+d)+(x+y)=6 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdot \text{①} $$

が成り立つ。b，d が負でない整数であることに注意して

(i) 6 秒後に (3,3) にいる場合

$$ \text{①} \Leftrightarrow b+d=0 \quad \text{すなわち} \quad b=d=0 $$

であるから，(3,0,3,0) のみである。このときの確率は

$$ {}_6\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{4}\right)^6 = 20\left(\frac{1}{4}\right)^6 $$

(ii) 6 秒後に (2,2) にいる場合

$$ \text{①} \Leftrightarrow b+d=1 \quad \text{すなわち} \quad (b,d)=(1,0),\ (0,1) $$

であるから，(3,1,2,0)，(2,0,3,1) の 2 通り存在する。このときの確率は

$$ \frac{6!}{3!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 + \frac{6!}{2!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = 120\left(\frac{1}{4}\right)^6 $$

(iii) 6 秒後に (1,1) にいる場合

$$① \Leftrightarrow b+d=2 \quad \text{すなわち} \quad (b,d)=(0,2),\ (1,1),\ (2,0)$$

であるから，(1,0,3,2)，(2,1,2,1)，(3,2,1,0) の 3 通り存在する。このときの確率は

$$\frac{6!}{2!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{3!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=300\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

(iv) 6 秒後に (0,0) にいる場合

$$① \Leftrightarrow b+d=3 \quad \text{すなわち} \quad (b,d)=(0,3),\ (1,2),\ (2,1),\ (3,0)$$

であるから，(0,0,3,3)，(1,1,2,2)，(2,2,1,1)，(3,3,0,0) の 4 通り存在する。このときの確率は

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^6=400\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

点 P が 6 秒後に $(-3,-3)$，$(-2,-2)$，$(-1,-1)$ にある確率は，対称性からそれぞれ $(3,3)$，$(2,2)$，$(1,1)$ にある確率に等しく，(i)(ii)(iii)(iv) は互いに排反なので求める確率は

$$\{2\cdot(20+120+300)+400\}\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{5}{16}$$

別解解説

(2) 愚直に書き出すときに文字式を用いれば，数え漏れはなくなるだろう。$\left(\frac{1}{4}\right)^6$ はすべての場合分けで出てくることは想定できるので，最後に計算するほうが楽である。

（沈有程，江崎ゆり子，鈴木陽大，岩本篤士）

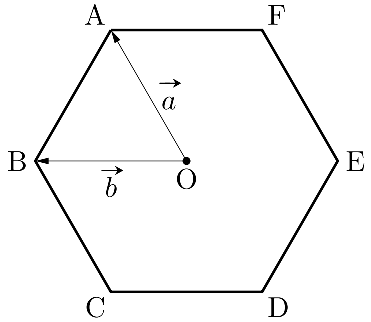
2017 年度 東京大学 前期 数学

第 2 問　分点の存在領域

出題範囲	図形と方程式／ベクトル
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	まず，ベクトルをおいて解き進めると楽であるということに気づくとよい。問題で与えられた条件のとおりに変数を定め，点 R のとりうる位置を求めればよい。変数が 2 つ出てくるが，慌てず冷静に考えよう。少し式変形が煩わしいが，丁寧に計算を進めてミスなく解答したい。

解答

正六角形 ABCDEF の中心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。



s を $0 \leqq s \leqq 1$ を満たす実数とする。点 P が辺 AB を $s:(1-s)$ に内分するとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$$

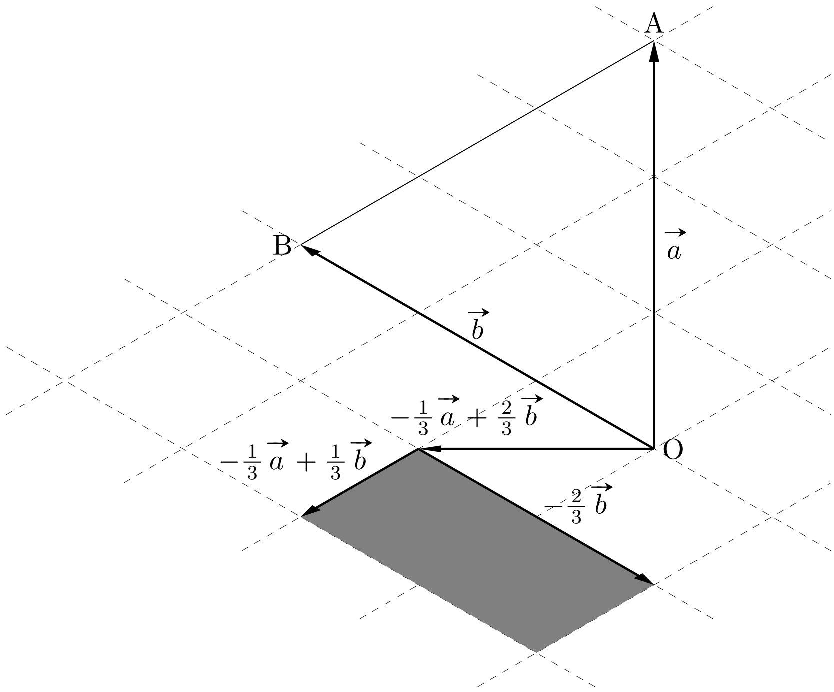
また，t を $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数とする。点 Q が辺 CD を $t:(1-t)$ に内分するとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=(1-t)(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$
$$=-\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

点 R は線分 PQ を 2 : 1 に内分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\right\}+\frac{2}{3}\left\{-\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right\}$$
$$=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+s\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+t\left(-\frac{2}{3}\vec{b}\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

① において，s を $0 \leqq s \leqq 1$，t を $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲でそれぞれ独立に動かすと，点 R は次図の網掛部の周および内部を通りうる。



$$\left|-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right|=\frac{1}{3}\left|-\vec{a}+\vec{b}\right|=\frac{1}{3}$$

$$\left|-\frac{2}{3}\vec{b}\right|=\frac{2}{3}\left|\vec{b}\right|=\frac{2}{3}$$

$-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ と $\dfrac{2}{3}\vec{b}$ のなす角は $\dfrac{2}{3}\pi$ であるから，求める面積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

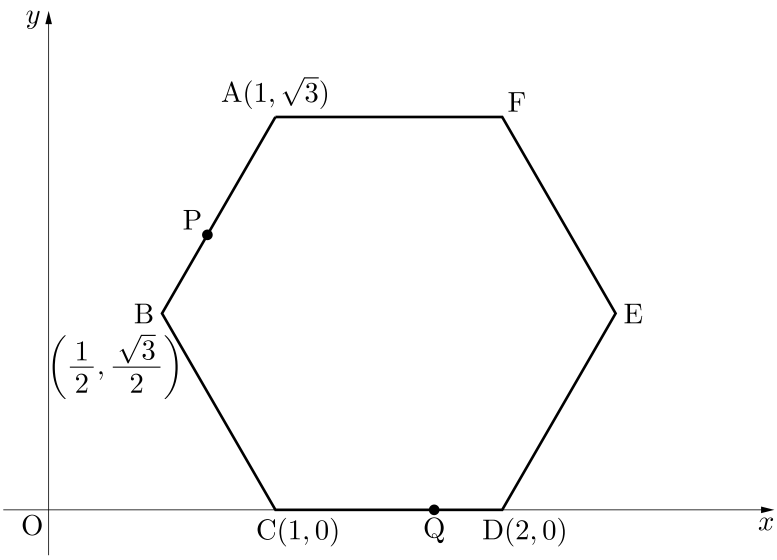
解説

点 R が動く領域を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と s, t を用いて表した解法である。

領域を求める問題は，いわゆる逆像法によって解くことが多い。しかし，今回の問題のように，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の動きを直接考えることで，領域を求められることもある。

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の式を s, t について整理し，点 R の動きを図形的に解釈する手法は重要であるから，覚えておこう。

別解



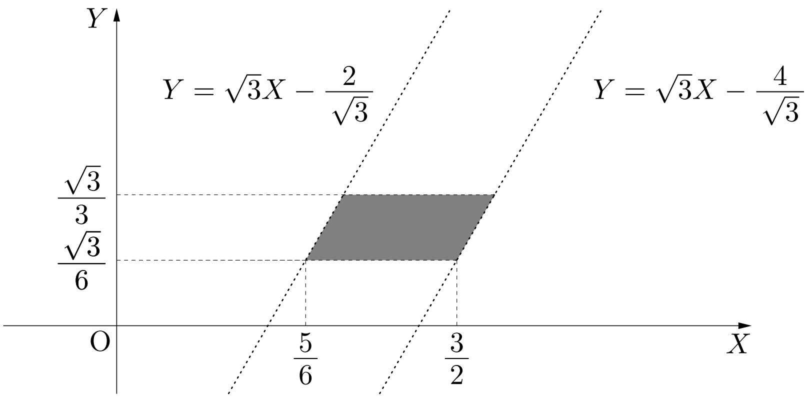
上図のような座標平面を設定すると，点 P の座標は $(s, \sqrt{3}s)$ $\left(\frac{1}{2} \leqq s \leqq 1\right)$，点 Q の座標は $(t, 0)$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ とおくことができる。よって，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R の座標を (X, Y) とおくと

$$\begin{cases} X = \dfrac{s+2t}{3} \\ Y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \sqrt{3}Y \\ t = \dfrac{3}{2}X - \dfrac{\sqrt{3}}{2}Y \end{cases}$$

となる。$\frac{1}{2} \leqq s \leqq 1$，$1 \leqq t \leqq 2$ より，$\mathrm{R}(X, Y)$ の動く領域は XY 平面上で

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \leqq \sqrt{3}Y \leqq 1 \\ 1 \leqq \dfrac{3}{2}X - \dfrac{\sqrt{3}}{2}Y \leqq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{6} \leqq Y \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{3}X - \dfrac{4}{\sqrt{3}} \leqq Y \leqq \sqrt{3}X - \dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

となる。これを図示すると，次の網掛部の周および内部である。



よって，点 R が動く領域は底辺が $\dfrac{2}{3}$，高さが $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ の平行四辺形であるから，求める面積は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

である。

別解解説

ベクトルではなく座標平面を使った解法を示した。座標平面を使うときは，どこを原点にすれば計算が楽になるかを考えて座標を設定しよう。

（江崎ゆり子，不死原大知，辻啓吾）

2017年度 東京大学 前期 数学

第4問　数列とユークリッドの互除法

出題範囲	数列／整数の性質
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	(1)～(3) は易しく，ここまでは東大受験生ならばサクサクと解答していきたい。(4) は頭のひねりどころで，差がつく問題であったと思われる。整数問題に多くふれてきた受験生ならば，漸化式の形を割り算の商と余りという形に捉えることで，ユークリッドの互除法により簡単にすませることができただろう。ユークリッドの互除法が思いつかなくとも，別解のように定石に則って考える力も必要である。

解答

(1) $p = 2 + \sqrt{5}$ なので

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{2+\sqrt{5}} = -\frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = 2-\sqrt{5}$$

$q = 2 - \sqrt{5}$ とおくと

$$a_n = p^n + q^n$$

$$p + q = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 4$$

$$pq = (2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) = -1$$

よって

$$a_1 = p + q = 4$$

$$a_2 = p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 16 - 2\cdot(-1) = 18$$

(2) $n \geqq 2$ において

$$\begin{aligned} a_1 a_n &= (p+q)(p^n + q^n) \\ &= p^{n+1} + q^{n+1} + pq(p^{n-1} + q^{n-1}) \\ &= a_{n+1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

(3)【証明】$a_1 = 4$ より，(2) から漸化式

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n \quad (n \geqq 1)$$

が得られる。

すべての自然数 n について，a_n が自然数であることを数学的帰納法により示す。

(i) $n=1,\ 2$ のとき

$a_1=4$，$a_2=18$ ゆえ，自然数である。

(ii) $n=k$，$k+1$ のときに a_k，a_{k+1} が自然数であると仮定すると

$$a_{k+2}=4a_{k+1}+a_k$$

なので，a_{k+2} は自然数である。

(i)(ii) より，数学的帰納法から，題意が示された。 (証明終)

(4) 漸化式

$$a_{n+2}=4a_{n+1}+a_n$$

において，漸化式より，全ての自然数に対し $a_n>0$ であり $a_2>a_1$ であることから，任意の自然数 n について $a_{n+1}>a_n$ が成り立つ。したがって，a_{n+2} を a_{n+1} で割った余りが a_n であるとみなせる。よって，ユークリッドの互除法の考え方から

「a_{n+2}と a_{n+1}の最大公約数」$=$「a_{n+1}と a_nの最大公約数」

これを繰り返すと，

「a_{n+1}と a_nの最大公約数」$=$「a_2と a_1の最大公約数」

が成り立つ。a_2 と a_1 の最大公約数は，18 と 4 の最大公約数であるから，求める値は 2 である。

解説

(1) ここで，計算ミスすると，後続の問題すべてに影響するので，見直しをしっかりしよう。

(2) 対称式の処理という意味で，典型問題である。何度も経験したことがあるだろう。

(3) a_n の直接の定義から，すべての自然数において a_n が自然数であることを示すのは難しい。(2) で求めた漸化式によって，a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n と順番に決まっていくことに気がつけば，数学的帰納法を思いつくのは難しいことではない。

(4) ユークリッドの互除法が思いつけば易しい問題である。しかし，漸化式をみて，すぐに互除法を思いつくのは難しかったかもしれない。しかし，定石どおり，a_{n+1} と a_n の最大公約数を G とおき

$$a_{n+1}=aG,\ a_n=bG\quad (a \text{ と } b \text{ は互いに素な自然数})$$

として，漸化式に代入すると，a_{n-1} も G を公約数にもつことがわかる。ここで，ユークリッドの互除法の問題を解いたことがあれば，互除法に気づくことができるだろう。

また，任意の自然数 n について $a_{n+1} > a_n$ であることを示さなければいけないことに注意しよう。余りは割る数より小さいからである。

互除法に気づけなくても，漸化式で n，$n-1$，$n-2$，$\cdots$，2，1 と下っていけば G を求めることができる。その方法は 別解 で示した。

別解

(4) a_{n+1} と a_n が最大公約数 G をもつとする。このとき，$n \geqq 2$ において $a_{n-1} = a_{n+1} - 4a_n$ より，a_{n-1} も G を公約数にもつので，G は a_n と a_{n-1} の公約数となっている。

これを繰り返すことで，G は a_2 と a_1 の公約数であることが分かる。$a_1 = 4, a_2 = 18$ より，$G = 1$ または 2 に限られる。漸化式より，$n \geqq 3$ において a_n は偶数と偶数の和となるので，常に偶数である。よって，a_n はすべての n に対し偶数である。したがって

$$G = 2$$

である。

別解解説

漸化式の n の値を小さくしていって最大公約数を求める解法を示した。本質的には互除法と全く同じことをしているのがわかるだろう。

（不死原大知，佐藤賢志郎）