2016 年度 東京大学 前期 物理

第 1 問　二体問題

出題範囲	二体問題
難易度	★★★★☆
所要時間	30 分
傾向と対策	この年は例年に比べて問題量が多かった。他の科目との兼ね合いも考えると，全問題を解くのは時間的に厳しいように思われる。本番では問題を見極めて確実に得点できるところから攻めていこう。 第 1 問は小球が落下した後にぶつかる二体問題。反発係数が 1 となっているため計算はやや楽になっている。運動量保存，反発係数の式，エネルギー保存の式から答えを導いていく。 Ⅰは小球どうしがつながれていない基本問題。計算ミスに注意。(2) は，大きいスーパーボールの上に小さいスーパーボールを乗せて落下させると，上に乗せた小さいスーパーボールが初めの高さよりもかなり高くまで跳ね上がる現象のモデル。この現象を知っていると答えが意外と大きいことも予想できる。 Ⅱでは小球どうしが糸でつながれている。現象の途中まではⅠと同じだが，糸が張ると小球間に引き合う力（張力）が瞬間的に発生する。(3) はグラフを選ばせる問題だがやや難しい。グラフの意味を読みとりつつ，衝突前後の状態を整理して照らし合わせると間違えにくい。 Ⅲでは小球どうしがゴムでつながれている。Ⅱとの大きな違いは，ゴムにエネルギーが蓄えられることと，ゴムの弾性力によって小球の速度が連続的に変化することである。ゴムの弾性エネルギーの存在を忘れてはいけない。(3) では単振動（の一部）を考えるが，同じような問題を一度解いていないとなかなか難しい。運動方程式を立てて地道に解くのが確実だろう。

解説

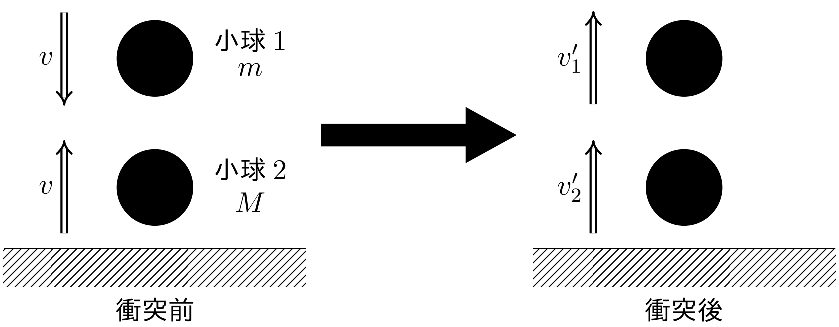
Ⅰ

(1)

反発係数の定義より，

$$-\frac{v_2' - v_1'}{v - (-v)} = 1$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{v_1' - v_2' = 2v}$$



(2)

運動量保存則より，

$$-mv + Mv = mv_1' + Mv_2'$$

(1) より，$v_2' = v_1' - 2v$ を代入して，

$$-mv + Mv = mv_1' + M\left(v_1' - 2v\right)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{v_1' = \frac{3M - m}{M + m}v}$$

よって，

$$\boldsymbol{v_2'} = v_1' - 2v \boldsymbol{= \frac{M - 3m}{M + m}v}$$

また，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}m{v_1'}^2 = mgH$$

また，M が m に比べて十分に大きいとき，

$$v_1' = \frac{3 - \dfrac{m}{M}}{1 + \dfrac{m}{M}}v \fallingdotseq 3v$$

したがって，

$$\frac{H}{h} = \left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 = 9$$

であるから，H は h の **9** 倍。

II

(1)

重心速度の定義より，

$$\boldsymbol{V} = \frac{mv_1 + 3m \cdot 0}{m + 3m} \boldsymbol{= \frac{1}{4}v_1}$$

◆ **Column**

重心運動

位置 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ にある，それぞれの質量が $m_1, m_2, \cdots, m_n$ の物体からなる系の重心の位置 x_{G} は，

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

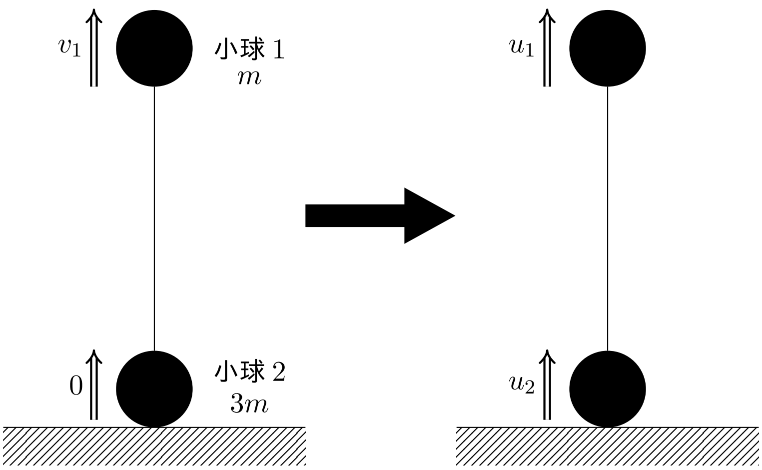
である。

$\dfrac{dx}{dt}$ を $\dot{x}$ と表す。重心速度 v_{G} は，各物体の速度を $v_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とすると，

$$v_{\mathrm{G}} = \dot{x}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 + \cdots + m_n\dot{x}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 + \cdots + m_nv_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

である。外力がはたらかないときは，運動量保存則より，重心速度は一定となる。

(2)



本文より，糸がたるむ前後で力学的エネルギー保存則が成り立つから，

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 + \frac{1}{2}\cdot 3m\cdot 0 = \frac{1}{2}m{u_1}^2 + \frac{1}{2}\cdot 3m\cdot {u_2}^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

糸がたるむ前後において，系には外力である重力がはたらいているが，微小時間の変化を考えているので，運動量保存則が成り立つとしてよい。よって，

$$mv_1 + 3m\cdot 0 = mu_1 + 3mu_2$$

$$\therefore\ \ u_1 = v_1 - 3u_2$$

①に代入して，

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 = \frac{1}{2}m\left(v_1 - 3u_2\right)^2 + \frac{3}{2}m{u_2}^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mu_2\left(12u_2 - 6v_1\right) = 0$$

$u_2 > 0$ であるから，

$$\boldsymbol{u_2 = \frac{1}{2}v_1}$$

よって，

$$\boldsymbol{u_1} = v_1 - 3 \cdot \frac{1}{2}v_1 \boldsymbol{= -\frac{1}{2}v_1}$$

（別解）

ひもが引っ張られて 2 つの球の速度が変わることは，2 つの球の衝突と捉えることができる。これは，球が衝突するときに与え合う力がひもの張力に置き換わっていると考えるとわかりやすい。さらに，この「衝突」の反発係数は，エネルギーが保存されるとあることから 1 であるとわかる。

したがって，立てられる式は，

$$v_1 - 0 = (-1) \times (u_1 - u_2)$$

である。

この式と，運動量保存の式を連立させても同様の解答が得られる。

(3)

$t = -0$（「衝突」直前）において，小球 1，2 の速度はそれぞれ v_1 (> 0)，0 であり，重心速度はⅡ (1) より $V = \dfrac{1}{4}v_1$ である。

また，$t = +0$（「衝突」直後）においては，小球 1，2 の速度はⅡ (2) よりそれぞれ $u_1 = -\dfrac{1}{2}v_1$ (< 0)，$u_2 = \dfrac{1}{2}v_1$ (> 0) であり，糸がたるむ前後で，系に外力は作用しない（微小時間を考えるので力積が 0 である）ので，重心速度は変化しない。実際，糸がたるんだ直後の重心速度を V' とすると，

$$V' = \frac{mu_1 + 3mu_2}{m + 3m} = \frac{1}{4}v_1 = V$$

よって，確かに重心速度は糸がたるむ前後で変化せず，グラフは $t = 0$ において連続である。

また，$t<0$ においては小球 1 のみに負の加速度（重力加速度）がはたらき，$t>0$ においてはそれぞれの小球に負の重力加速度がはたらく。したがって，重心の加速度は $t<0$ のときより $t>0$ のときのほうが小さくなる。

以上より，適切なグラフは **イ** である。

（別解）

小球 1，2 の速度の符号や，重心の加速度を考えずとも，重心速度の特徴さえつかんでいればグラフは絞れる。

衝突前か衝突後かによらず，小球 1 の速度を w_1，小球 2 の速度を w_2，重心速度を w_{G} で表す。このとき重心速度の定義から，

$$w_{\mathrm{G}}=\frac{mw_1+3mw_2}{m+3m}=\frac{w_1+3w_2}{4}$$

が成り立つ。これは，衝突の前にも後にも，w_{G} の値は，w_1 の値と w_2 の値を $3:1$ に内分したものであることを示している。よって，グラフ全体にわたって，重心速度の直線が，小球 1 と小球 2 の直線を $3:1$ に内分した場所にひかれているイが答えとなる。

III

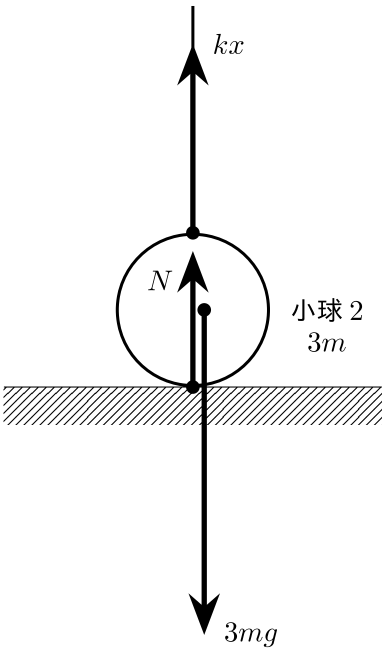
本文より，ゴムは，たるんでいるときにはその存在が無視でき，自然長から伸びているときにはばね定数 k のばねと同様に扱えばよい。

(1)

ゴムの自然長からの伸びを x とする。

$x \leqq \Delta l$ のとき，小球 2 が床から受ける垂直抗力を N とすると，次のように力がつり合うため，小球は浮き上がらない。

$$kx+N-3mg=0 \qquad \cdots\cdots ②$$



このとき，N は x の増加とともに小さくなっている。

x が増加を続け，$x=\Delta l$ のとき，$N=0$ となる。これが小球が浮き上がる瞬間である。

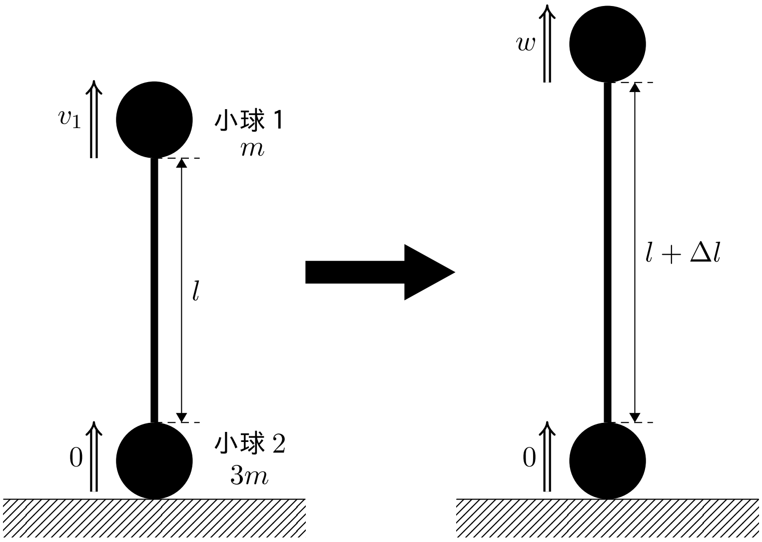
x がさらに増加を続け，$x>\Delta l$ となると，運動方程式より，小球 2 に加速度がはたらき，床から浮き上がる。

したがって，浮き上がる瞬間については式 ② に $N=0$ を代入して，

$$k\varDelta l - 3mg = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\varDelta l = \frac{3mg}{k}}$$

(2)



重力による位置エネルギーの基準点を床からの高さが l の点に取ると，系全体の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 - 3mgl = \frac{1}{2}mw^2 + mg\varDelta l - 3mgl + \frac{1}{2}k(\varDelta l)^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \frac{1}{2}mw^2 + mg\varDelta l + \frac{1}{2}k(\varDelta l)^2$$

移項して III (1) の解答を代入すると，

$$\frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 - mg\cdot\frac{3mg}{k} - \frac{1}{2}k\left(\frac{3mg}{k}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{15(mg)^2}{2k}$$

$$\therefore \quad w^2 = {v_1}^2 - \frac{15mg^2}{k}$$

いま，小球 1 は上方向に運動するため，$w>0$ である。よって，

$$\boldsymbol{w = \sqrt{{v_1}^2 - \frac{15mg^2}{k}}}$$

また，小球 2 が床から浮き上がるためには，（1）より，ゴムの自然長からの伸びが Δl より大きくなることが必要であるから，$w > 0$ であればよい。すなわち，$w^2 > 0$ が必要。このとき，

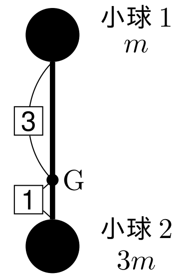
$$v_1{}^2 - \frac{15mg^2}{k} > 0$$

$$\therefore \quad k > \frac{15mg^2}{v_1{}^2}$$

題意より，$k > k_c$ のときに小球 2 は床から浮き上がるので，

$$\boldsymbol{k_c = \frac{15mg^2}{v_1{}^2}}$$

(3)

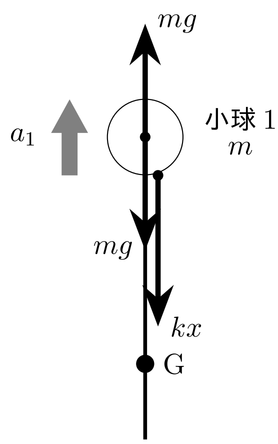


ゴムの長さが $l + x$ のとき，小球 1 から重心までの距離を l_{G} とすると，

$$l_{\mathrm{G}} = \frac{m \cdot 0 + 3m(l+x)}{m+3m} = \frac{3}{4}(l+x)$$

よって，重心 G は小球 1 と小球 2 を 3 : 1 に内分する点である。

ここで，重心から見た小球 1 の運動を考える。重心には負の加速度 $-g$ がはたらくので，慣性力がはたらくことに注意する。重心から見た小球 1 の加速度を a_1 とすると，運動方程式は，



$$ma_1 = -kx - mg + mg$$

$$\therefore \quad ma_1 = -kx \qquad \cdots\cdots ③$$

よって，小球 1 は重心に対して単振動する。

ここで，重心から小球 1 の間でのゴムの自然長からの伸びは $\frac{3}{4}x$ であるから，見かけの復元力の比例定数を k_1 とおくと，運動方程式は，

$$ma_1 = -k_1 \cdot \frac{3}{4}x$$

③と比較すると，$k_1 = \frac{4}{3}k$ である。

よって，重心から見た小球 1 の単振動の周期 T_0 は，

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = \pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

次に，重心 G から小球 2 の運動を考える。同様にして見かけの復元力の比例定数を k_2 とおくと，$k_2 = 4k$ であることがわかるので，重心から見た小球 2 の単振動の周期 T_0' は，

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4k}} = \pi\sqrt{\frac{3m}{k}} = T_0$$

となり，小球 1 と小球 2 は同じ周期で単振動していることがわかる。

ここで，本文より Δl は無視してよいので，小球 2 が床から浮き上がったとき，ゴムの長さは自然長と等しく，この状態から小球は単振動を開始したとしてよい。ゴムがたるむのは再びゴムの長さが自然長に戻るときであるから，求める時間 T は周期 T_0 の $\dfrac{1}{2}$ である。したがって，

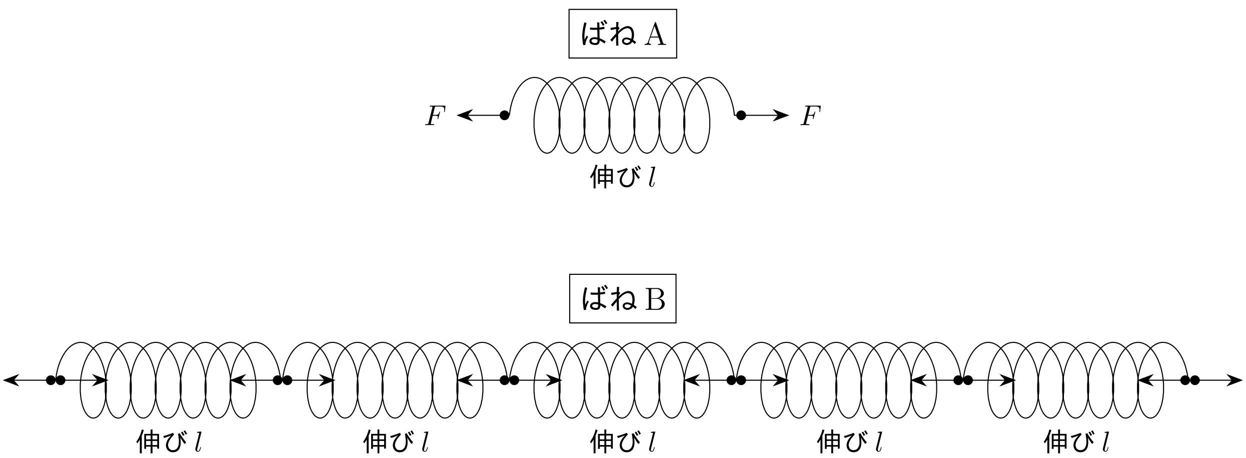
$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}T_0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}}$$

◆ Column

ばねの長さとばね定数

一般に，ばね定数の大きさはばねの自然長に反比例する。ただし，長さ以外の特徴（材質，断面積，巻きの間隔など）は同じものとする。

これを示すために，あるばね A と，それを n 本つなげたばね B を用意する（ばね B はばね A の n 倍の自然長のばねと見なせる）。これらのばねに同じ大きさ F の力を加えたとき，ばね A の伸びを l とするならば，ばね B の伸びは nl になる。これは，下図のようにばね B の各ばねが l ずつ伸びることを考えるとわかりやすいだろう。



このとき $\dfrac{\text{（力の大きさ）}}{\text{（伸び）}}$ で各ばねのばね定数 k_A，k_B を計算すると，

$$k_\mathrm{A} = \frac{F}{l}$$

$$k_\mathrm{B} = \frac{F}{nl} = \frac{1}{n}k_\mathrm{A}$$

よって，ばね定数は自然長に反比例する。

以上のことを知っていれば k_1，k_2 はすぐに求めることができる。これは他の問題にも応用できる知識なので，知っておくとよい。

（別解 1）

本解では，重心から見た小球 1 の単振動と小球 2 の単振動を別々に考えている。しかし，いま問題なのはゴムの伸びであるので，小球 2 から見た小球 1 の運動を調べたほうが，手間が少なく簡単である。

静止している観測者から見た小球 1，2 の加速度をそれぞれ α_1，α_2 とすると，ゴムの自然長からの伸びが x のときの運動方程式は，

$$\text{小球 1} : m\alpha_1 = -kx - mg$$

$$\text{小球 2} : 3m\alpha_2 = kx - 3mg$$

2 式より，

$$3m(\alpha_1 - \alpha_2) = -4kx$$

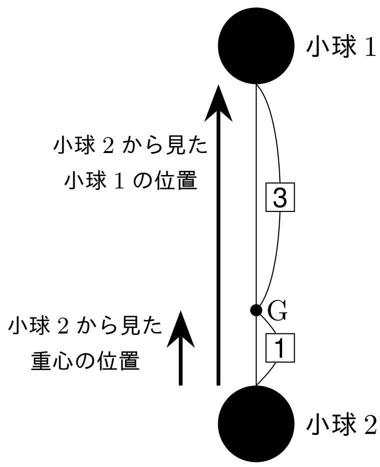
よって，小球 2 に対する小球 1 の相対加速度 α は，

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = -\frac{4k}{3m}x$$

したがって，小球 2 から見た小球 1 の単振動の周期 T_{21} は，

$$T_{21} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4k}} = \pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

である。



T_{21} は本解の T_0，T_0' と等しいがこれは偶然ではない。ゴムが伸び縮みする間，小球 1，小球 2，重心 G は右図のような比の位置関係を常に保つため，3 つの周期が一致するのは当然である。

T_{21} が求まった後は本解と同じように解けばよい。

（別解 2）

別解 1 では，小球 2 から見た小球 1 の運動が単振動になることを式変形によって確かめた。相対運動では両小球に一様にかかる重力の影響は打ち消されゴムの影響のみが残ると考えれば，これは偶然でないことがわかる。そこで，状況を一般化して相対運動を調べてみると，後述の Column のような結果が得られ，それを用いると以下のように簡単に答えが出せる。

2 つの小球の系における換算質量 μ は，

$$\mu = \frac{m \cdot 3m}{m + 3m} = \frac{3}{4}m$$

である。よって，小球 2 から小球 1 の運動を見ると，ゴムの自然長からの伸びが x のとき，質量 μ の小球が復元力 $-kx$ を受けて単振動する運動と同等である。したがって，単振動の周期 T_{21} は，

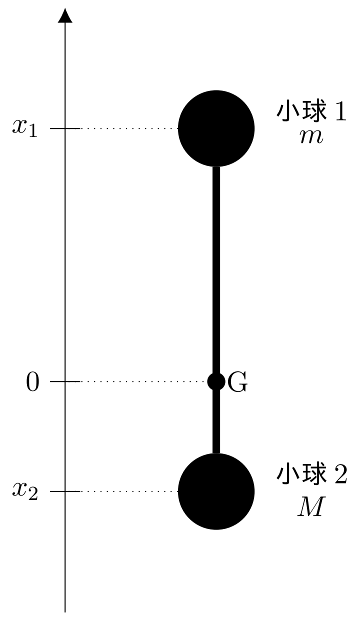
$$T_{21} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = \pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

（以下同様）

◆ Column

相対運動と換算質量

重心 G の位置を原点にとり，小球 1，2 の座標をそれぞれ x_1，x_2 とし，$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$，$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ のように表す。運動方程式より，



$$\text{小球 1}: m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2 - l) - mg$$

$$\text{小球 2}: M\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2 - l) - Mg$$

2 式より，

$$\frac{mM}{M+m}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k(x_1 - x_2 - l)$$

ここで，ゴムの自然長からの伸びを $x = x_1 - x_2 - l$，換算質量を $\mu = \frac{mM}{m+M}$ とおくと，

$$\mu\ddot{x} = -kx$$

したがって，小球 2 に対する小球 1 の相対運動は，質量 μ の小球が復元力 $-kx$ を受けて単振動する（今回はゴムなので伸びることしかできないが……）運動と同等である。

　このように，二体問題を考えるときに換算質量を用いると相対運動が一体問題のように記述でき，運動の様子を把握するのが容易になる。

（ 大泉雄司，松井浩介，仲里佑利奈，一丸友美 ）

2016 年度 東京大学 前期 物理

第 2 問　RLC 交流回路・色々な力がはたらく荷電粒子の円運動

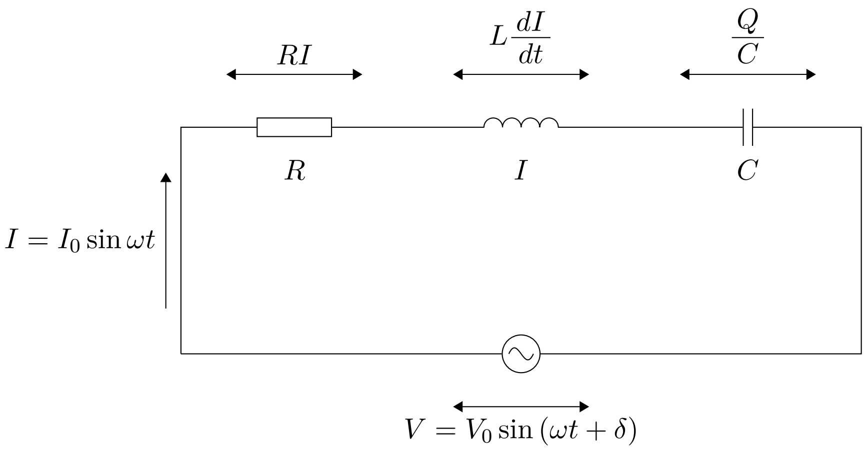
出題範囲	RLC 交流回路・磁場中の荷電粒子の運動
難易度	★★☆☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	Ⅰは RLC 交流回路の問題。(1)〜(3) はこの分野の典型的な問題である。(1) は，まともに解こうとしたら微分方程式を解くかベクトル解法を用いるかしかないが，ひねりのない典型的な RLC 交流回路であるから，答えを覚えていればそれを書くだけでもよいだろう。(2)，(3) は，(1) が解けていれば簡単に解ける問題である。(4) は，立式までは簡単であるが，まず ω の値を $\omega_2 > \omega_1 > 0$ という条件から絞った後，さらに指定されていない文字を消さなければいけないので，ただの計算問題とはいえ時間はかかるだろう。 Ⅱは磁場中の荷電粒子の運動についての問題である。本問は，電場がかけられたうえにガスによる抵抗力もあるという非常に煩わしい設定であるが，問題文中に「(荷電粒子は) 等速円運動を行っている」という記述があることから，実はそこまで複雑な問題ではない。電磁気の分野というよりは，力学の円運動の問題をしっかり解けるかが大事である。また，(2)，(4) は計算量が多くなっている。(2) は工夫して計算すればまだ楽に解けるが，(4) はⅠの (4) と同様，立式はすぐできるが，指定されていない文字を消去する作業が待っているため，時間がかかってしまう問題である。

解説

I

(1)

回路図は以下のようになる（オームの法則，自己誘導による起電力の式，コンデンサーの基本式を用いた）。



キルヒホッフ第 2 法則より，

$$V = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \qquad \cdots\cdots ①$$

となる。ここで，$I = I_0 \sin\omega t$ より，

$$\frac{dI}{dt} = I_0 \cdot \omega\cos\omega t = \omega I_0 \cos\omega t$$

また，$I = \dfrac{dQ}{dt}$ から，

$$Q\left(= \int dQ = \int I dt = \int I_0 \sin\omega t dt\right) = I_0 \frac{-\cos\omega t}{\omega} = -\frac{I_0}{\omega}\cos\omega t$$

よって，①は，

$$\begin{aligned} V &= R \cdot I_0 \sin\omega t + L \cdot \omega I_0 \cos\omega t + \frac{1}{C}\left(-\frac{I_0}{\omega}\cos\omega t\right) \\ &= I_0\left\{R\sin\omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos\omega t\right\} \end{aligned}$$

問題文で与えられた三角関数の公式を用いて，

$$V = I_0 \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t + \varphi) \quad \left(\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

と書ける。$V = V_0 \sin(\omega t + \delta)$ と比較して，

$$V_0 = I_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\omega t + \delta = \omega t + \varphi + 2n\pi$$

となるから，以上をまとめて，

$$\boldsymbol{I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

$$\delta = \varphi + 2n\pi$$

よって，

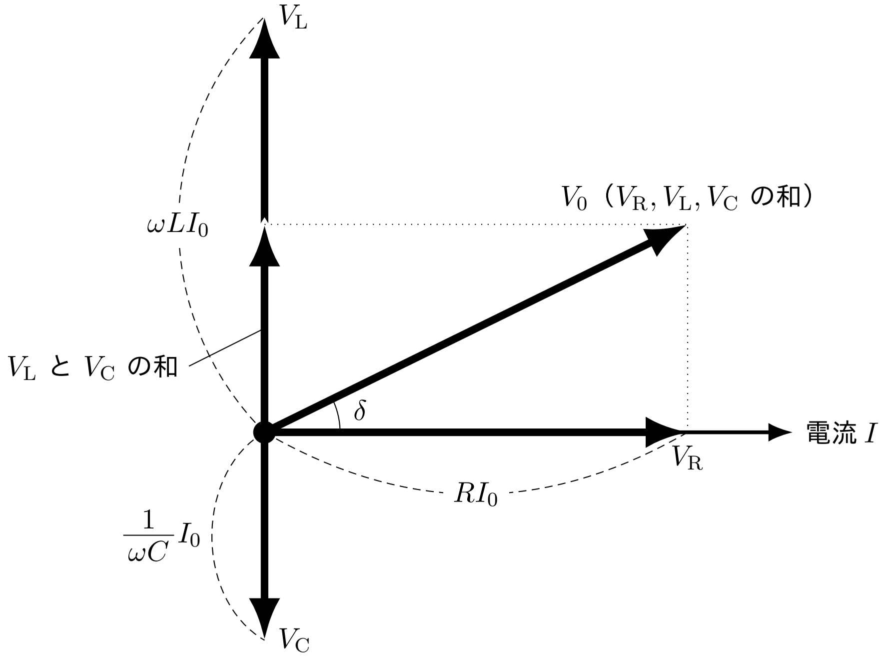
$$\boldsymbol{\tan\delta} = \tan(\varphi + 2n\pi) = \tan\varphi = \boldsymbol{\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

（別解）

ベクトルを用いて解答する。

- 抵抗 R の電位 V_{R} $\cdots$（$V = RI$ より）電流と同じ位相で，最大値は RI_0
- コイル L の電位 V_{L} $\cdots$（$V = L\dfrac{dI}{dt}$ より）位相は電流より $\dfrac{\pi}{2}$ 進んでいて，最大値は ωLI_0
- コンデンサー C の電位 V_{C} $\cdots$（$V = \dfrac{Q}{C}$ より）位相は電流より $\dfrac{\pi}{2}$ 遅れていて，最大値は $\dfrac{1}{\omega C}I_0$

したがって，次の図が描ける。



三平方の定理より，

$$V_0{}^2 = (RI_0)^2 + \left(\omega LI_0 - \frac{1}{\omega C}I_0\right)^2$$

よって，

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

また，

$$\tan\delta = \frac{\omega LI_0 - \dfrac{1}{\omega C}I_0}{RI_0} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

(2)

$\overline{P}$ は抵抗で消費される電力の時間平均に等しいから，

$$\boldsymbol{\overline{P}} = \overline{RI^2} = \overline{R{I_0}^2 \sin^2 \omega t} = R{I_0}^2\overline{\sin^2 \omega t}$$

$$= R \cdot \left\{ \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \right\}^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{= \frac{R{V_0}^2}{2\left\{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2\right\}}}$$

(3)

(2) で得た $\overline{P} = \dfrac{R{V_0}^2}{2\left\{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2\right\}}$ の式で，変数は ω だけなので，$\overline{P}$ が最大のとき，$\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2$ が最小の 0 となる。$\omega > 0$ から，

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

このとき，$\overline{P}$ は最大で，

$$P_0 = \frac{R{V_0}^2}{2R^2} = \frac{{V_0}^2}{2R}$$

よって，

$$\boldsymbol{R = \frac{{V_0}^2}{2P_0}}$$

(4)

(2)，(3) の結果を用いて，

$$\overline{P} = \frac{P_0}{2} = \frac{{V_0}^2}{4R}$$

$$\overline{P} = \frac{R{V_0}^2}{2\left\{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2\right\}} = \frac{{V_0}^2}{4R}$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \pm R$$

$$CL\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$$

これを解いて，

$$\omega = \frac{\pm RC \pm \sqrt{(\pm RC)^2 - 4CL\cdot(-1)}}{2CL}$$
$$= \frac{\pm RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4CL}}{2CL} \quad （複号任意）$$

$\sqrt{(RC)^2 + CL} > RC$ と $\omega_2 > \omega_1 > 0$ に注意して，

$$\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4CL}}{2CL}$$

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4CL}}{2CL}$$

よって，

$$\mathit{\Delta}\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{2RC}{2CL} = \frac{R}{L}$$

ここで，$P_0 = \dfrac{{V_0}^2}{2R}$ より $R = \dfrac{{V_0}^2}{2P_0}$ であるから，

$$\boldsymbol{L} = \frac{R}{\mathit{\Delta}\omega} \boldsymbol{=} \boldsymbol{\frac{{V_0}^2}{2P_0\mathit{\Delta}\omega}}$$

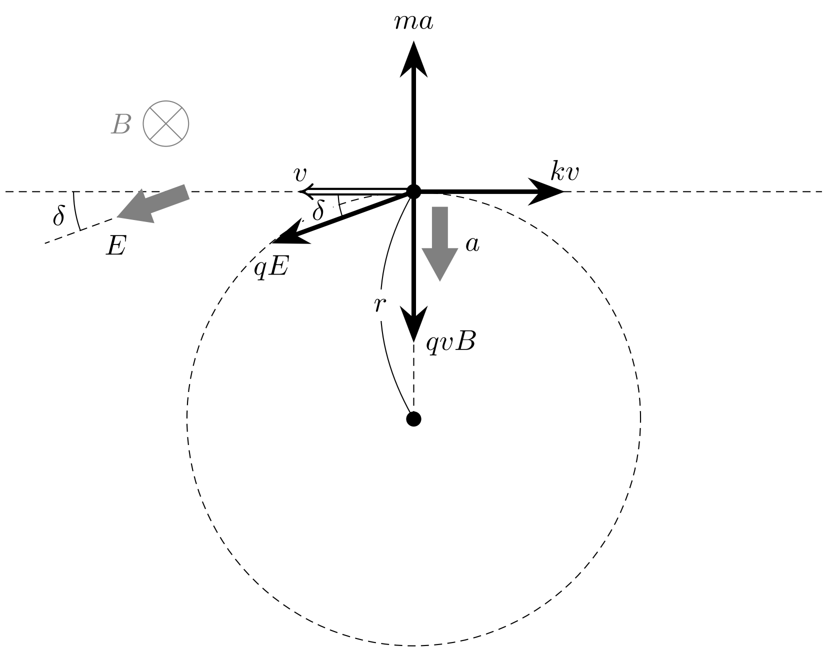
II

(1)

荷電粒子は等速円運動をするため，粒子の円運動の半径を r，円の中心方向の加速度を a とすると，荷電粒子には，

- （磁場による）ローレンツ力 $\cdots$ 大きさ qvB（フレミング左手則より決まる方向）
- （電場による）クーロン力 $\cdots$ 大きさ qE （電場と同じ方向）
- （ガスによる）抵抗力 $\cdots$ 大きさ kv （速度と逆向き）
- （円運動による）遠心力 $\cdots$ 大きさ ma （中心→荷電粒子の方向）

がはたらく。よって，次の図が描ける。



a は円運動の加速度より，$a = \dfrac{v^2}{r} = v\omega$（$\because\ v = r\omega$）と書けることに注意すると，力のつり合いは，

（速度に）平行 ： $\boldsymbol{qE\cos\delta = kv}$ …… ②

（速度に）垂直 ： $\boldsymbol{mv\omega = qvB + qE\sin\delta}$ …… ③

(2)

③より，

$$qE\sin\delta = mv\omega - qvB \quad \cdots\cdots ③'$$

③$'$÷②とすれば，

$$\frac{qE\sin\delta}{qE\cos\delta} = \frac{mv\omega - qvB}{kv} = \frac{m\omega - qB}{k}$$

となるから，

$$\boldsymbol{\tan\delta = \frac{m\omega - qB}{k}}$$

また，②，③$'$ のそれぞれ両辺 2 乗して足すと，

$$(qE\cos\delta)^2 + (qE\sin\delta)^2 = (kv)^2 + (mv\omega - qvB)^2$$

$$(qE)^2(\cos^2\delta + \sin^2\delta) = \{k^2 + (m\omega - qB)^2\}v^2$$

$$v^2 = \frac{(qE)^2}{k^2 + (m\omega - qB)^2}$$

よって，

$$\boldsymbol{v = \frac{qE}{\sqrt{k^2 + (m\omega - qB)^2}}}$$

（別解）

「力のつり合いの式を書け」とあったので遠心力を考えたが，運動方程式より垂直方向の力のつり合いの式

$$ma = qvB + qE\sin\delta$$

は導ける。

(3)

電場は，荷電粒子を，単位時間あたり $qE\cos\delta$ の力で距離 v だけ進める。よって，

$$P = (qE\cos\delta)\cdot v$$

②を用いて，

$$\boldsymbol{P} = kv\cdot v = kv^2 \boldsymbol{= \frac{k(qE)^2}{k^2 + (m\omega - qB)^2}}$$

(4)

(3) で得た式 $P = kv\cdot v = kv^2 = \dfrac{k(qE)^2}{k^2 + (m\omega - qB)^2}$ において，変数は ω のみだから，P が最大のとき $(m\omega - qB)^2$ が最小の 0 となる。よって，

$$\omega_0 = \frac{qB}{m} \qquad \cdots\cdots ④$$

このとき P は最大となり，

$$P_0 = \frac{(qE)^2}{k} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

ここで $P = \dfrac{P_0}{2}$ のとき，(3) より，

$$\frac{k(qE)^2}{k^2 + (m\omega - qB)^2} = \frac{(qE)^2}{2k}$$

$$(m\omega - qB)^2 = k^2$$

$$m\omega - qB = \pm k$$

$\omega_2 > \omega_1$ より，

$$\omega_2 = \frac{qB + k}{m}, \quad \omega_1 = \frac{qB - k}{m}$$

よって，

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{2k}{m} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤より，

$$k = \frac{(qE)^2}{P_0} \qquad \cdots\cdots ⑤'$$

④より，

$$q = \frac{m\omega_0}{B} \qquad \cdots\cdots ④'$$

④′，⑤′ より，

$$k = \frac{q^2E^2}{P_0} = \frac{m^2{\omega_0}^2E^2}{B^2P_0}$$

これを⑥に代入して，

$$\Delta\omega = \frac{2k}{m} = \frac{2m{\omega_0}^2E^2}{B^2P_0}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{m = \frac{P_0\Delta\omega}{2}\left(\frac{B}{E\omega_0}\right)^2}$$

（森田涼介，松井浩介，仲里佑利奈，一丸友美）

2016 年度 東京大学 前期 物理

第 3 問　水深の異なる 2 つの領域を進む波

出題範囲	波の干渉
難易度	★★★★☆
所要時間	20 分
傾向と対策	大問 I では，基本的な波の式を用いる問題やドップラー効果の式を用いる問題が多くみられた。(1) では領域をまたぐ波は周波数が変わらないことを踏まえる。(2) では次元の一致を利用，後半の水深の比較の問題を解き忘れないように注意。(3) は線対称を利用してうまく距離を求めよう。(4) は境界での反射で波の位相は変わらないことに注意し，(3) の式を用いて，波の弱め合う条件を使う。(5) は波の図を描くとわかりやすい。波源と原点との距離が波の波長の倍になっていることがポイント。 大問 II は波源が移動する問題であった。波の動きと波源の動きの位置関係を追おう。(1) は単純なドップラー効果の問題かと思いきや，後半では領域をまたぐため，一度境界での振動数を考える必要がある。そのまま式に当てはめようとしてはいけない。(2) は全体のイメージがつかめればたやすい。図を描いて立式しよう。(3) はなかなか条件を出しにくいかもしれないが，単一の波に注目して式を立てよう。

解説

I

(1)

波の式 $v = f\lambda$ を利用すると，

$$V = f \times \frac{d}{2}$$

$$\therefore\quad f = \boldsymbol{\frac{2V}{d}}$$

つづいて，領域 B について考える。ここで，領域は変わっても，同じ波源だから振動数は変わらないことに注意して，

$$\frac{V}{2} = \frac{2V}{d} \times \lambda_{\mathrm{B}}$$

$$\therefore\quad \lambda_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{\frac{d}{4}}$$

(2)

次元の一致を考える。〔L〕が長さ（Length），〔T〕が時間（Time）の次元を表す。v の次元は〔$\mathrm{LT^{-1}}$〕で，g の次元は〔$\mathrm{LT^{-2}}$〕で，h の次元は〔L〕である。したがって，$v = g^a h^b$ の式の右辺と左辺を比較して，

$$〔\mathrm{LT^{-1}}〕 = 〔\mathrm{L^{a+b}T^{-2a}}〕$$

$$\therefore\ 1 = a + b \quad \text{かつ} \quad -1 = -2a$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a = \frac{1}{2}} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{b = \frac{1}{2}}$$

となる。よって，速さは水深の $\frac{1}{2}$ 乗に比例し，逆に水深は速さの 2 乗に比例する。いま，領域 A の速さは領域 B の波の速さの 2 倍である。よって，領域 A の水深は領域 B の **4 倍**である。

具体的に値をおいて考えると，

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{gh_{\mathrm{A}}} \quad \text{かつ} \quad v_{\mathrm{B}} = \sqrt{gh_{\mathrm{B}}} \quad \text{かつ} \quad v_{\mathrm{A}} = 2v_{\mathrm{B}}$$

したがって，

$$h_{\mathrm{A}} = 4 \times h_{\mathrm{B}}$$

（別解）

次元の考え方に慣れていなければ，単位の一致を考えてもよい。

$v = g^a h^b$ の式の右辺と左辺の単位を比較して，

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{m}^a}{\mathrm{s}^{2a}}\mathrm{m}^b$$

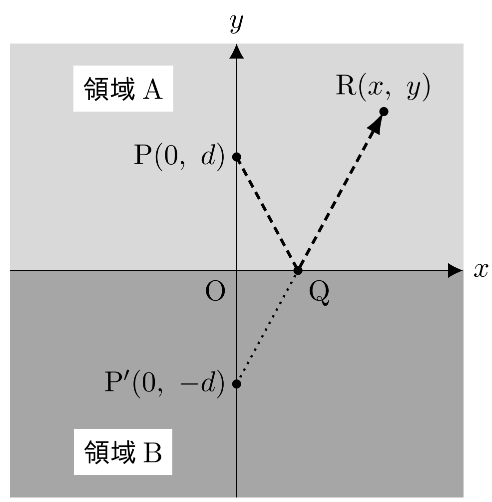
$$\therefore\ 1 = a + b \quad \text{かつ} \quad -1 = -2a$$

$$\therefore\ a = \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad b = \frac{1}{2}$$

以下同様。

(3)

このような反射の問題を考える場合，反射面に対して線対称移動するとよい。点 P を x 軸について線対称移動した点を点 P′ とすると，



$$\overline{\mathbf{PQ}} + \overline{\mathbf{QR}} = \overline{\mathrm{P'Q}} + \overline{\mathrm{QR}}$$

$$= \overline{\mathrm{P'R}}$$

$$\boldsymbol{= \sqrt{x^2 + (y+d)^2}}$$

となる。

(4)

この問は，(3) で得られた式を用いる問題である。

反射波の位相が領域の境界で変化しないことから，波が弱め合う条件は，距離の差が半波長の奇数倍であることである。R が $y = d$ 上にあるとして (3) で得られた式を用いて上の条件を式で表すと，

$$\overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QR}} - \overline{\mathrm{PR}} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$\therefore\ \sqrt{x^2 + (d+d)^2} - |x| = \left(n - \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\sqrt{x^2 + 4d^2} - |x| = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{d}{2}}$$

この式を満たす n の範囲を調べる。まず，この式を x について解くと，

$$\sqrt{x^2 + 4d^2} - |x| = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{d}{2}$$

$$\therefore\ \sqrt{x^2 + 4d^2} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{d}{2} + |x|$$

$$\therefore\ x^2 + 4d^2 = \frac{1}{4}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 d^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)d|x| + x^2$$

$$\therefore\ 4d = \frac{1}{4}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 d + \left(n - \frac{1}{2}\right)|x|$$

$$\therefore\ |x| = \frac{4 - \frac{1}{4}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}{n - \frac{1}{2}}d$$

である。この式を満たす n の範囲，つまり右辺が正になる n の範囲は，

$$4 - \frac{1}{4}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad n - \frac{1}{2} > 0$$

$$\therefore\ \frac{1}{2} < n < \frac{9}{2}$$

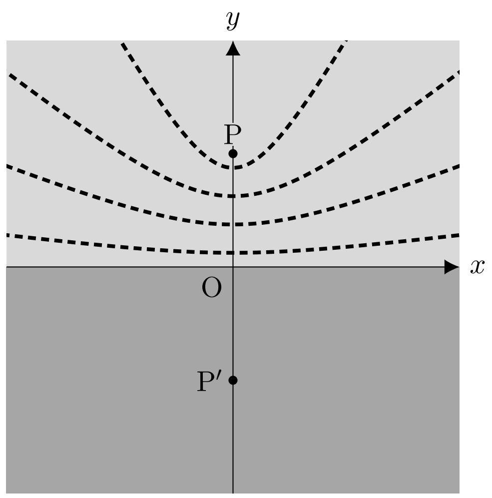
$$\therefore\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

である。この 1 つひとつの n について，$|x|$ は 1 つの値をとるため，x は正と負の 2 つの値をとることができる。よって，波が弱め合う点は **8 個**。

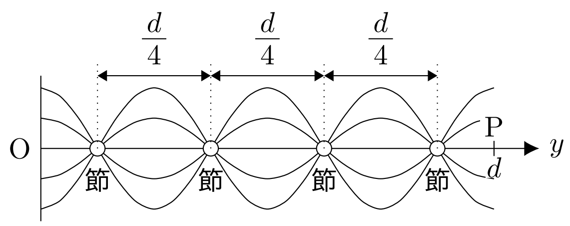
（別解）

本解では，誘導に自然に乗るために問題文前半で立てた式を用いて後半の問に解答した。しかし，誘導を無視すれば次のような図形的知識を用いて素早く解答できる。

反射波を，(3) で考えたような点 P' から出た波と考える。いまは，実際には領域 A を進む波しか考えていないため波長や波の速さは領域 A のものとしてよい。作図の経験があればわかるが，このように平面の 2 点から波が同心円状に出ているとき，それらの干渉による節線は下図のように P を焦点とする双曲線となる（いまは反射波との干渉なので $y > 0$ の領域にのみ節線ができる)。



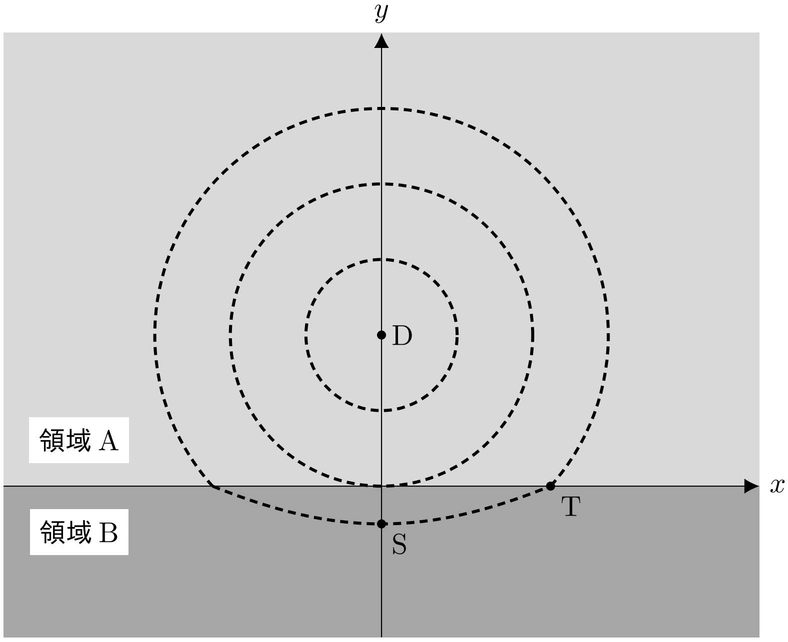
節線の本数は y 軸上に注目して数えるとよい。y 軸上では定常波ができており，節線の本数はその節の数として簡単に数えることができる。波源の波長が $\dfrac{d}{2}$ なので定常波の隣り合う節の距離は $\dfrac{d}{4}$ であることと，原点 O は自由端反射で腹になっていることを使って，定常波は下図のように描ける。よって，節は 4 個である。



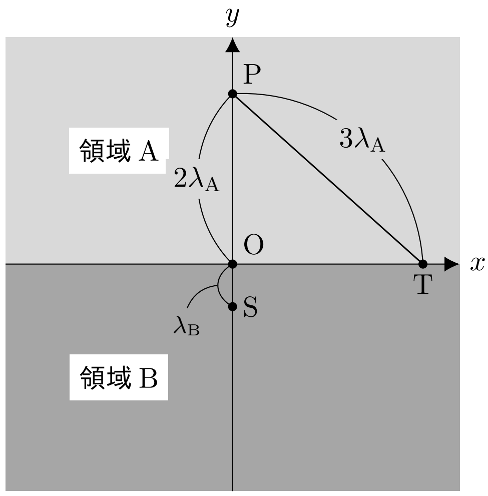
最後に，$y = d$ 上の節の個数は $y > 0$ の節線の本数の 2 倍であることに注意して，答えは 8 個と求まる。

(5)

このときの波面を図にすると，下のようになる。ここで，波の波長が領域 A で $\dfrac{d}{2}$ であることに注意。



このときの各点の位置関係を波長を用いて表すと，右図のようになる。よって，



$$\mathrm{S}\left(\mathbf{0,\ -\frac{1}{4}d}\right)$$

また，

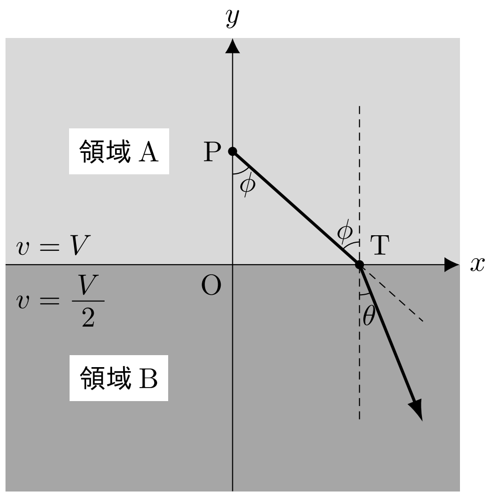
$$\overline{\mathrm{OT}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PT}}^2 - \overline{\mathrm{OP}}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}d$$

よって，

$$\mathrm{T}\left(\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{2}d,\ 0}\right)$$

ここで，屈折の法則を考えると，



$$\mathbf{\sin\theta} = \sin\phi \times \frac{\frac{V}{2}}{V}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}d}{\frac{3}{2}d} \times \frac{\frac{V}{2}}{V}$$

$$\mathbf{= \frac{\sqrt{5}}{6}}$$

II

(1)

ドップラー効果より，原点 O で観測される振動数 f_{O} は，

$$f_{\mathrm{O}} = \frac{V}{V+u}\frac{2V}{d}$$

である。

原点 O で反射した波が，領域 A を動く波源で観測されるときの振動数は，

$$\frac{V-u}{V}f_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{\frac{V-u}{V+u}\cdot\frac{2V}{d}}$$

である。

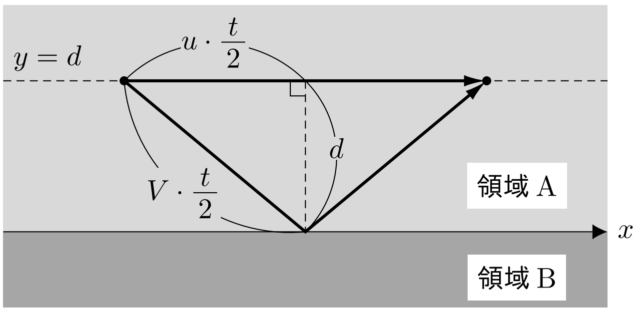
原点 O を通過した波が，領域 B を動く点で観測されるときの振動数は，

$$\frac{\frac{V}{2}-w}{\frac{V}{2}}f_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{\frac{V-2w}{V+u}\cdot\frac{2V}{d}}$$

である。

(2)

波源と波の進行を図にすると右のようになる。



よって，求める時間を t とすると，

$$V^2\frac{t^2}{4} = d^2 + u^2\frac{t^2}{4}$$

$$\therefore\quad t = \boldsymbol{\frac{2d}{\sqrt{V^2-u^2}}}$$

(3)

求める条件は，かかった時間が波源の周期の $(m-\frac{1}{2})$ 倍に等しいことである。よって，

$$t = \left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{f}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{8V}{\sqrt{V^2-u^2}} = 2m-1}$$

もともと m は整数であったが，実際には $2m-1>0$（上の式の左辺が正ゆえ，右辺も正）と $0<u<\dfrac{V}{2}$ という 2 つの条件を満たすものに限られる。そこで，上の式を u について解いた $u=V\sqrt{1-\dfrac{64}{(2m-1)^2}}$ を $0<u<\dfrac{V}{2}$ に代入してみると，

$$0<V\sqrt{1-\frac{64}{(2m-1)^2}}<\frac{V}{2}$$

$$\therefore\quad 0<\sqrt{1-\frac{64}{(2m-1)^2}}<\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad 1-\frac{64}{(2m-1)^2}>0 \quad \text{かつ} \quad 1-\frac{64}{(2m-1)^2}<\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad (2m-1)^2>64 \quad \text{かつ} \quad (2m-1)^2<\frac{64\times 4}{3}$$

$$\therefore\quad 64<(2m-1)^2<\frac{64\times 4}{3}(=85.333\cdots)$$

となる。よって，整数 m のうち上の 2 つの条件をみたしているのは $2m-1=9$ つまり $(2m-1)^2=81$ のみであるとわかる。以上より，

$$\boldsymbol{u=\frac{\sqrt{17}}{9}V}$$

（別解）

波の移動距離が，波の半波長の奇数倍になればよいと考え，

$$Vt=(2m-1)\frac{d}{4}$$

という式を立ててもよい。この式に (2) で求めた t の値を代入する。このあと，$0<u<\dfrac{V}{2}$ を用いて m を絞るところから先は，本解と同じである。

（大泉雄司，松井浩介，仲里佑利奈，一丸友美）