2016 年度 東京大学 前期 数学

第 1 問　ネイピア数に関する不等式の証明

出題範囲	数Ⅲ微分
難易度	★★☆☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	例年第 1 問は比較的簡単な問題が出題されるが，本問も例年通り解きやすい問題であった。不等式を示すための基本的な手段としてまず各項の差を考えてみることは鉄則である。その差と 0 との大小が因数分解などして直接わかれば不等式を示すことが出来るが，今回は直接評価することができないので，微分して増減を調べ，最小値・最大値と 0 の大小を比べるという定石がそのまま使える。もちろん $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ は直接微分できないので対数をとること。それをしっかり思いつければ後は第 2 次導関数まで求めて増減を考えるだけで一本道である。極めつけに，本来は覚えるべき $e=\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ という自然対数 e の定義式が与えられているため，極限値を求めることも容易になっている。

解答

【証明】問題文で与えられた不等式

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

の各辺の自然対数をとっても大小関係は変わらないので，[1]

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1 < \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

を示せばよい。

[1] このままでは微分が大変だ。e があるので対数をとってみようというのは自然な発想である。

(i)　まずは不等式

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$$

を示す。

$f(x)=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1$ とおき，$x>0$ の範囲で常に $f(x)<0$ となることを示せばよい。[2]

[2] このように不等式を (x の式)>0 や (x の式)<0 という形にして，左辺を $f(x)$ とおいて増減を調べるのは常套手段である。

増減を調べるために x で微分すると，

$$f'(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2} - \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x(x+1)^2}$$ [3]

[3] 1 階微分では正負が分からないので，2 階微分をする。

$x>0$ なので，$x(x+1)^2>0$ より $f''(x)<0$ である。よって，$f'(x)$ は単調減少である。つまり

$$f'(x) > \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right\}$$

$$= \log(1+0) - 0$$

$$= 0$$

よって，$f'(x)$ が正であるので，$f(x)$ は単調増加である。よって

$$f(x) < \lim_{x\to\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left\{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1\right\}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1\right\}$$

$$= \log e - 1$$

$$= 0$$

したがって

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$$

が示された。

(ii) 次に，不等式

$$1 < \left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

を示す。$g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$ とおき，$x > 0$ の範囲で常に $g(x) > 0$ となることを示せばよい。

増減を調べるために x で微分すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \\ g''(x) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2x^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

$x > 0$ なので，$x^2(x+1)^2 > 0$ より $g''(x) > 0$ である。よって，$g'(x)$ は単調増加となる。つまり

$$\begin{aligned} g'(x) &< \lim_{x \to \infty} g'(x) \\ &= \lim_{x \to \infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \log(1 + 0) - \frac{1}{2}(0 + 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって，$g'(x)$ は負であるから，$g(x)$ は単調減少である。よって

$$\begin{aligned} g(x) &> \lim_{x \to \infty} g(x) \\ &= \lim_{x \to \infty}\left\{\left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right\} \\ &= \lim_{x \to \infty}\left\{x\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right\} \\ &= \log e + \frac{1}{2} \cdot 0 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上 (i)，(ii) より

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。

(証明終)

解説

不等式を示す際，式変形をしたりグラフの面積を考えたりすることで直接示せる場合もあるが，今回はもとの不等式も，対数をとったあとの不等式もこれらの手法で示すのは難しい。そのため，各項の差を微分して示すのが容易だろう。

微分するとなれば，$(x\text{ の式})^{x\text{ の式}}$ のままでは計算が煩雑になるため，定石通り各辺の対数をとった不等式

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

を示す方が手っ取り早い。あとは，2 つの不等号が両方成り立つことを示すだけである。まずは，$f(x)=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$ とおいて

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<1\Leftrightarrow f(x)<0$$

を $f(x)$ の増減を調べることで示す。$f(x)$ を微分すると，

$$f'(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

という式が得られるが，$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ と $\frac{1}{x+1}$ が直接比較できないため $f'(x)$ の正負がわからない。このような場合はもう 1 度微分して第 2 次導関数を考えることが定石である。第 2 次導関数は

$$f''(x)=-\frac{1}{x(x+1)^2}$$

となり，こちらは整式なので値を比較的評価しやすい。今回，$x>0$ より $x(x+1)^2$ が正なので，$f''(x)$ が負になるとわかる。そうすれば，$f'(x)$ は単調減少だとわかる。こうなれば，$f'(x)$ の連続性より，$x>0$ での $f'(x)$ は（極限が存在すれば）$\lim_{x\to+0}f'(x)$ より小さく $\lim_{x\to\infty}f'(x)$ より大きいと言うことが出来る。ここで $\lim_{x\to\infty}f'(x)$ が 0 なので，$\lim_{x\to+0}f'(x)$ を調べなくとも $f'(x)>0$ とわかる (ちなみに $\lim_{x\to+0}f'(x)=\infty$ である)。

$f'(x)$ が正であることが示されたので，今度は $f(x)$ は単調増加であることが分かった。そして，先ほどと同様

$f(x)$ の連続性より，$x>0$ での $f(x)$ は $\lim_{x\to+0} f(x)$ より大きく $\lim_{x\to\infty} f(x)$ より小さいということが出来る。あとは $\lim_{x\to+0} f(x)$ と $\lim_{x\to\infty} f(x)$ の計算である。

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right\}$$

ここで，問題文で与えられた $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \Leftrightarrow 1=\lim_{t\to\infty} t\log\left(1+\frac{1}{t}\right)$ の条件が使われる。もちろん，この定義式は，問題文で与えられなくても利用できるようにしておいてほしい。このようにして，$f(x)<0$ が示される。

次に，$g(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$ とおいて

$$1<\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow g(x)>0$$

を示すことになる。この手順に関しては $f(x)$ の場合と同様なので割愛する。$f(x)<0$，$g(x)>0$ を示すことで，題意を示すことができる。

別解

【証明】問題文で与えられた不等式

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

の各辺の自然対数をとっても大小関係は変わらないので，

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1 < \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

を示せばよい。まず $x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<1$ を示す。

$f(x)=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1 \\ &= x\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right\} \end{aligned}$$

となる。$x>0$ より

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}<0$$

を示せばよい。$F(x) = \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}$ とすると

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} - \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2(x+1)} \end{aligned}$$

$x > 0$ なので，$x^2(x+1) > 0$ より $F'(x) > 0$ である。よって，$F(x)$ は $x > 0$ で連続なので，これは単調増加である。つまり

$$F(x) < \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right\} = \log(1+0) - 0 = 0$$

よって，$F(x) < 0$，つまり $f(x) < 0 \Leftrightarrow x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < 1$ であることが示された。

次に，$1 < \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ を示す。

$g(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - 1$ とすると

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned}$$

となる。$x > 0$ より，

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} > 0$$

を示せばよい。$G(x) = \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}$ とすると

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} - \frac{-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{4x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

$x > 0$ なので，$x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 > 0$ より $G'(x) < 0$ である。よって，$G(x)$ は $x > 0$ で連続なので，これは単調減少である。つまり

$$\begin{aligned} G(x) &> \lim_{x\to\infty} G(x) \\ &= \lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right\} \\ &= \log(1+0) - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって，$G(x) > 0$，つまり $g(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < \left(x + \dfrac{1}{2}\right) \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ であることが示された。 (証明終)

別解解説

本解では，不等式を示すために $f(x), g(x)$ を 2 階微分している。ただ，今回 $x > 0$ であることが分かっているので，この別解のように $\log$ の前についている x の整式をくくりだし，残った部分だけ微分すれば 1 階微分だけで済む。このテクニックを自然と使える受験生は多くないが，上手に使えると計算量をだいぶ減らすことができ，時間を節約できるとともに，複雑な通分などの作業が少なくなるのでミスも減らすことができる。

（青木徹, 松下祐樹）

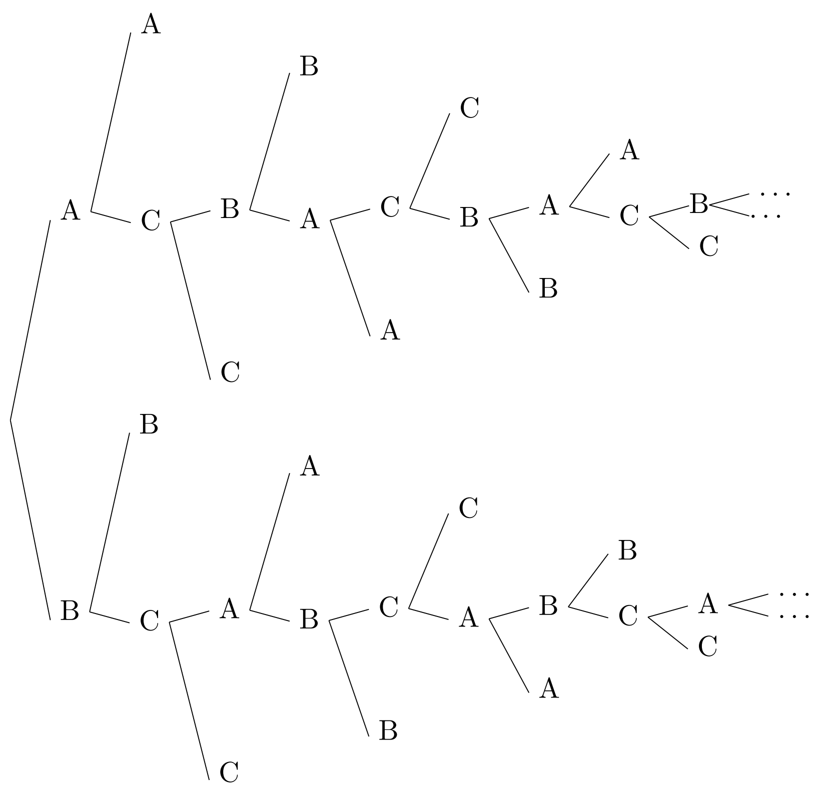
2016 年度 東京大学 前期 数学

第 2 問　ともえ戦の確率

出題範囲	場合の数と確率
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	東大お得意の確率の問題であるが，ルール設定が特殊である。大相撲で行われる「ともえ戦」のルールと全く同様であり，これを知っていると，試合進行のイメージがつかみやすいかもしれない。ルールに従って実験的に数パターン書き出して考えてみると，3 チームが順番に勝ち続ける場合のみ，試合は永遠に続行していくことがわかる。ルールの性質上，隣接 2 項間や 3 項間での漸化式を考えることは難しい。実際に書き出して，試合数の 3 の剰余による場合分けに気づく，といった手順が実践的だろう。条件付き確率の計算方法はきちんと把握しておこう。

解答

勝者の推移の可能性をすべて書き出すと，次の図のようになる。[1]



[1] 実際に書き出して実験し，規則性を見つけるというプロセスを意識することが重要である。(ちなみに文科の問題では (1) で 5 試合に A が優勝する確率を求めさせている。これは問題作成者が受験者に実験をするように促している証拠である。)

(1) A が優勝するまでの勝者の推移としてあり得るものは，上の推移図から

(i) ACB ACB$\cdots$ ACBAA　(X パターンと呼ぶことにする)

(ii) BCA BCA$\cdots$ BCAA　　(Y パターンと呼ぶことにする)

の 2 パターンしかなく，[2]かつ，これらの中で同じ試合数のものはない。これらのことから，n が 3 の倍数のときは，A がちょうど n 試合目で優勝することはあり得ず，n が 3 の倍数でないときは，A がちょうど n 試合目で優勝するための勝者の推移は，n が定まればただ 1 通りに定まることがわかる。

[2] A が優勝するためには最後に 2 連勝しなければならない。書き出した推移図から AA と連続しているところを探すと，CAA で終わる部分と BAA で終わる部分があることに気づく。そして BAA は 1 試合目に A が勝つ場合に 3 試合ごとに現れ，CAA は 1 試合目に B が勝つ場合に 3 試合ごとに現れることに気づく。

以上より，求める確率 $p_n(n \geqq 2)$ は

$$p_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき}) \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (n \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき}) \end{cases}$$

(2) 総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率 P_m は

$$\begin{aligned} P_m &= \sum_{k=2}^{3m} p_k \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^m\right)}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{5}{14} - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m \end{aligned}$$

総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝し，A の最後の対戦相手が B であるのは Y パターンのときであるので，その確率 Q_m は，$m = 1$ のとき 0 であり，$m > 2$ のとき

$$\begin{aligned} Q_m &= \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} \\ &= \frac{\frac{1}{16}\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right)}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{1}{14} - \frac{4}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m \end{aligned}$$

であり，これは，$m=1$ の時も成立する。

以上より，求める条件付き確率は R_m は

$$R_m = \frac{Q_m}{P_m} = \frac{\dfrac{1}{14} - \dfrac{4}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^m}{\dfrac{5}{14} - \dfrac{6}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^m} = \frac{8^m - 8}{5 \cdot 8^m - 12}$$

解説

(1) ルールを把握して整理するまでが大変な問題である。ただ，ルールがわかっても規則性がすぐにはわからないときもある。そういったときは，今回のように樹形図を書いてみることが発見へのカギとなるだろう。規則性さえつかめれば，計算自体はいたって簡単である。

(2) 条件付き確率に関して，事象 A が起こった上で事象 B が起きる条件つき確率 $P_A(B)$ は、事象 $A \cap B$ が起きる確率を $P(A \cap B)$，事象 A が起きる確率を $P(A)$ とすると

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

である。場合分けをしていれば，代入するだけで楽に解けるだろう。

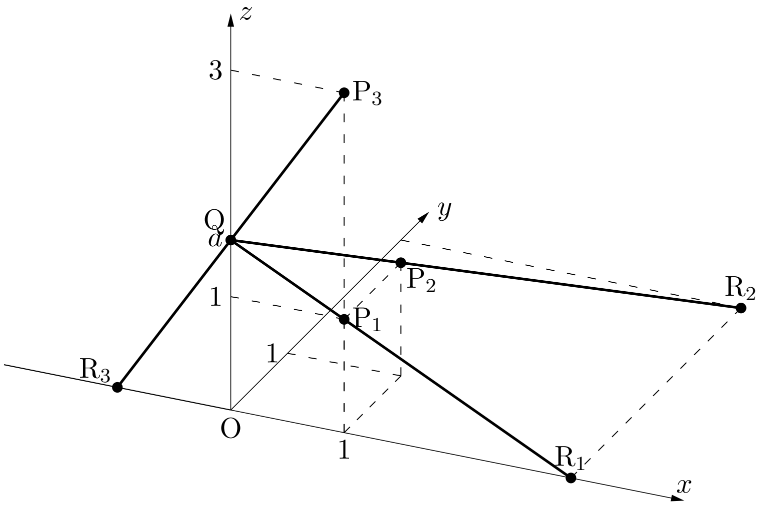
（不死原大知，松下祐樹）

2016 年度 東京大学 前期 数学

第 3 問　空間座標と三角形の面積

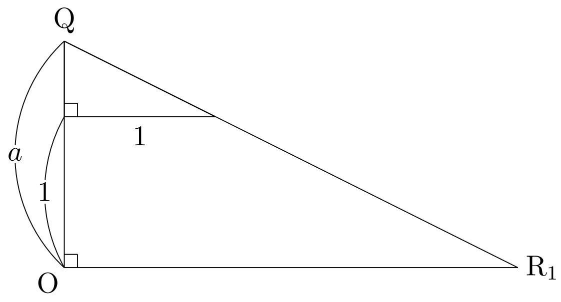
出題範囲	立体図形，微分
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	空間座標が設定されているので身構えてしまうが，やることは至ってシンプルなので方針は立てやすい。空間のまま考えることが難しければ，部分部分に注目して平面図形として考えたり，別解のように機械的にベクトルで処理すれば取り組みやすくなるだろう。$S(a)$ が求まってしまえば，あとは微分をして増減を調べる作業をするだけである。

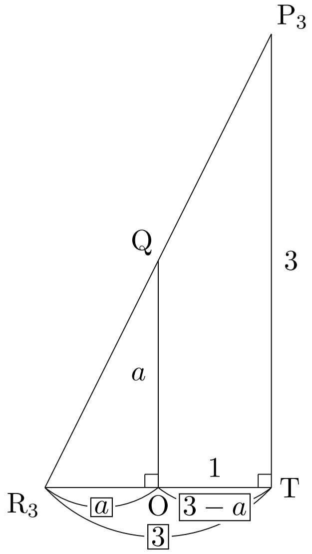
解答



点の位置関係は上図のようになる。

(1,0,0) を点 T とする。次の 2 つの図のように xz 平面で $\triangle \mathrm{OQR_1}$，$\triangle \mathrm{TR_3P_3}$ の内部で相似な三角形を考えると





$$\mathrm{OR_1} = \frac{a}{a-1}, \mathrm{OR_3} = \frac{a}{3-a}$$

$$\mathrm{R_1R_3} = \mathrm{OR_1} + \mathrm{OR_3} = \frac{2a}{(a-1)(3-a)}$$

また，$\mathrm{S}(0, 0, 1)$ とすると，$\triangle\mathrm{SP_1P_2} \backsim \triangle\mathrm{OR_1R_2}$ であり，これらはともに直角二等辺三角形になるので

$$\mathrm{R_1R_2} = \mathrm{OR_1} = \frac{a}{a-1}$$

$\angle\mathrm{R_2R_1R_3}$ が直角であるので

$$S(a) = \frac{1}{2} \times \mathrm{R_1R_2} \times \mathrm{R_1R_3} = \frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$$

となる。増減を調べるために a で微分をすると

$$S'(a) = \frac{2a(a-1)^2(3-a) - a^2\{2(a-1)(3-a) - (a-1)^2\}}{(a-1)^4(3-a)^2}$$

$$= \frac{a(a-2)(a+3)}{(a-1)^3(3-a)^2}$$

以上より，$1 < a < 3$ の範囲における $S(a)$ の増減表は以下の通り。

a	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

このことから，$S(a)$ は $a = 2$ のとき最小値 $S(2) = 4$ をとる。

解説

面倒な空間図形の問題に見えるが，平面に落とし込んで考えてしまえば三角形の相似だけでほとんど解けてしまう。その求めた長さを一つ一つ整理していくことが肝要である。また，空間座標におけるだいたいの位置関係を把握できるようになれば，イメージがしやすいだろう。

別解

$\overrightarrow{\mathrm{P_1Q}} = (-1, 0, a-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{P_2Q}} = (-1, -1, a-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{P_3Q}} = (-1, 0, a-3)$ なので，

直線 $\mathrm{P_1Q}$，$\mathrm{P_2Q}$，$\mathrm{P_3Q}$ は実数 t_1, t_2, t_3 を用いてそれぞれ次のように表される。

$$\text{直線 } \mathrm{P_1Q} : (0, 0, a) + t_1(-1, 0, a-1)$$

$$\text{直線 } \mathrm{P_2Q} : (0, 0, a) + t_2(-1, -1, a-1)$$

$$\text{直線 } \mathrm{P_3Q} : (0, 0, a) + t_3(-1, 0, a-3)$$

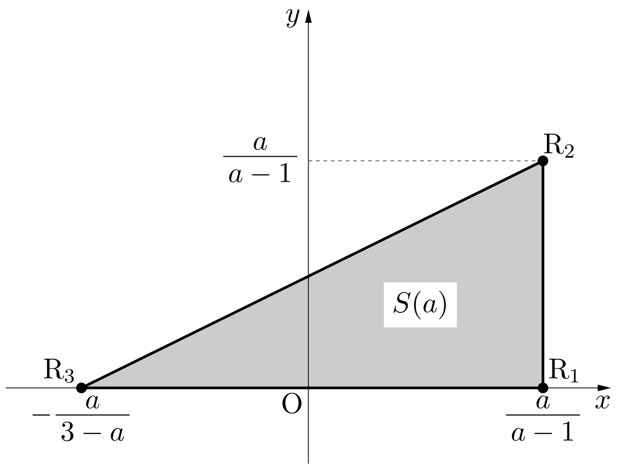
xy 平面との交点は z 座標が 0 のときなので

$$\begin{cases} a + t_1(a-1) = 0 \\ a + t_2(a-1) = 0 \\ a + t_3(a-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{a}{1-a} \\ t_2 = \dfrac{a}{1-a} \\ t_3 = \dfrac{a}{3-a} \end{cases}$$

これらを上のベクトル方程式に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR_1}} = \left(\frac{a}{a-1}, 0, 0\right), \overrightarrow{\mathrm{OR_2}} = \left(\frac{a}{a-1}, \frac{a}{a-1}, 0\right), \overrightarrow{\mathrm{OR_3}} = \left(-\frac{a}{3-a}, 0, 0\right)$$

となる。以上より，3 点 $\mathrm{R_1}$，$\mathrm{R_2}$，$\mathrm{R_3}$ は下図のようになるので



$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a-1}\left(\frac{a}{a-1} + \frac{a}{3-a}\right)$$

$t=\dfrac{1}{a}$ とおくと，$\dfrac{1}{3}<t<1$ であり

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{a}}-\frac{1}{1-3\cdot\frac{1}{a}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1-3t}\right) \end{aligned}$$

となるので，増減を調べるために t で微分をすると

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(1-t)^2}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1-3t}\right)+\frac{1}{1-t}\left(\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{3}{(1-3t)^2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2(1-t)^3(1-3t)^2}\left\{2(1-3t)^2-(1-t)(1-3t)-3(1-t)^2\right\} \\ &= \frac{1}{(1-t)^3(1-3t)^2}(2t-1)(3t+1) \end{aligned}$$

よって S の増減は以下の表となる。

t	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{dt}$	／	$-$	0	$+$	／
S	／	↘	4	↗	／

したがって，$t=\dfrac{1}{2}$，つまり $a=2$ で最小値 4 をとる。

別解解説

図形的なイメージが全くつかめなくとも，ベクトル表示を導入することで機械的に処理することができる。この問題では座標が与えられているが，座標が与えられていない場合も自分で座標軸を導入しベクトルで解くことは有用である。また，直線のパラメータ表示は是非とも使い方をマスターしておこう。微分を行う際，計算量を減らすために変数の逆数をとってから微分してもよい。

（木村圭佑，佐藤賢志郎，不死原大知）

2016 年度 東京大学 前期 数学

第 4 問　複素数平面と鋭角三角形

出題範囲	複素数平面
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	文科第 1 問と同じく，鋭角三角形に関する出題となった。鋭角という条件を数式においてうまく言い換えることが問題を解く上での鍵となっただろう。

解答

まず 3 点 A，B，C が三角形を構成する条件を考える。

3 点が異なる点であり，かつ同一直線上に存在しないとき，3 点は三角形を構成する。この条件は，次の式と同値である。

$$\begin{cases} z \neq 1 \\ z \neq z^2 \\ 1 \neq z^2 \\ \text{全ての実数 } k \text{ に対して } z^2 - 1 \neq k(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ z \neq 1, 0 \\ z \neq 1, -1 \\ Im(z) \neq 0 \end{cases}$$

ただし，複素数 w の虚部を $\mathrm{Im}(w)$ とした。以上より，z は実数でない。

$$\angle \mathrm{A} = \left|\arg\left(\frac{z^2-1}{z-1}\right)\right| = |\arg(z+1)|$$

$$\angle \mathrm{B} = \left|\arg\left(\frac{z^2-z}{1-z}\right)\right| = |\arg(-z)|$$

$$\angle \mathrm{C} = \left|\arg\left(\frac{1-z^2}{z-z^2}\right)\right| = \left|\arg\left(\frac{1}{z}+1\right)\right|$$

以下，複素数 w の実部を $\mathrm{Re}(w)$ とする。複素数 w の偏角について[1] $0 \leqq |\arg(w)| \leqq \pi$ の範囲で

$$0 < |\arg(w)| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(w) > 0 \\ \mathrm{Im}(w) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w + \overline{w} > 0 \\ w \text{ は虚数} \end{cases}$$

[1] 鋭角であることを

$$0 < |\arg(w)| < \frac{\pi}{2}$$

に言い換えている。これは，w の実部が正であることと同値であり，$w = a + bi(a, b \text{ は実数})$ とおくと

$$w + \overline{w} = (a+bi) + (a-bi) = 2a = 2\mathrm{Re}(w)$$

$$\therefore \mathrm{Re}(w) > 0 \Leftrightarrow w + \overline{(w)} > 0$$

が成立する。

であることに注意すると, $\angle\mathrm{A}, \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{C}$ が全て鋭角となるとき

$$0 < \angle\mathrm{A} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z+1) > 0 \\ z+1 \text{ は虚数} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) > -1 \\ z \text{ は虚数} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdot \text{①}$$

$$0 < \angle\mathrm{B} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(-z) > 0 \\ -z \text{ は虚数} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) < 0 \\ z \text{ は虚数} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdot \text{②}$$

$$0 < \angle\mathrm{C} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}+1\right) > 0 \\ \dfrac{1}{z}+1 \text{ は虚数} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{z}+1\right) + \left(\dfrac{1}{\overline{z}}+1\right) = \dfrac{2z\overline{z}+z+\overline{z}}{z\overline{z}} > 0 \\ \dfrac{1}{z} \text{は虚数} \end{cases}$$

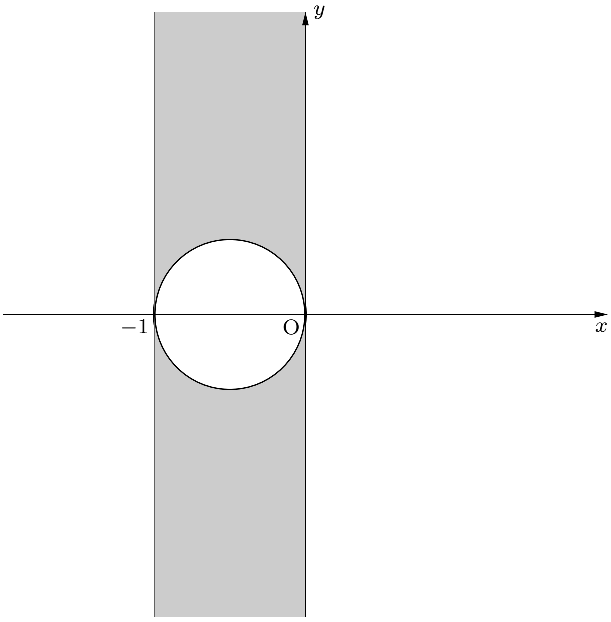
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z\overline{z} + \dfrac{z}{2} + \dfrac{\overline{z}}{2} + \dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} \text{は虚数} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|z+\dfrac{1}{2}\right|^2 > \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ z \text{ は虚数} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdot \text{③}$$

以上をまとめると

$$\begin{cases} \text{①} \Leftrightarrow z \text{ は実部が } -1 \text{ より大きい虚数} \\ \text{②} \Leftrightarrow z \text{ は実部が } 0 \text{ より小さい虚数} \\ \text{③} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \text{ を中心とする半径} \dfrac{1}{2} \text{の円の外部 (境界含まず)} \end{cases}$$

① かつ ② かつ ③ を図示すると以下の網掛部である (境界含まず)。



解説

三角形の 3 つの内角が鋭角であることを arg を用いて表現している。複素数 (0 を除く) の掛け算は回転と拡大 (または縮小) を表すので，角度の問題に対して非常に有用である。具体的には z_1，$z_2 \fallingdotseq 0$ を極形式で

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{cases}$$

と表したときに，

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

となる。これを利用し，それぞれの角度表現を簡略化し計算をすると，上記のような解答になる。

別解

複素数 w の実部を $\mathrm{Re}(w)$ とする。z が実数のとき，3 点 A，B，C は三角形を構成しないので，z は虚数としてよい。このとき

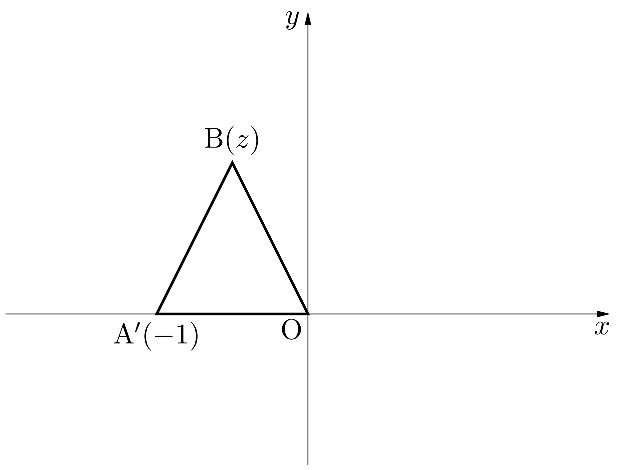
$\triangle \mathrm{A}(1)\mathrm{B}(z)\mathrm{C}(z^2) \equiv \triangle \mathrm{O}(0)\mathrm{B}'(z-1)\mathrm{C}'(z^2-1)$　(実軸方向に -1 平行移動した)

$\backsim \triangle \mathrm{O}(0)\mathrm{A}(1)\mathrm{D}(z+1)$　($z \fallingdotseq 1$ から，$z-1 \fallingdotseq 0$ より)[2]

$\equiv \triangle \mathrm{O}(0)\mathrm{A}'(-1)\mathrm{B}(z)$　(実軸方向に -1 平行移動した)

[2] $z-1 \fallingdotseq 0$ より，$z-1$ で割ることは，回転拡大 (または回転縮小) を表す

よって，$\triangle \mathrm{A}(1)\mathrm{B}(z)\mathrm{C}(z^2) \backsim \triangle \mathrm{O}(0)\mathrm{A}'(-1)\mathrm{B}(z)$ であり，$\triangle \mathrm{OA'B}$ は次のようになる。



$\triangle \mathrm{OA'B}$ が鋭角三角形になる条件を調べる。

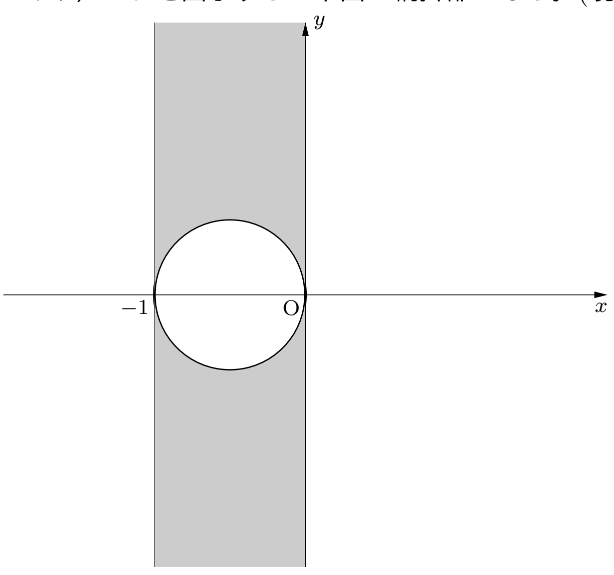
(ｉ) $\angle \mathrm{A'} < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\angle \mathrm{O} < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 < \mathrm{Re}(z) < 0$

(ii) $\angle \mathrm{B} < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ 円周角の定理より，点 B が線分 $\mathrm{A'O}$ を直径とする円の外側にある。

(ｉ)(ii) より，求める z の条件は

$$-1 < \mathrm{Re}(z) < 0 \quad \text{かつ} \quad \left| z + \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}$$

であり，これを図示すると下図の網掛部となる。(境界含まず)



別解解説

$\triangle \mathrm{ABC}$ を，平行移動と回転拡大 (縮小) を組み合わせて，鋭角三角形になる条件が考えやすい相似な三角形 ($\triangle \mathrm{OA'B}$) に移して考えた。鋭角という条件を図形的に考えるときは，円周角の定理が便利である。

（不死原大知，松下祐樹，青木徹）

2016 年度 東京大学 前期 数学

第 5 問　平方根と有限小数

出題範囲	整数
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	大量の添え字に面食らってしまうが，落ち着いて読み解けば大した話はしていない。$0.a_1a_2\cdots a_k$ というのはざっくり言ってしまえば「(0 より大きく 1 より小さい) 有限小数」である。具体的な小数を当てはめて考えれば難しくないだろう。一見 (1)(2) が (3) の誘導に見えるが，あまり深く考えず，それぞれが独立した小問であると考えた方がよいだろう。

解答

$0.a_1a_2\cdots a_k = x$ とおくと，$0 < x \leqq 1 - 10^{-k}$ である。[1]

[1] $0.a_1a_2\cdots a_k = x$ のようにおくのは表記を楽にするための工夫である。

(1) 問題文の不等式を変形すると次のようになる。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$
$$\Leftrightarrow x \leqq \sqrt{n} - 10^k < x + 10^{-k}$$
$$\Leftrightarrow 10^k + x \leqq \sqrt{n} < 10^k + x + 10^{-k}$$ [2]
$$\Leftrightarrow (10^k + x)^2 \leqq n < (10^k + x + 10^{-k})^2$$
$$\Leftrightarrow 10^{2k} + 2x\cdot 10^k + x^2 \leqq n < 10^{2k} + 2x\cdot 10^k + 2 + (x + 10^{-k})^2$$
$$\Leftrightarrow y + x^2 \leqq n < y + 2 + (x + 10^{-k})^2 \quad \cdots\cdots \text{①}$$ [3]

[2] $\sqrt{n}$ を 2 乗したいという発想である。

[3] $n > 0$ より，これは同値である。

ただし，最後の行で $10^{2k} + 2x\cdot 10^k = y$ とおいた。

$2x\cdot 10^k$ は自然数であるので，y は自然数である。さらに，$0 < x^2 < (x + 10^{-k})^2 \leqq 1$ であり，y が整数であることから，① を満たす正の整数 n は $y+1$ と $y+2$ である。すなわち $a_1a_2\cdots a_k = a_1\cdot 10^{k-1} + a_2\cdot 10^{k-2} + \cdots + a_k$ として

$$10^{2k} + 2\times a_1a_2\cdots a_k + 1 \quad と \quad 10^{2k} + 2\times a_1a_2\cdots a_k + 2$$

である。

(2)【証明】問題文の不等式を変形すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m}-p < 0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}\\
&\Leftrightarrow x \leqq \sqrt{m}-p < x+10^{-k}\\
&\Leftrightarrow p+x \leqq \sqrt{m} < p+x+10^{-k} \text{[4]}\\
&\Leftrightarrow (p+x)^2 \leqq m < (p+x+10^{-k})^2 \text{[5]} \quad \cdots\cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

② 式の最左辺を A，最右辺を B とおくと，② $\Leftrightarrow$ $A \leqq m < B$ であり，$B-A$ を求めると

$$
\begin{aligned}
B-A &= (p+x+10^{-k})^2-(p+x)^2\\
&= 2(p+x)10^{-k}+10^{-2k}\\
&> 2p\times 10^{-k}\\
&\geqq 10^k \times 10^{-k} \quad (\because p \geqq 5\times 10^{k-1})\\
&= 1
\end{aligned}
$$

以上より，$B-A>1$ であるため，$A \leqq m < B$ をみたす正の整数 m は確かに存在する。[6] (証明終)

(3)【証明】背理法で示す。

$$\sqrt{s}-\left[\sqrt{s}\right] = 0.a_1a_2\cdots a_k$$

をみたす正の整数 s が存在すると仮定する。このとき，

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{s} = \left[\sqrt{s}\right] + 0.a_1a_2\cdots a_k\\
&\Leftrightarrow s = \left[\sqrt{s}\right]^2 + 2\times\left[\sqrt{s}\right]\times 0.a_1a_2\cdots a_k + (0.a_1a_2\cdots a_k)^2
\end{aligned}
$$

右辺の値について，これを小数で書き表したとき，小数点以下 $2k$ 桁目の数字は a_k^2 の 1 の位と一致する。条件より $a_k \fallingdotseq 0$ であるから，小数点以下 $2k$ 桁目の数字は 0 ではない。よって右辺は整数ではない。一方，左辺は整数であるため，矛盾する。

以上より，条件をみたす正の整数 s は存在しない。 (証明終)

[4] 同じく $\sqrt{m}$ を 2 乗したいという発想である。

[5] $m>0$ より，これは同値である。

[6] m が存在しないと仮定すると，自然数が 1 おきに現れることに矛盾する。

解説

(1) 平方根を含む不等式なので，平方根を残して式全体を 2 乗してみる。すると，$0 < x \leqq 1 - 10^{-k}$ と n が自然数という条件から，n を求めることができる。

(2) (1) と同様にルートを残して式全体を 2 乗し，p の範囲に気をつければ，証明することができる。

(3) この問でもやっていることは (1)(2) と変わらない。平方根を残して両辺を 2 乗すればいい。また，否定的な命題の証明に対しては，背理法が有効であることを思い出そう。

別解

(3)【証明】背理法で示す。[7]

$$\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1a_2\cdots a_k$$

を満たす正の整数 s が存在したと仮定する。

このとき，$\sqrt{s} = [\sqrt{s}] + 0.a_1a_2\cdots a_k$ は有理数なので，互いに素な正の整数 p, q を用いて，$\sqrt{s} = \dfrac{p}{q}$ と書ける。辺々 2 乗すると

$$s = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow sq^2 = p^2$$

この式から，q を素因数分解をした時に現れる素因数は全て p に含まれることが分かる。p, q が互いに素なので，$q = 1$ しかありえず，このとき $s = p^2$ なので

$$\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = p - p = 0$$

となり，$\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1a_2\cdots a_k \fallingdotseq 0$ ($a_k \fallingdotseq 0$ より) と矛盾する。

以上より，条件を満たす正の整数 s は存在しない。 (証明終)

[7] 平方数でない自然数の平方根が有理数でないことの証明である。
つまり (左辺)$\notin \mathbb{Q}$, (右辺)$\in \mathbb{Q}$($\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合を表す) という論法によって矛盾を導き出している。この証明は，よく出てくるテクニックなので知っておいて損はないだろう。

別解解説

問題文がわかりにくいが，要するに，$\sqrt{a}$ が「有限小数 (整数は除く) になる」ような自然数 a は存在しないことを示せばよい。「$\sqrt{s} - [\sqrt{s}]$ が有限小数にならない」という主張を「$\sqrt{s} - [\sqrt{s}]$ が有理数にならない」という主張に広げて証明するのは，一度は目にしたことがあるだろう。「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」と全く同様の手法で解決できる。

（木村圭佑，佐藤賢志郎，不死原大知）

2016 年度 東京大学 前期 数学

第 6 問　立体図形における線分の通過領域

出題範囲	立体図形／数Ⅲ積分
難易度	★★★★☆
所要時間	30 分
傾向と対策	z 軸に関する回転対称性を考えれば，得られる通過部分の立体は回転体になることがわかるだろう。積分のパラメーターのとり方は様々に存在するので，適宜使い分けられるようにしておくことが望ましい。

解答

領域 K のうち，$z \geqq 1$ に含まれる部分を領域 K' とする。

このとき点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ が領域 K' に含まれるとすると，点 B を適当に取ること

により点 P が線分 AB 上に乗ることから，点 P は次の場合分けのもと，それ

ぞれ次の条件をみたす。

(i) P=C のとき，P(0,0,1)

(ii) P≠C のとき，ある実数 t が存在し，$t\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}}$

以下，後者の場合について考える。

$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = (0,0,1) - (x,y,z) = (-x,-y,1-z)$ と，$t\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PA}} \\ &= (x,y,z) + t(-x,-y,1-z) \\ &= ((1-t)x, (1-t)y, z + t(1-z))\end{aligned}$$

ここで，点 A は平面 $z=0$ 上に存在することから，$z + t(1-z) = 0$ となる。

$z = 1$ とすると，$1 + t(1-1) \neq 0$ となりこの式は成り立たない。

よって，両辺を $1-z$ で割ってよく

$$t = \frac{z}{z-1}$$

をみたす。

ここで，点 P は線分 AB 上に存在することから $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| \leqq 2$ となるので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2 \leqq 4$$

$$t^2\left\{x^2+y^2+(z-1)^2\right\} \leqq 4$$

$$\frac{z^2}{(z-1)^2}\left\{x^2+y^2+(z-1)^2\right\} \leqq 4$$

ここで $z \geqq 1 > 0$ であるから両辺を $\dfrac{z^2}{(z-1)^2}$ で割って

$$x^2+y^2+(z-1)^2 \leqq \frac{4(z-1)^2}{z^2}$$

$$x^2+y^2 \leqq (z-1)^2\left(\frac{4}{z^2}-1\right)$$

以上より，上式をみたす点 P の z 座標は $1 \leqq z \leqq 2$ に限られる。

領域 K' の平面 $z=u \quad (1 \leqq u \leqq 2)$ による断面は，原点を中心とする半径 $(u-1)\sqrt{\dfrac{4}{u^2}-1}$ の円であることから，K' の体積は

$$\begin{aligned}\int_1^2 \pi(u-1)^2\left(\frac{4}{u^2}-1\right)du &= \pi\int_1^2\left(-u^2+2u+3-\frac{8}{u}+\frac{4}{u^2}\right)du\\ &= \pi\left[-\frac{1}{3}u^3+u^2+3u-8\log|u|-\frac{4}{u}\right]_1^2\\ &= \left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)\pi\end{aligned}$$

解説

領域 K の体積を求めるためには，球のように簡単な図形であれば不要だが，一般にはその式を得る必要がある。

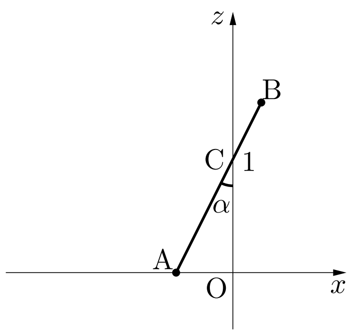
ある点 P が領域 K に含まれるということは，点 B を適当にとると点 P が線分 AB 上に存在するということに注目して，領域 K の式を求める (解答では領域 K' の式で十分のためそちらを求めた)。

次に得られた図形を積分して求めるが，これは z 方向での積分が最も容易だろう。

別解 1

K が z 軸に関して回転対称性を持つことから，まず $y=0$ で xz 平面のみで線分 AB の通過領域を考え，その領域を z 軸に関して回転させた立体が K である。[1]

[1] A が xy 平面を動き回るのでは自由度が多く，計算が煩雑になる。A の動きに制限をつけることで立体問題を平面問題へと持ち込むことができる。



図のように線分 AB と z 軸のなす角を α とおくと，

$$1 = \mathrm{OC} \leqq \mathrm{AC} = \frac{1}{\cos\alpha} \leqq 2$$

であることから $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{3}$ であり，

$$\mathrm{AC} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{CB} = 2 - \mathrm{AC} = 2 - \frac{1}{\cos\alpha}$$

このことから，B の座標を (X, Y, Z) とおくと，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= (X, Y, Z) \\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}} &= (0, 0, 1) + \left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| (\sin\alpha, 0, \cos\alpha) \\ &= (2\sin\alpha - \tan\alpha, 0, 2\cos\alpha) \end{aligned}$$

と書ける。ここで新たに

$$Z = 2\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{Z}{2}$$

を用いて X を書き直すと，α の範囲から $\sin\alpha > 0$ であるので，[2]

$$\begin{aligned} X = 2\sin\alpha - \tan\alpha &= \left(2 - \frac{1}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha \\ &= \left(2 - \frac{2}{Z}\right)\sqrt{1 - \frac{Z^2}{4}} \end{aligned}$$

[2] 非常にテクニカルな変形である。こう置き換えることで面倒な三角関数の積分を行わず，多項式の積分のみに帰着させることができる。

α が $0 \to \dfrac{\pi}{3}$ と変化するにつれて Z のとり得る値は $1 \to 2$ と変化する。
$1 \leqq Z \leqq 2$ の範囲において，この曲線と z 軸の囲む領域を z 軸で回転させた立

体の体積を求めればよく，その体積 V を計算すると

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^2 \pi X^2 dZ \\
&= \pi \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{Z}\right)^2 \left(1 - \frac{Z^2}{4}\right) dZ \\
&= 4\pi \int_1^2 \left(-\frac{Z^2}{4} + \frac{Z}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{Z} + \frac{1}{Z^2}\right) dZ \\
&= 4\pi \left[-\frac{Z^3}{12} + \frac{Z^2}{4} + \frac{3}{4}Z - 2\log Z - \frac{1}{Z} \right]_1^2 \\
&= \left(\frac{17}{3} - 8\log 2\right)\pi
\end{aligned}$$

別解 1 解説

問題文の数値設定のおかげで $1:2:\sqrt{3}$ の三角形が現れることに着目して，角度がきれいに表せそうだという直感から，点 A の座標ではなく，z 軸となす角をパラメーターに取る手段が考えられる。点 B のパラメーター表示が求まった後，Z について解かずにそのまま積分計算を進めてもよいが，適当な置換を行うことによって上の解法と同じ積分計算に帰着する。

別解 2

z 軸まわりの回転に関して対称な立体になるので，xz 平面と平行な平面で切って考えればよい。点 A の座標を $(s,0)(s \geqq 0)$，点 B の座標を (x,z) とする。

$\mathrm{AB}=2$ であるから，B と C が一致するとき s は最大となり，その値は，

$$s^2+1=4 \quad s \geqq 0 \text{ より}, s=\sqrt{3}$$

よって，$0 \leqq s \leqq \sqrt{3}$ である。

$\mathrm{C}(0,1)$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x-s, z), \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-s, 1)$$

となり，点 A,B,C は同一直線上にあるから，実数 $t(t \geqq 1)$ を用いて

$$t\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表せる。つまり

$$t(-s,1) = (x-s,z) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

と表せる。$\mathrm{AB}=2$ であるので，$\left|t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = 4$ だから，

$$t^2(s^2+1)=4$$

$t \geqq 1$ より

$$t = \frac{2}{\sqrt{s^2+1}}$$

である。① より

$$x = s - \frac{2s}{\sqrt{s^2+1}}, z = \frac{2}{\sqrt{s^2+1}}$$

となる。$0 \leqq s \leqq \sqrt{3}$ より $1 \leqq z \leqq 2$ である。よって，求める体積 V は

$$V = \pi \int_1^2 x^2 dz$$

ここで，$dz = \dfrac{-2s}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}} ds$ であるから

$$\int_1^2 x^2 dz = \int_{\sqrt{3}}^0 \left(s - \frac{2s}{\sqrt{s^2+1}}\right)^2 \cdot \left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right\} ds$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(s^2 - \frac{4s^2}{\sqrt{s^2+1}} + \frac{4s^2}{s^2+1}\right) \cdot \frac{2s}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}} ds$$

$s = \tan\theta$ とおくと，z が $0 \to \sqrt{3}$ と変化するとき θ は $0 \to \dfrac{\pi}{3}$ と変化し，

$ds = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ であるから，

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan^2\theta - \frac{4\sin^2\theta}{\cos\theta} + 4\sin^2\theta\right) \cdot 2\sin\theta\cos^2\theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2\sin^3\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} + 8\sin^3\theta\right) d\theta$$

$\cos\theta = t$ とおくと，θ が $0 \to \dfrac{\pi}{3}$ と変化するとき t は $1 \to \dfrac{1}{2}$ と変化し，

$\sin^3\theta = \sin\theta(1-t^2)$，$dt = -\sin\theta d\theta$ であるから

$$\int_1^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{2(t^2-1)}{t^2} - \frac{8(t^2-1)}{t} + 8(t^2-1)\right\} dt$$

$$= \int_1^{\frac{1}{2}} \left(-10 - 8t + 8t^2 - \frac{2}{t^2} + \frac{8}{t}\right) dt$$

$$= \left[-10t - 4t^2 + \frac{8}{3}t^3 + \frac{2}{t} + 8\log t\right]_1^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(-5 - 1 + \frac{1}{3} + 2 - 8\log 2\right) - \left(-10 - 4 + \frac{8}{3} + 2 + 0\right)$$

$$= \frac{17}{3} - 8\log 2$$

したがって，

$$V = \left(\frac{17}{3} - 8\log 2\right)\pi$$

別解 2 解説

計算が煩雑ではあるが，素直に点 A の座標を文字でおいた解法を示した。この場合，x，z の座標を点 A の座標 ($ここでは$ s) を媒介変数にして表すことになる。点 A，B，C が一直線上にあることから

$$t\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

が成り立つことがポイントである。$\mathrm{AB} = 2$ であることから t を s で表して，(x, z) を媒介変数表示する。また，s の範囲には注意しよう。

続いて $\displaystyle\int_1^2 x^2 dz$ を媒介変数に変換して積分をすることになるが，標準的であるとはいえ少し大変かもしれない。分母の $s^2 + 1$ という形を見て，$\tan\theta$ に置換することは基本である。その後また置換があるが，どの項も $\cos\theta$ を置換することで解決する。$\sin 3\theta$ は 3 倍角の公式を用いてもよい。符号の入れ替えが多いので落ち着いて計算しよう。

（青木徹，佐藤賢志郎）