

2015 年度 東京大学 前期 物理

第 1 問 ひもでつながれた 2 つの小球の運動

出題範囲	運動方程式・円運動
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	東大では頻出の、重心運動と相対運動で分けて考えると見通しがよい二体問題である。この類の問題は、一見複雑な運動をしているようでも、重心の運動や重心からそれぞれの物体の運動を見ると単純であることが多い。本問の I は典型問題であるため完答しなければならない。II は、重心から見た各小球は重力と慣性力のつり合いにより等速円運動しているということに気づくことができれば、最後までたどり着くことも難しくはないだろう。

解説

I

(1)

ひもと天井がなす角度が θ のときの小球 A の速さを $v(\theta)$ とすると、初めの小球 A の点を位置エネルギーの基準点として、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m \{v(\theta)\}^2 = mgl \sin \theta$$

$v(\theta) \geq 0$ より、

$$v(\theta) = \sqrt{2gl \sin \theta}$$

(2)

小球 A が最下点に達したときの速さは (1) の解答に $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入して、

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2gl}$$

である。求める張力 T_0 とすると、円運動の運動方程式より、

$$m \cdot \frac{(\sqrt{2gl})^2}{l} = T_0 - mg$$

$$\therefore T_0 = 2mg + mg = 3mg$$

(3)

加速度の向きは円運動の向心方向であるから、鉛直上向きである。大きさは、

$$\frac{(\sqrt{2gl})^2}{l} = 2g$$

II

(1)

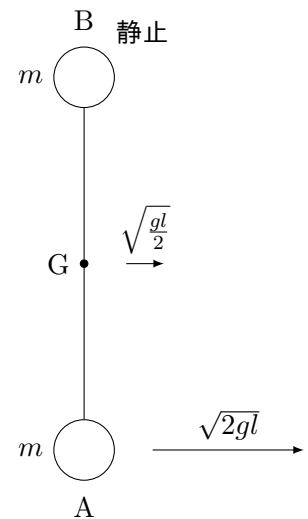
2つの小球からなる物体系にはたらく外力は重力のみであるから、重心 G の加速度は鉛直下向きに g である。

(2)

時刻 $t = 0$ において、小球 A は水平右向きに速さ $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2gl}$ で運動し、小球 B は静止している。よって、重心 G の速度 v_G は、向きは水平右向きであり、速さは、

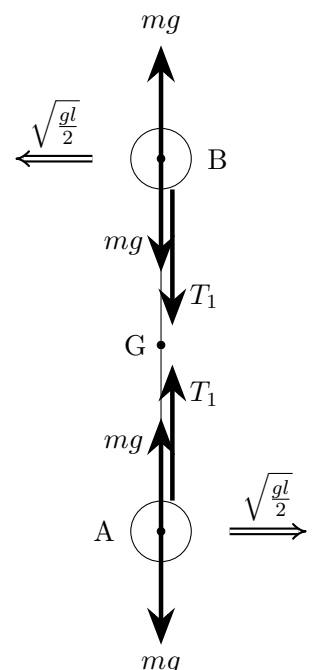
$$|v_G| = \frac{m \cdot 0 + m \cdot \sqrt{2gl}}{m + m} = \frac{1}{2}\sqrt{2gl} = \sqrt{\frac{gl}{2}}$$

である。したがって、重心 G に対する小球 A, B の相対速度は、いずれも大きさは $\sqrt{\frac{gl}{2}}$ であり、向きは小球 A が水平右向き、小球 B が水平左向きである。



(3)

鉛直下向きに加速度 g で運動する重心 G から小球の運動を観察すると、それぞれの小球には鉛直上向きに慣性力 mg がはたらいっている。よって、それぞれの小球にはたらく力のうち重力と慣性力は大きさが等しく向きが反対なので打ち消し合うため、考えるのはひもの張力 T_1 のみでよく、その向きは重心 G の方向である。ゆえに、2個の小球はひもの張力 T_1 ($=$ 一定) を向心力として重心 G を中心とする半径 $\frac{l}{2}$ の等速円運動を行う。それぞれの小球の



重心 G に対する相対速度は (2) より $\sqrt{\frac{gl}{2}}$ であるので、円運動の運動方程式より、

$$m \cdot \frac{\left(\sqrt{\frac{gl}{2}}\right)^2}{\frac{l}{2}} = T_1$$

$$\therefore T_1 = mg$$

(4)

時刻 $t = 0$ において、重心 G ではなく静止している観察者から見る。小球 A, B ともに水平方向には力ははたっていないため、加速度の水平方向成分は 0 である。鉛直方向について、小球 A, B の運動方程式は、鉛直下向きを正として、

$$\text{小球 A : } ma_A = mg - T_1$$

$$\text{小球 B : } ma_B = mg + T_1$$

である。 $T_1 = mg$ を代入して両辺 m で割ると、

$$a_A = 0, a_B = 2g \text{ (鉛直下向き)}$$

(5)

重心 G から見た等速円運動の角速度を ω とすると、(2), (3) より、

$$\sqrt{\frac{gl}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \omega$$

$$\therefore \omega = \frac{\sqrt{\frac{gl}{2}}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

である。初めて小球 A と小球 B の高さが等しくなるのは、それぞれの小球が時計回りに角度 $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したときである。よって、求める時刻 t_1 は、小球が角度 $\frac{\pi}{2}$ だけ回転するのに要した時間で、

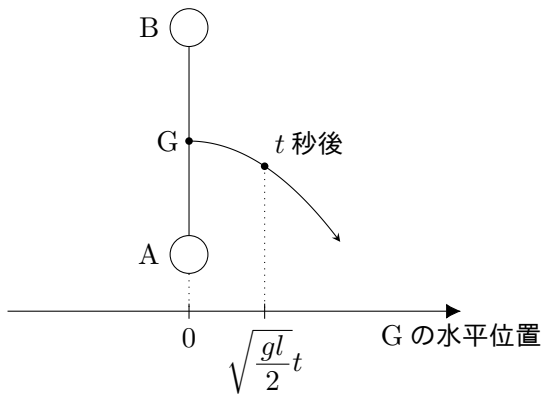
$$t_1 = \frac{\frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

(6)

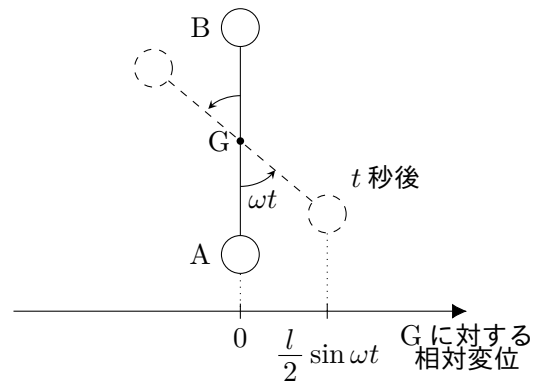
重心 G の速度の水平成分は右向きに $\sqrt{\frac{gl}{2}}$ で一定であるから、時刻 t における重心 G の水平位置は、 $\sqrt{\frac{gl}{2}}t$ である。また、小球 A は重心 G に対して反時計回りに等速円運動していて、時刻 $t = 0$ で水平方向の A の G に対する相対変位が 0 であることから、時刻 t における水平方向の相対変位は $\frac{l}{2} \sin \omega t$ である。したがって、時刻 t における小球 A の水平位置は、

$$\sqrt{\frac{gl}{2}}t + \frac{l}{2} \sin \omega t = \sqrt{\frac{gl}{2}}t + \frac{l}{2} \sin \sqrt{\frac{2g}{l}}t$$

重心運動



相対運動



(大泉雄司, 松井浩介)

2015年度 東京大学 前期 物理

第2問 磁場中を落下する複数の導体棒

出題範囲	電磁誘導
難易度	★★★☆☆
所要時間	25分
傾向と対策	<p>磁場中を落下する導体棒の問題。この問題では導体棒が N 個あり、並列回路を形成している。この手の問題では、まず落下するときに生じる棒ごとの誘導起電力の向きと大きさを考え、導体棒を抵抗と電池の直列接続として回路図を描くとよい。</p> <p>I では、導体棒は1つしか動かないため、残りの導体棒は単なる抵抗になり、さほど難しくはない。棒1自身の抵抗を忘れないように。使う式は、回路の方程式と棒1の運動方程式。</p> <p>II では、棒1を上を一定の速さで動かす。Iと同じようにして電流を求め、残りの棒の運動方程式を立てて静止する条件を求める。</p> <p>III では、1つ以外の棒をすべて落下させる。この場合も、Iと同じく導体棒を抵抗と電池の直列接続として回路図を描き、回路の方程式と落下しているいずれかの導体棒の運動方程式を立てるとよい。回路の方程式は有意な式になるように、静止している導体棒を含むように立てる。</p> <p>IV では、ついにすべての導体棒が落下することになる。今までと違って各々の導体棒の速度、加速度が異なるため、どの導体棒で回路の方程式を立てるか選択する必要が出てくる。最後のグラフ選択では、(2)で得られた解答の意味合いを考える必要がある。</p>

解説

I

具体的に問題を解く前に、状況を簡単に整理する。この問題では棒1が斜面を下っている。このとき、棒1は磁場中を横切ることになるから、棒1に誘導起電力が生じる。これによって図の棒とレールには電流が流れる。このとき、棒1には磁場と電流によって電磁力が生じることになる（棒2～ N にも生じているが、Iでは棒2～ N は固定されているので考えない）。棒は等速で動いているのだから、はたらく力（電磁力、重力、垂直抗力）がつり合っていることを式にすれば答えが出るだろうと予測できる。

まとめると、「棒が動く→誘導起電力が生じる→電流が流れる→電磁力が生じる」という流れである。

(1)

棒 1 は磁場中を横切るので、ローレンツ力により誘導起電力が生じる。
その大きさ V_1 は、

$$V_1 = BLu \cos \theta$$

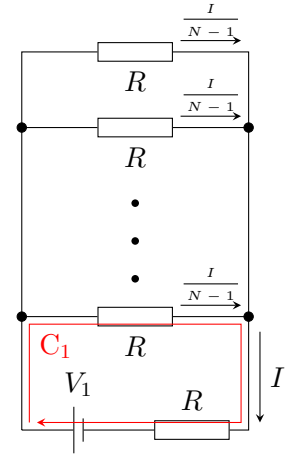
であり、向きは右図のようになる。

対称性より、右図のように、棒 2~ N に流れる電流は $\frac{I}{N-1}$ になる。
ここで、図での閉回路 C_1 における回路の方程式を立てて、

$$V_1 = \frac{I}{N-1}R + IR$$

以上 2 式から V_1 を消去して、

$$I = \frac{(N-1)BLu \cos \theta}{NR}$$



(別解)

合成抵抗の考え方をを用いても答えを導ける。本質的には上記の解法と同じことをしているのだが、別解として紹介しておく。

上の回路では、 $N-1$ 個の抵抗が並列につながれており、それにもう 1 つの抵抗が直列につながれている。このとき、回路全体の合成抵抗 R_1 は、

$$R_1 = R + \frac{R}{N-1}$$

となるから、オームの法則 $V_1 = R_1 I$ を I について解けば、 I が求まる。(以下略)

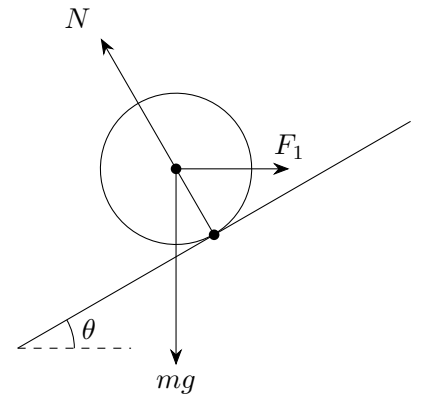
(2)

電磁力の向きは、磁場と電流の向きに垂直な方向に生じることに注意する。このとき、力は右図のようになる (F_1 は電磁力) から、斜面方向の力のつり合いの式を立てて、

$$F_1 \cos \theta = mg \sin \theta$$

ただし、 $F_1 = IBL$ である。これに (1) の結果を代入して整理して、

$$u = \frac{NmgR \sin \theta}{(N-1)(BL \cos \theta)^2}$$



II

基本的な考え方は I と同じである。

ローレンツ力により生じる誘導起電力の大きさ V_2 は、

$$V_2 = BLw \cos \theta$$

であり、向きは右図のようになる。

棒 2~ N に各々 I_2 の電流が流れているとすると、棒 1 にはそれらを足し合わせた $(N - 1)I_2$ が流れる。I (1) と同じように閉回路 C_2 における回路の方程式を立てて、

$$V_2 = (N - 1)I_2R + I_2R$$

ここで、棒 2~ N に生じる電磁力の大きさを F_2 としたとき、I (2) と同じように力のつり合いの式を立てて、

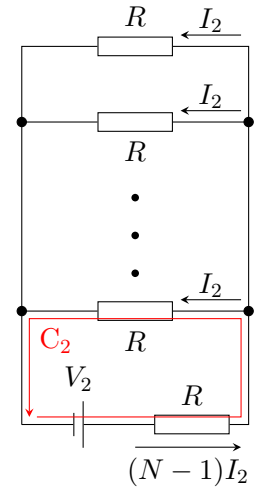
$$F_2 \cos \theta = mg \sin \theta$$

また、電磁力の大きさは、

$$F_2 = I_2BL$$

以上より V_2 , F_2 と I_2 を消去して、

$$w = \frac{NmgR \sin \theta}{(BL \cos \theta)^2}$$



III

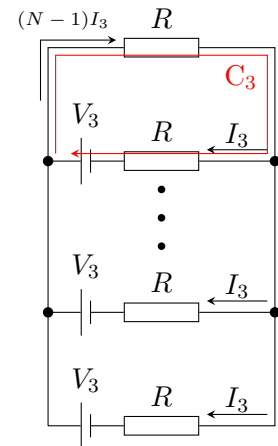
磁場中を横切る棒にはローレンツ力により誘導起電力が生じる。この場合では、棒 1~ $N - 1$ の各々に誘導起電力が生じる。その大きさを V_3 は、

$$V_3 = BLu' \cos \theta$$

であり、向きは右図のようになる。

ここで、棒 1~ $N - 1$ に流れる電流を I_3 とする。ただし P 側から Q 側に流れる方向を正とする。このとき、右図のようになるので、閉回路 C_3 について回路の方程式を立てて、

$$V_3 = (N - 1)I_3R + I_3R$$



ここで、棒 $1 \sim N - 1$ に生じる電磁力の大きさを F_3 としたとき、I (2) と同じように力のつり合いの式を立てて、

$$F_3 \cos \theta = mg \sin \theta$$

また、電磁力の大きさは、

$$F_3 = I_3 BL$$

以上より V_3 , F_3 と I_3 を消去して、

$$u' = \frac{NmgR \sin \theta}{(BL \cos \theta)^2}$$

IV

今までの 3 問とは異なり、各棒についての加速度と速度が登場している。

(1)

加速度を求める問題なので、運動方程式を用いる。棒 n ($n = 1, 2, 3, \dots, N$) に流れる電流を I_n とする (レール P 側から Q 側に流れる向きを正とする)。このとき、棒 n には重力、電磁力、垂直抗力の 3 つがはたっているの、レールに沿った方向について運動方程式を立てて、

$$ma_n = mg \sin \theta - I_n BL \cos \theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

これを $n = 1, 2, 3, \dots, N$ について足し合わせて、

$$m(a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_N) = Nmg \sin \theta - BL \cos \theta (I_1 + I_2 + I_3 \dots + I_N)$$

となる。

ところで、キルヒホッフの第一法則から、 $I_1 + I_2 + \dots + I_N = 0$ であるから、

$$m(a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_N) = Nmg \sin \theta$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_N = Ng \sin \theta$$

つまり、上記の運動方程式の右辺には重力の項と電磁力の項があるが、この式を足し合わせてみると、電磁力の項は消えて重力の項だけが残ることがわかった。

(2)

(1) の①式より,

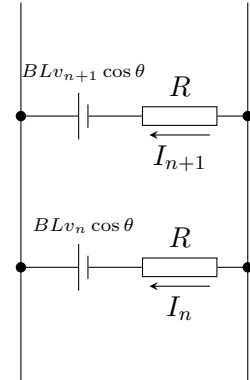
$$m(a_{n+1} - a_n) = -BL \cos \theta (I_{n+1} - I_n)$$

ここで、棒 n と棒 $n + 1$ と 2 つのレールに囲まれる右図のような閉回路において回路の方程式を考えて,

$$BLv_{n+1} \cos \theta - BLv_n \cos \theta = I_{n+1}R - I_nR$$

これを先ほどの式に代入して,

$$\begin{aligned} m(a_{n+1} - a_n) &= -BL \cos \theta (I_{n+1} - I_n) \\ &= -\frac{(BL \cos \theta)^2}{R} (v_{n+1} - v_n) \\ \therefore a_{n+1} - a_n &= -\frac{(BL \cos \theta)^2}{mR} (v_{n+1} - v_n) \end{aligned} \dots\dots \textcircled{2}$$



よって、求める定数は,

$$k = \frac{(BL \cos \theta)^2}{mR}$$

(3)

$a_k = \frac{dv_k}{dt}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) であるから, $K = \frac{(BL \cos \theta)^2}{mR}$ として, 以上を②式に代入する。

$$\frac{d(v_{n+1} - v_n)}{dt} = -K(v_{n+1} - v_n)$$

これはまさに $a = -Kv$ の形であるから, 問題文にあるとおり, 時間の経過とともに $v_{n+1} - v_n$ は 0 に近づく。つまり, 十分時間が経過すれば, $v_{n+1} = v_n$ になる。このとき, (2) で得た式より, $a_{n+1} - a_n$ も 0 に近づく, すなわち十分時間が経過すれば $a_{n+1} = a_n$ となる。これは $n = 1, 2, \dots, N - 1$ で成り立つから, $a_1 = a_2 = \dots = a_N$ となる。(1) の結果より,

$$a_1 = a_2 = \dots = a_N = g \sin \theta$$

つまり, 物体は等加速度で運動を続ける。これを満たす答えは, **ア**。

◆ Column

 $a = -Kv$ (K は正の定数) を満たす物体の運動

一般に加速度 a および速度 v をもつ物体の運動が $a = -Kv$ (K は正の定数) を満たす場合、 v は時間の経過とともに 0 に近づく。

このことの理由を数式を用いて簡潔に説明する。まず、定義から $a = \frac{dv}{dt}$ であるから、これを $a = -Kv$ に代入して、

$$\frac{dv}{dt} = -Kv$$

これは微分方程式と呼ばれる、2つの物理量 v と t との間に成り立つ式で、変数分離法という方法を使うと解くことができる。これを解くと、

$$v = Ae^{-Kt} \quad (A \text{ は定数})$$

K は正であるから、時間が経過するにつれて $Ae^{-Kt} \rightarrow 0$ となるので、確かに速度は 0 に近づくことがわかった。

(4)

(3) より、棒 1 と棒 N との速度は近づくから、その間の距離も一定値に近づく。よって、答えは **イ**。

(大泉雄司, 松井浩介, 森本亮太, 岡田和也)

2015年度 東京大学 前期 物理

第3問 気体が入った筒の水中での運動

出題範囲	浮力・気体の法則
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20分
傾向と対策	この問いで用いる式は、力のつり合い、状態方程式、熱力学第一法則ぐらいのものである。何の文字が使えるのかを確認して、適切な式を立てればよい。この問いは浮沈子についての問いで、その知識があれば運動のイメージがしやすく解答は楽になるはず。水圧や気圧の絡んだ力のつり合いに慣れてない人は、ピストンの出てくる熱力学の問題を解いておくとよい。

解説

I

(1)

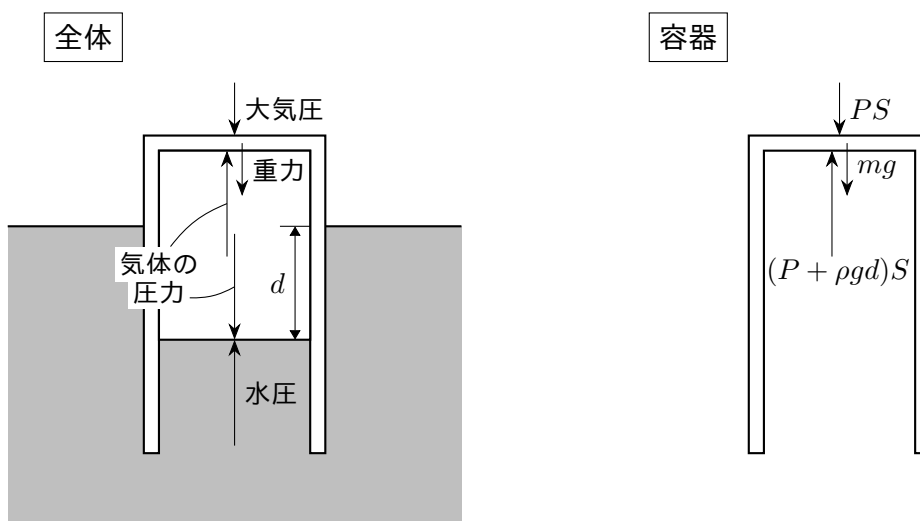
容器は静止しているため、力のつり合いを考える。容器にはたらいっている力は、重力、上面から受ける大気圧、容器内の気体から受ける圧力（気体のつり合いより、これは下面から受ける水圧に等しい）のみである。

よって、

$$mg + PS = (P + \rho dg)S$$

が成立する。よって、

$$d = \frac{m}{\rho S}$$



(別解)

あらかじめ、上面から受ける大気圧と下面から受ける水圧の差から、浮力を考え、(重力) = (浮力) という力のつり合いの式を考えてもよい。

(2)

水位が一致するように力を加えているので、運動方程式 (力のつり合い) を考えても、未知数である“支える力”を導入しなくてはならないため、答えは導かれない。

容器については考えずに、中の気体について考えるのがよい。水面が一致しているとき、温度は一定であり、圧力は P に等しい。よって、気体の状態方程式より、元の体積を V_0 として、
<つり合いの状態>

$$(P + \rho dg)V_0 = RT$$

<水面が一致しているとき>

$$PrV_0 = RT$$

上の 2 式が成立する。 RT を消して、

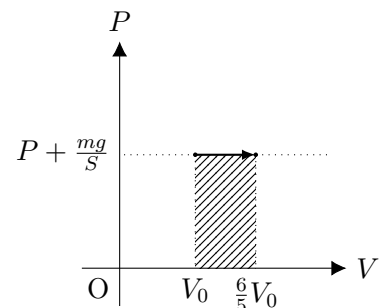
$$\therefore r = 1 + \frac{\rho dg}{P}$$

II

(1)

上昇している最中は、ゆっくりと上昇しているため、容器にかかる力は常につり合っていると考えてよい。よって、中の空気の圧力は $P + \frac{mg}{S}$ で一定である。 P - V 図は右のようになる。

$$\begin{aligned} W &= p\Delta V \\ &= \left(P + \frac{mg}{S}\right) \frac{V_0}{5} \\ &= \frac{RT}{5} \quad \left(\because \left(P + \frac{mg}{S}\right)V_0 = (P + \rho dg)V_0 = RT\right) \end{aligned}$$



(2)

気体の吸収した熱量は、

$$Q = \Delta U + W \quad (\text{熱力学第一法則})$$

によって求められる。

W は (1) で求めたので、次は ΔU を求めればよいことがわかる。ここで、中に入っている気体が、1 mol の単原子分子の理想気体であることから、

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{3}{2} R \Delta T \\ &= \frac{3}{2} p \Delta V \\ &= \frac{3RT}{10} \end{aligned}$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned} Q &= \frac{RT}{5} + \frac{3RT}{10} \\ &= \frac{1}{2} RT \end{aligned}$$

(別解) 定圧モル比熱の利用

単原子分子理想気体なので、

$$\begin{aligned} Q &= \frac{5}{2} R \Delta T \\ &= \frac{5}{2} R \frac{1}{5} T \\ &= \frac{1}{2} RT \end{aligned}$$

III

(1)

一般的に、水面から容器の上部までを x 、気体の下面までを y として、容器の動きを考える。このときに容器にはたらく力は、重力、上面にかかる水圧、中の気体から受ける気圧である。下向きを正にとって、容器の加速度を α とすると、容器の運動方程式は、

$$m\alpha = -(P + \rho g y)S + mg + (P + \rho g x)S$$

となる。

$$\therefore \alpha = -\frac{\rho g(y-x)S}{m} + g$$

また、気体の状態方程式は、

$$(P + \rho g y)S(y - x) = RT$$

以上の 2 式から、

$$\alpha = -\frac{\rho g RT}{m(P + \rho g y)} + g$$

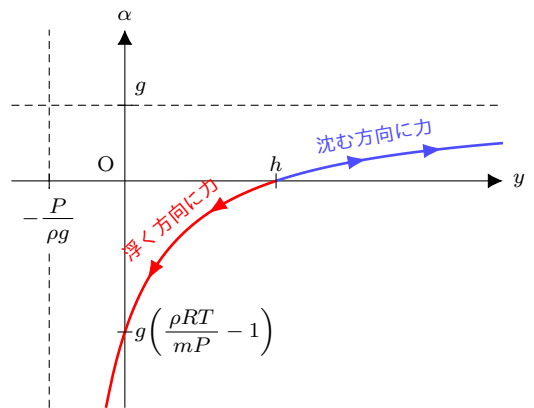
が成立する。

$\frac{\rho RT}{mP}$ が 1 よりも大きいことと、 $y = h$ のときにつり合いの状態になり $\alpha = 0$ となることに注意して、グラフをかくと、右のようになる。

なお、解答は $\alpha = 0$ として、

$$h = y = \frac{P}{\rho g} \left(\frac{\rho RT}{mP} - 1 \right)$$

である。



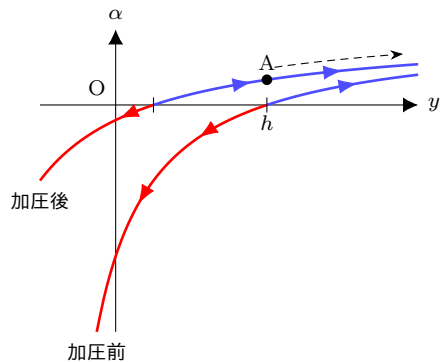
$\alpha > 0$ の領域では y 増加方向（沈む方向）に力がはたらき、
 $\alpha < 0$ の領域では y 減少方向（浮く方向）に力がはたらく。
 $\alpha = 0$ である $y = h$ は不安定なつり合い点である。

(2)

P の値を大きくすると、グラフの形は右のように移動する。

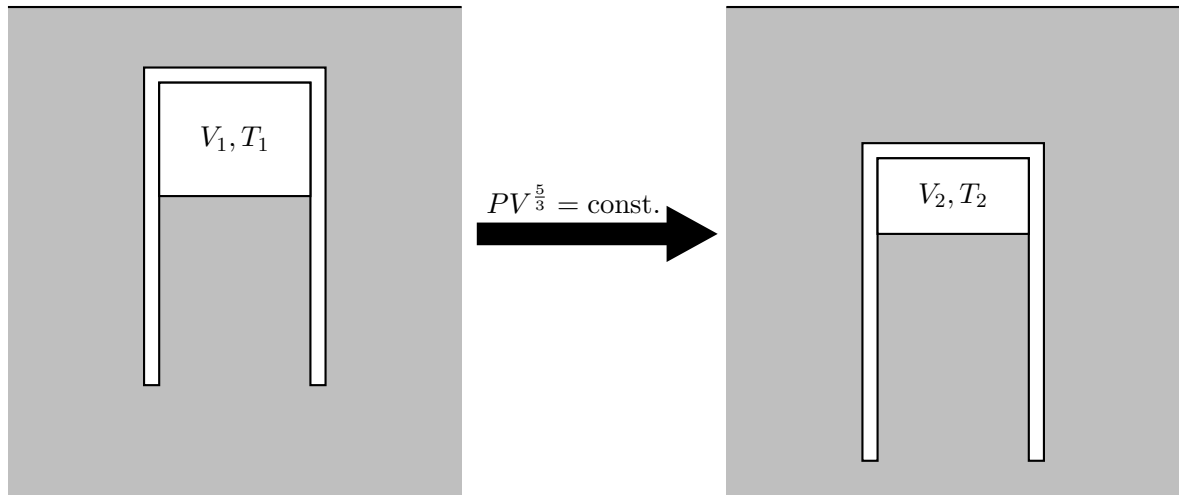
このように、移動直後に加速度は正の値を取り、つり合いの位置 (y 軸との切片) は左へ移動する。ゆえに、つり合いの位置は浅くなり、容器は下降する。すなわち **I**。

この現象は、浮沈子というおもちゃに応用されているので、興味がある人は調べてみると理解が深まるだろう。



加圧によりグラフは y 軸の負の方向に平行移動する。
 その結果、加圧直後には容器は点 A の状態となり、
 その後沈んでゆく。

IV



(1)

断熱過程の式,

$$PV^{\frac{5}{3}} = \text{一定}$$

と気体の状態方程式,

$$PV = RT \quad (\because n = 1)$$

を連立させると,

$$TV^{\frac{2}{3}} = \text{const.}$$

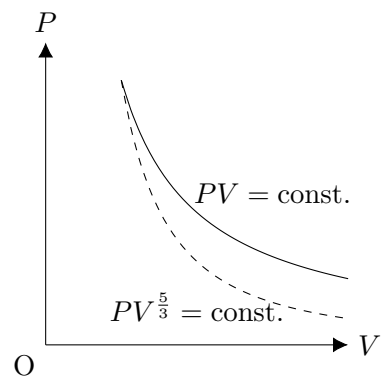
が成立する。この式に、変化前後の温度と体積を代入すると,

$$T_1 V_1^{\frac{2}{3}} = T_2 V_2^{\frac{2}{3}}$$

が成立する。したがって,

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

となる。

ここで求めるのは、気体の内部エネルギー変化 ΔU であるので、気体が単原子分子の理想気体であることに注

意して,

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{3}{2}R\Delta T \\ &= \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) \\ &= \frac{3}{2}RT_1 \left\{ \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right\}\end{aligned}$$

となる。

(2)

気体と容器を合わせた系を考える。この系が外部から受ける仕事は次の 4 つである。

- W'
- 重力が容器にする仕事
- 水が容器の上面にする仕事
- 水が仕切りにする仕事

いま、断熱変化であり、 $\Delta U = (\text{外部から受ける仕事})$ が成立するため、

$$\Delta U = W' + (\text{重力が容器にする仕事}) + (\text{水が容器の上面にする仕事}) + (\text{水が仕切りにする仕事})$$

$$\begin{aligned}\therefore W' - \Delta U &= -(\text{重力が容器にする仕事}) - (\text{水が容器の上面にする仕事}) - (\text{水が仕切りにする仕事}) \\ &= (\text{重力による位置エネルギー変化}) + (\text{容器の上面が水にする仕事}) + (\text{仕切りが水にする仕事})\end{aligned}$$

よって構成要素は、**重力による位置エネルギー変化、容器の上面が水にする仕事、容器の下面が水にする仕事**
(40 字) である。

(大泉雄司, 松井浩介, 森本 亮太, 岡田和也)