# 2015 年度 東京大学 前期 数学

## 第 1 問　点の存在領域

| | |
|---|---|
| 出題範囲 | 図形と方程式 |
| 難易度 | ★★☆☆☆ |
| 所要時間 | 20 分 |
| 傾向と対策 | 基本的な存在領域の問題である。式変形で 2 次式にできるので，様々な解き方ができる。場合分けもあまり面倒ではなく，比較的解きやすい問題なので，短い時間で解答を導けるようにしておきたい。$x$ を固定して $y$ の変域を調べる，直接 2 次方程式を解く，2 次関数の交点の存在条件の 3 通りの解法がメインとなるだろう。どれも一度試しておくとよい。また，2 次関数の交点の存在条件を用いる解法では，2 次方程式を変形して交点の位置を考える方法と，解と係数の関係を用いる方法があるので，どちらも確認するべきである。 |

**解答**

$$y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a} = (x^2-1)a + \frac{1}{4a}$$

( i ) $|x| < 1$ のとき，$x^2 - 1 < 0$ より，$a\,(>0)$ が増加すると，$(x^2-1)a$, $\dfrac{1}{4a}$ はともに減少するので，$y$ は単調減少する。ここで，

$$\lim_{a \to +0} y = \infty,\ \lim_{a \to \infty} y = -\infty$$

となるので，$y$ は $a$ についての連続関数だから，任意の実数値をとる。

(ii) $|x| = 1$ のとき，$y = \dfrac{1}{4a}$ であり，$a > 0$ より，$|x| = 1$ 上では，$y$ は $y > 0$ 上を動く。

(iii) $|x| > 1$ のとき，$x^2 - 1 > 0$, $a > 0$ なので，相加相乗平均の大小関係から，

$$y = (x^2-1)a + \frac{1}{4a} \geqq 2\sqrt{(x^2-1)a \cdot \frac{1}{4a}} = \sqrt{x^2-1}$$

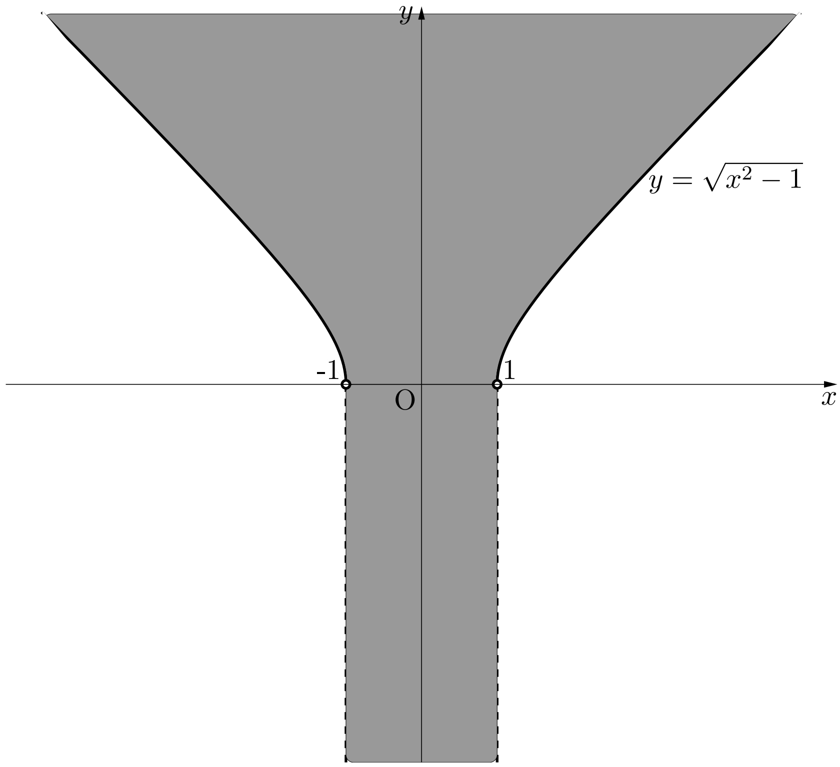
等号成立条件は $(x^2-1)a = \dfrac{1}{4a} \iff a = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2}$

$|x| > 1$ より，$\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2} > 0$ なので，等号を成立させる $a$ は存在する。

よって，$y \geqq \sqrt{x^2-1}$ であり，$y$ は $a$ の関数とみなしても $a > 0$ で連続で，$\displaystyle\lim_{a \to \infty} y = \infty$ なので，$y$ は，$y \geqq \sqrt{x^2-1}$ のすべての実数値をとる。[1]

[1] 相加相乗平均は最小値が $y = \sqrt{x^2-1}$ であることしかいっていない。
$y \geqq \sqrt{x^2-1}$ でくまなく値をとるかの議論は必要である。

以上をまとめて，求める領域は以下のようになり，境界は実線のみ含む。




**解説**

$a$ が正の実数全体を動くので，$a$ について式を整理するのは自然である。このとき $x$ は固定されている。相加相乗平均はあくまで不等式評価に持ち込めるだけで，正しい値域が出る保証はない。そのため，等号成立条件や，この問題の場合は $y \geqq \sqrt{x^2-1}$ の全実数をとり得るのかを確認する必要がある。面倒ではあるが，領域の問題は考慮漏れがないように進めなければならない。

相加相乗平均が思いつかなければ，微分によっても求まる。このやり方であれば値域が正しく出るので，相加相乗平均を用いたときの厳密な確認作業が要らなくなる。

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{da} &= \frac{4(x^2-1)a^2-1}{4a^2} \\
&= \frac{x^2-1}{a^2}\left(a^2-\frac{1}{4(x^2-1)}\right) \\
&= \frac{x^2-1}{a^2}\left(a+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\right)\left(a-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\right)
\end{aligned}
$$

$$\lim_{a\to+0} y=\infty,\ \lim_{a\to\infty} y=\infty$$

これから，$|x|>1$ の時の増減表が書け

| $a$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{dy}{da}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $(\infty)$ | $\searrow$ | $\sqrt{x^2-1}$ | $\nearrow$ | $(\infty)$ |

よって，$y \geqq \sqrt{x^2-1}$ が成立する。

**別解 1**

$$y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a} \iff 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

求める領域は，① を満たす $a>0$ が存在する $(x,y)$ の範囲である。つまり，① の大きいほうの実数解 $s$ が $0$ より大きくなるときの $(x,y)$ の範囲である。[2]

まず，① が実数解をもつ必要十分条件は，① の判別式を $D$ として

$$\frac{D}{4} \geqq 0 \iff (2y)^2 - 4(x^2-1) \geqq 0 \iff y^2 \geqq x^2-1$$

以下，この範囲内で考えていく。① を解くと

$$a = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4(x^2-1)}}{4(x^2-1)} = \frac{y \pm \sqrt{y^2-(x^2-1)}}{2(x^2-1)} \quad (x \fallingdotseq \pm 1)$$

( i ) $|x|<1$ のとき，$x^2-1<0$ なので，条件は

$$s = \frac{y - \sqrt{y^2-(x^2-1)}}{2(x^2-1)} > 0 \iff y - \sqrt{y^2-(x^2-1)} < 0 \quad (x^2-1<0)$$

$y - \sqrt{y^2-(x^2-1)} < y - \sqrt{y^2} = y - |y| \leqq 0$ が成立するので，$y$ は任意の実数値をとる。

(ii) $|x|=1$ のとき，① から $-4ys+1=0$

$y=0$ では常に ① が成立しないので，$y \fallingdotseq 0$ として

$$s = \frac{1}{4y}$$

よって，$s>0$ より，

$$\frac{1}{4y} > 0 \iff y > 0$$

[2] $y$ を $a$ の 2 次方程式と見たときの解の存在条件を考えている。正の解を持つ条件を調べる際に 2 解のうち大きい方に注目している。グラフに注目したやり方は **別解 2** で紹介している。

(iii) $|x| > 1$ のとき，$x^2 - 1 > 0$ なので，条件は

$$s = \frac{y + \sqrt{y^2 - (x^2 - 1)}}{2(x^2 - 1)} > 0 \iff y + \sqrt{y^2 - (x^2 - 1)} > 0 \quad (x^2 - 1 > 0) \qquad \cdots\cdots\ ②$$

$y \leqq 0$ のとき，② は

$$y + \sqrt{y^2 - (x^2 - 1)} < y + \sqrt{y^2} = y + |y| = y - y = 0$$

となるので，不適。

逆に $y > 0$ のとき，② は常に成立するので，$y$ の範囲は

$$y \geqq \sqrt{x^2 - 1}$$

以上から，(i)，(ii)，(iii) と $y^2 \geqq x^2 - 1$ を合わせて，求める領域は解答の図のようになる。

**別解 1 解説**

素直に解の公式で解いた解答である。本解よりも少し面倒であるが，東大の数学に立ち向かうにはこの解法も問題なく使える必要がある。

**別解 2**

$$y = ax^2 + \frac{1 - 4a^2}{4a} \iff 4(x^2 - 1)a^2 - 4ya + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} f(a) &= 4(x^2 - 1)a^2 - 4ya + 1 \\ &= \begin{cases} 4(x^2 - 1)\left(a - \dfrac{y}{2(x^2 - 1)}\right)^2 - \dfrac{y^2}{x^2 - 1} + 1 & (x \fallingdotseq \pm 1) \\ -4ya + 1 & (x = \pm 1) \end{cases} \end{aligned}$$

求める範囲は $y = f(a)$ が $a > 0$ の部分で $a$ 軸と交点をもつ $(x, y)$ の範囲である。

( i ) $|x| < 1$ のとき，$y = f(a)$ の軸は $a = \dfrac{y}{2(x^2 - 1)}$

( i −1) $y < 0$ のとき

軸は 0 より大きいので，求める条件は

$$-\frac{y^2}{x^2 - 1} + 1 \geqq 0$$

これは，$x^2 - 1 < 0$ より常に成立する。

( i −2) $y \geqq 0$ のとき

軸は 0 以下なので，求める条件は $f(0) > 0$

これは $f(0) = 1$ より，常に成立する。

(i−1)(i−2) を合わせて，$|x| < 1$ のとき $y$ は任意の実数値をとる。

( ii ) $|x| = 1$ のとき

$f(a) = -4ya + 1$ なので，傾きが負が条件である。よって，$y > 0$

(iii) $|x| > 1$ のとき，$y = f(a)$ の軸は $a = \dfrac{y}{2(x^2-1)}$

(iii−1) $y \leqq 0$ のとき

軸は 0 以下なので，求める条件は $f(0) < 0$

これは $f(0) = 1$ より成立しない。

(iii−2) $y > 0$ のとき

軸は 0 より大きいので，求める条件は

$$-\frac{y^2}{x^2-1} + 1 \leqq 0 \iff y \geqq \sqrt{x^2-1}$$

(iii−1)(iii−2) を合わせて，$|x| > 1$ のとき $y$ の範囲は $y \geqq \sqrt{x^2-1}$

(i)(ii)(iii) まとめて，求める領域は解答の図のようになる。

**別解 2 解説**

2 次関数を利用した解法である。一番使う人が多そうな解法であるが，見てわかるとおり，よい方法とはとても思えない。実質 5 通りの場合分けをしているからである。しかし，**別解 1** と同様，この解法も問題なく使える必要がある。

ここから続く 3 つの別解は，ここまで紹介した 3 つの解法に変数変換を適用して，計算量を減らす方針で論じている。そして最後に解と係数を用いた解法を紹介する。

**別解 3**

$t = \dfrac{1}{a}$ とおくと，$t$ も正の実数全体を動く。[3] すると $C$ は，$y = \dfrac{x^2-1}{t} + \dfrac{t}{4}$ と書き換えることができる。これを整理すると，

$$t^2 - 4yt + 4(x^2-1) = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

[3] ちょっとした計算を楽にするテクニックである。変数変換は便利なので多用してもらいたいが，使う際には値の確認を怠らないようにしたい。

まず，③ の判別式を $D$ として，③ が実数解をもつ条件は

$$\frac{D}{4} \geqq 0 \iff 4y^2 - 4(x^2-1) \geqq 0 \iff y^2 \geqq x^2 - 1 \qquad \cdots\cdots ④$$

求める領域は，この範囲のもとで，③ の大きい方の実数解が正である $(x, y)$ の

範囲，つまり

$$2y+\sqrt{4y^2-4(x^2-1)}>0 \iff \sqrt{y^2-(x^2-1)}>-y \qquad \cdots\cdots ⑤$$

を満たす $(x,y)$ の範囲である。

( i ) $y \leqq 0$ のとき

⑤ の両辺はともに 0 以上なので

$$⑤ \iff y^2-(x^2-1)>y^2 \iff |x|<1$$

(ii) $y>0$ のとき，⑤ は常に成立する。

以上より，(i)(ii) と ④ を合わせて，求める領域は解答の図のようになる。

**別解 3 解説**

これはテクニックが必要であるが，発想として知っておくと，意外なところで役に立つ場合がある。

$t=\dfrac{1}{a}$ と置換して場合分けを楽にした。これは，$a^2$ の係数には面倒な場合分けが現れるが，$t^2$ の係数は $x$，$y$ によらない定数になるからである。

この方法では，$y \leqq 0$ の場合の評価の仕方によっては場合分けが生じる。例えば分子の有理化をした場合

$$\begin{aligned}
&2y+\sqrt{4y^2-4(x^2-1)}>0\\
\iff &\frac{4y^2-4(x^2-1)-4y^2}{\sqrt{4y^2-4(x^2-1)}-2y}>0\\
\iff &\frac{-4(x^2-1)}{\sqrt{4y^2-4(x^2-1)}-2y}>0
\end{aligned}$$

を考えればよさそうだが，分母 $=0$(ここでは $y \geqq 0$ かつ $x=\pm 1$) の場合を別に考える必要性が生じる。

**別解 4**

$t=\dfrac{1}{a}$ とおくと，$t$ も正の実数全体を動く。

$$y=\frac{x^2-1}{t}+\frac{t}{4} \iff t^2-4yt+4(x^2-1)=0$$

$$f(t)=t^2-4yt+4(x^2-1)=(t-2y)^2+4x^2-(y^2+1)$$

とおく。

求める領域は，$f(t)$ が $t>0$ の部分で $t$ 軸と交点をもつ $(x,y)$ の範囲である。

[4]

[4] 変数変換と二次関数のグラフの性質を合わせ技で用いている。

(i) $y \leqq 0$ のとき

軸は 0 以下なので，条件は

$$f(0) < 0 \iff x^2 - 1 < 0 \iff |x| < 1$$

(ii) $y > 0$ のとき

軸は 0 より大きいので，条件は

$$\text{頂点} : 4\{x^2 - (y^2 + 1)\} \leqq 0 \iff y^2 \geqq x^2 - 1$$

以上から，求める領域は解答の図のようになる。

**別解 4 解説**

今度はかなりスムーズに解けた。**別解 3** では，評価の仕方によっては問題が生じることがあると述べたが，この解法なら迷うことなく解くことができる。

これまでの解法を見てみると，$x$ で場合分けすると 3 通りになるが，$y$ で場合分けすると 2 通りで済むことに気づくだろう。これは $(-1, 0)$ と $(1, 0)$ の 2 点の $y$ 座標の値が同じであり，$y = 0$ のみを境界と考えればいいことによる。

そう考えると，**解答** では $y$ ではなく $x^2$ の増減を調べたほうがよいと予想がつく。これは複数の解法を示してあるからこそ気づけることで，初めて解くときに思いつくようなものではない（解き方がいまいち思いつかず，試しにひたすら式変形をしているうちに気づくかもしれないが）。しかし，$t = \dfrac{1}{a}$ の置換が有効だった理由を納得するのに便利なので，以下に載せておく。

**別解 5**

$$y = ax^2 + \frac{1 - 4a^2}{4a} \iff x^2 = \frac{y}{a} - \frac{1 - 4a^2}{4a^2} = \frac{y}{a} - \frac{1}{4a^2} + 1$$

$t = \dfrac{1}{a}$ とおくと，$t$ も正の実数全体を動く。上式は

$$\begin{aligned} x^2 &= yt - \frac{t^2}{4} + 1 \\ &= -\frac{1}{4}(t - 2y)^2 + y^2 + 1 \end{aligned}$$

と書き換えられる。$f(t) = -\dfrac{1}{4}(t - 2y)^2 + y^2 + 1$ とおく。

(i) $y \leqq 0$ のとき

$t > 0$ より $x^2$ の範囲は $0 \leqq x^2 < f(0) = 1$

(ii) $y>0$ のとき

$t>0$ より $x^2$ の範囲は $0 \leqq x^2 \leqq f(2y)=y^2+1$

(i) と (ii) をまとめると，求める領域は解答の図のようになる。

**別解 5 解説**

この解法では，$a$ が動くときの $x^2$ の値域を $y$ の値によって場合分けして調べた。**別解 4** と同様に $y$ について場合分けすると 2 通りで済むので，$x$ について場合分けするときよりも楽になる。$x^2 \geqq 0$ の条件を忘れないようにしよう。

**別解 6**

$$y=ax^2+\frac{1-4a^2}{4a} \iff 4(x^2-1)a^2-4ya+1=0 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

求める領域は ⑥ が $a>0$ で解をもつ $(x,y)$ の範囲である。

( i ) $x^2=1$ のとき

$$⑥ \iff -4ya+1=0$$

$y$=0 のとき ⑥ は解をもたない。$y \fallingdotseq 0$ のとき，$a=\dfrac{1}{4y}$ より，⑥ が $a>0$ で解をもつ $(x,y)$ の範囲は $y>0$

(ii) $x^2 \fallingdotseq 1$ のとき

⑥ は $a=0$ を解にもたない。⑥ が実数解をもつ条件は ⑥ の判別式を $D$ とすると

$$\frac{D}{4} \geqq 0 \iff (2y)^2-4(x^2-1) \geqq 0 \iff y^2 \geqq x^2-1 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

以下はこの範囲のもとで考える。⑥ の 2 解を $\alpha, \beta(\alpha \geqq \beta)$ とおくと，求める条件は，$\alpha \fallingdotseq 0$，$\beta \fallingdotseq 0$ より

$$\alpha>0 \iff \text{「}\alpha+\beta>0 \text{ かつ } \alpha\beta>0\text{」または「}\alpha\beta<0\text{」}$$

$$\iff \text{「}\frac{4y}{4(x^2-1)}>0 \text{ かつ } \frac{1}{4(x^2-1)}>0\text{」}$$

$$\text{または「}\frac{1}{4(x^2-1)}<0\text{」}^{[5]}$$

$$\iff \text{「}x^2-1>0 \text{ かつ } y>0\text{」または「}x^2-1<0\text{」}$$

[5] 解と係数の関係を用いた。

これと ⑦ を合わせると求める領域は解答の図のようになる。

**別解 6 解説**

$a=0$ が ⑥ の解ではないので，$\alpha, \beta$ の正負のパターンは「$\alpha>0$ かつ $\beta>0$」または，「$\alpha>0$ かつ $\beta<0$」または，「$\alpha<0$ かつ $\beta<0$」であり，それぞれ「$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$」,「$\alpha\beta<0$」,「$\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$」に対応する。ここでは $\alpha>0$ となる前 $2$ つについて素直に考えたが,「$\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$」の領域を求め，その補集合を考えると場合分けを減らすことができる。$a=\dfrac{1}{t}$ とする置換も併用可能である。

（不死原大知，松下祐樹）

# 2015 年度 東京大学 前期 数学

## 第 2 問　確率漸化式

| 出題範囲 | 場合の数と確率 |
|---|---|
| 難易度 | ★★★★☆ |
| 所要時間 | 25 分 |
| 傾向と対策 | 東大数学お得意の確率漸化式の問題である。問題設定は非常にわかりやすく，操作の状況把握が簡単なものの，いざ漸化式を立てようと思っても何に注目すればいいかわからず筆が止まってしまった受験生も多かったことだろう。A が 2 つあることが状況をややこしくしていると考え，それらを区別して考える解法を本解として載せたが，**別解 1** のように「最初の一手で場合分け」をして漸化式を立てる方法や，**別解 2** のように「最後の一手で場合分け」をして漸化式を立てる方法もそれぞれ自然な方法である。どれか 1 つでよいので思いついてしまえば，あとは機械的に 2 項間ないし 3 項間漸化式を解くだけである。答えがでたら，$n = 1, 2, 3$ あたりで検算をするのはもちろん，$n \to \infty$ の極限をとって直感と合致するか確認する癖をつけておこう。場合分けをして直接数え上げるのは実践的ではなく，計算が非常に煩雑になる上，結局漸化式に帰着しないとほぼ解けない。 |

**解答**

出た目が 1，2，3 のとき，文字列 AA の代わりに AA’ を書くことを考える。

(1) 求める確率は，$n$ 番目の文字が A または A’ となる確率である。$n$ 番目の文字が A となる確率を $p_n$ とおく。[1]

- $n$ 番目の文字が A のとき，$n+1$ 番目の文字が A となる確率は 0
- $n$ 番目の文字が A でないとき，$n+1$ 番目の文字が A となる確率は $\frac{1}{2}$

このことから，

$$p_{n+1} = 0 \cdot p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n)$$

が成り立つ。これを変形して，[2]

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

[1] 東大の確率問題は半分くらいは確率漸化式がテーマの問題である。それを念頭に，漸化式がたてられるような $p_n$ をうまくとることができたかがカギであった。
(必ずしも求める確率を $p_n$ とおく必要はない。)

[2] ここからの変形は素早くできるようにしておこう。

これより，数列 $\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$ は等比数列をなし，$p_1 = \frac{1}{2}$ であるから，[3]

$$p_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

[3] $p_1$ とはすなわち 1 番目に 1，2，3 のいずれかの目が出る確率である。

$n \geqq 2$ のとき，$n$ 番目の文字が A' となる確率は，$n-1$ 番目の文字が A となる確率 $p_{n-1}$ と等しい。よって，求める確率は，

$$p_n + p_{n-1} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} + \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$n = 1$ のとき，求める確率は $\frac{1}{2}$ であり，このときも上の式は成り立つ。よって，これが求める確率である。

(2) 求める確率は，$n-1$ 番目の文字が A' で，かつ $n$ 番目の文字が B となる確率である。$n \geqq 3$ のとき，$n-1$ 番目の文字が A' となる確率は，$n-2$ 番目の文字が A となる確率 $p_{n-2}$ と等しい。かつ，さらに，$n$ 番目の文字が B となる確率は $\frac{1}{6}$ である。よって，求める確率は，

$$\frac{1}{6}p_{n-2} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} = \frac{1}{18}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$n = 2$ のとき，求める確率は 0 であり，このときも上の式は成り立つ。よって，これが求める確率である。[4]

[4] この解き方の場合，(2) はとても簡単に解くことができる。

**解説**

A を 2 種類に区別して考えることで，一見文字が増えて煩雑になるかと思いきや，簡単な 2 項漸化式 1 本で処理できてしまう。(2) で (1) の結果を流用できることを考えると，答案の分量も少なく，楽な解法であるといえる。式が少なくなる分，状況の説明や立式の意味を言葉できちんと書くようにしよう。

また，かなり直感的な説明になるが，1，2，3 が出たとき A が 2 つ書かれ，4，5，6 が出たとき，A でない文字が 1 回書かれるので，$n \to \infty$ の極限をとったとき，A である確率は $\frac{2}{3}$ であり，2 文字目 A の後に B が書かれる確率は，$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ なので，$\frac{1}{18}$ であると予想することができる。そして，この値は (1)，(2) の値の極

限をとったときに一致するので，直感とも合致する結果が得られたとわかる。

**別解 1**

(1) 求める確率を $p_n$ とおく。$p_1 = \dfrac{1}{2}$ であり，$p_2$ については，1 回目と 2 回目のどちらかで 1，2，3 のどれかの目が出る確率であり，余事象を考えて[5]

$$p_2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

である。

$n \geqq 3$ のとき，$n$ 番目の文字が A となるのは，

- 1 回目に 4，5，6 が出て，1 文字書かれ，その次から数えて $n-1$ 番目の文字が A となる場合
- 1 回目に 1，2，3 が出て，AA の 2 文字が書かれ，その次から数えて $n-2$ 番目の文字が A となる場合

の 2 通りあるので，このことから，

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}$$

が成り立つ。これを変形して，

$$\begin{cases} p_n + \dfrac{1}{2}p_{n-1} = p_{n-1} + \dfrac{1}{2}p_{n-2} \\ p_n - p_{n-1} = -\dfrac{1}{2}\left(p_{n-1} - p_{n-2}\right) \end{cases}$$

これより，数列 $\left\{p_n + \dfrac{1}{2}p_{n-1}\right\}$ は定数数列をなし，数列 $\{p_n - p_{n-1}\}$ は等比数列をなす。$p_1 = \dfrac{1}{2}$，$p_2 = \dfrac{3}{4}$ であるから，

$$\begin{cases} p_n + \dfrac{1}{2}p_{n-1} = p_2 + \dfrac{1}{2}p_1 = 1 & \cdots\cdots ① \\ p_n - p_{n-1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}(p_2 - p_1) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① と ② の最左辺と最右辺について，① を 2 倍して ② に加えると，

$$3p_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$p_n = \frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$p_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

[5] 余事象は非常に便利な考え方である。左記の例では『1 回目にも 2 回目にも 1，2，3 の目が出ない』というのが余事象となっている。

$n=1,\ 2$ のときも上の式は成り立つ。よって，これが求める確率である。

(2) 求める確率を $q_n$ とおく。$q_2=0$ である。$q_3$ は，1 回目に 1，2，3 のどれかの目が出て，2 回目に 4 の目が出る確率であるから，$q_3=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$ である。

$n \geqq 4$ のとき，$n-1$ 番目の文字が A で，かつ $n$ 番目の文字が B となるのは，

- 1 回目に 1，2，3 が出て，1 文字書かれ，その次から数えて $n-2$ 番目の文字が A で，かつ $n-1$ 番目の文字が B となる場合
- 1 回目に 4，5，6 が出て，AA の 2 文字が書かれ，その次から数えて $n-3$ 番目の文字が A で，かつ $n-2$ 番目の文字が B となる場合

の 2 通りあるので，このことから，

$$q_n=\frac{1}{2}q_{n-1}+\frac{1}{2}q_{n-2}$$

が成り立つ。(1) と同様にして解いて，

$$\begin{cases} q_n+\dfrac{1}{2}q_{n-1}=q_3+\dfrac{1}{2}q_2=\dfrac{1}{12} & \cdots\cdots ③ \\ q_n-q_{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}(q_3-q_2)=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③ と ④ の最左辺と最右辺について，③ を 2 倍して ④ に加えると，

$$3q_n=\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$$q_n=\frac{1}{18}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$n=2,\ 3$ のときも上の式は成り立つ。よって，これが求める確率である。

**別解 1 解説**

「最初の一手で場合分け」をして漸化式を立てる一連の操作はこの類の問題の常套手段である。3 項間漸化式が立ってしまえば，あとは単なる数式の処理になる。ただ，(1) と (2) で異なる漸化式を解かなければならない。

**別解 2**

$n$ 文字書かれた状態になる確率を $a_n$ とおく。何も書かれていない状態を $0$ 文字とし，$a_0 = 1$ とする。また，$a_1 = \dfrac{1}{2}$ である。$n \geqq 1$ について，$n$ 文字書かれた状態になるのは，

- $n-1$ 文字書かれた状態になり，その次の回で $4$，$5$，$6$ が出て，$1$ 文字書かれる場合
- $n-2$ 文字書かれた状態になり，その次の回で $1$，$2$，$3$ が出て，$2$ 文字書かれる場合

の $2$ 通りあるので，このことから，[6]

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2}$$

が成り立つ。これを変形して，

$$\begin{cases} a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1} = a_{n-1} + \dfrac{1}{2}a_{n-2} \\ a_n - a_{n-1} = -\dfrac{1}{2}(a_{n-1} - a_{n-2}) \end{cases}$$

これより，数列 $\left\{a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}\right\}$ は定数数列をなし，数列 $\{a_n - a_{n-1}\}$ は等比数列をなす。$a_0 = 1, a_1 = \dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\begin{cases} a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1} = a_1 + \dfrac{1}{2}a_0 = 1 & \cdots\cdots ⑤ \\ a_n - a_{n-1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - a_0) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤ と ⑥ の最左辺と最右辺について，⑤ を $2$ 倍して ⑥ に加えると，

$$3a_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_n = \frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$a_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$n = 0, 1$ のときも上式は成り立つ。

(1) $n \geqq 2$ のとき，$n$ 番目の文字が A となるのは，

[6] $n$ 文字になったときにさいころを何回投げたかは気にしていない。何回投げたかを気にしなければ，$n$ 文字になる確率は常に $1$ になると考えるのは誤りである。例えば $3$ 文字書かれた状態になる場合を考えよう。$1$ 回目 $1$，$2$，$3$ が出たとき，$2$ 回目にも $1$，$2$，$3$ が出てしまうと $3$ 文字になるのがスキップされてしまう。出た目が $4$，$4$，$1$ のような場合も同様である。$2$ 文字になった時点で $1$，$2$，$3$ が出てしまうとスキップされてしまうのである。$n$ について同様に考えると $2$ 項間漸化式

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}a_{n-1}$$

が得られ，これでも同じ結果が得られる。

- $n-1$ 文字書かれた状態になり，そのあと 1，2，3 が出て，AA が書かれる場合
- $n-2$ 文字書かれた状態になり，そのあと 1，2，3 が出て，AA が書かれる場合

の 2 通りあるので，求める確率は，

$$\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-2}=a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$n=1$ のとき，求める確率は $\frac{1}{2}$ であり，このときも上の式は成り立つ。よって，これが求める確率である。

(2) $n \geqq 3$ のとき，$n-1$ 番目の文字が A で，かつ $n$ 番目の文字が B となるのは，$n-3$ 文字書かれた状態になり，そのあと続けて AA，B と書かれる場合のみであるので，求める確率は，

$$a_{n-3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$n=2$ のとき，求める確率は 0 であり，このときも上の式は成り立つ。よって，これが求める確率である。[7]

[7] $n$ 回投げた時点で文字列はすでに $n$ 文字以上であるので何回投げたかの議論はしなくていいのである。

**別解 2 解説**

1 つ目の別解と似た発想であるが,「最後の一手で場合分け」をするにあたって，補助的に $a_n$ という数列を自分でおくとすんなり解ける。$a_n$ を求めてしまえば，(1) と (2) が一気に解けてしまう点がこの解法の強みである。

**◆ Check!!**

**3 項間の漸化式**

$$p_n=ap_{n-1}+bp_{n-2}$$

が得られたとき，これを解くには

$$(p_n-\alpha p_{n-1})=\beta(p_{n-1}-\alpha p_{n-2})$$

と変形しなければならない。展開して係数比較をすれば，

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = -b \end{cases}$$

となるので，解と係数の関係より，

$$x^2 - ax - b = 0$$

を解けばいいのである。

（江崎ゆり子，松下祐樹）

# 2015 年度 東京大学 前期 数学

## 第 3 問　定数分離・積分

| | |
|---|---|
| 出題範囲 | 数Ⅲ微分／数Ⅲ積分 |
| 難易度 | ★★☆☆☆ |
| 所要時間 | 20 分 |
| 傾向と対策 | 特に発想を必要としない，典型的な問題であるので落とせない。計算はやや煩雑なので，とにかく落ち着いて計算することである。(1) は，２つのグラフの交点がただ 1 つということから，$ax^p = \log x$ とした後に，この $x$ の方程式が解をただ 1 つだけ持つための条件を求める。その際，$a$ を定数分離する方法，単に差をとる方法があるので，好きな方法で解けばよい。定数分離がよく紹介されるが，これではうまくいかないときもあるので，後者の方法も知っておきたい。あとは微分して極値を求めて…という東大受験生ならできるはずの手法なので，きっちり計算しきってほしい。(2) は，$(\log x)^2$ の積分がメイン。しかし標準的である。整理するのがやや大変だが，丁寧に計算したい。(2) までできれば，(3) はサービス問題である。 |

**解答**

(1)

$$y = ax^p \ (x > 0), \quad y = \log x \ (x > 0)$$

の共有点がただ 1 つであるから，$x$ の方程式

$$ax^p = \log x$$

の解がただ 1 つである。$x > 0$ より，両辺を $x^p$ で割って[1]

$$a = \frac{\log x}{x^p}$$

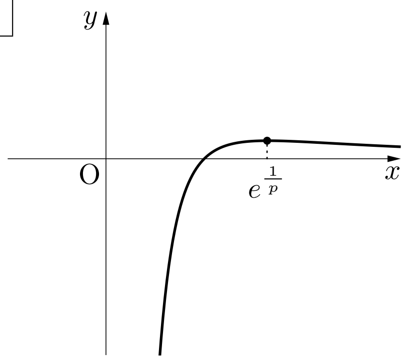
ここで $f(x) = \dfrac{\log x}{x^p}$ $(x > 0)$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^p - px^{p-1} \cdot \log x}{x^{2p}} = \frac{1 - p\log x}{x^{p+1}}$$

であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^p} = 0$ であるから，増減表は次のようになる。($p > 0$ であることに注意。)

[1]　定数分離
定数がらみで解の個数を問われる際に，式をうまく変形し $f(x) = a$ という形にすることで解の個数を $y = f(x)$ と $y = a$ の共有点の個数に帰着できる。その場合微分をして増減を調べグラフを描くだけで機械的に解ける。

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e^{\frac{1}{p}}$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $(-\infty)$ | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | $(0)$ |




グラフを見ると，もとの方程式がただ $1$ つの解をもつのは

$$f\left(e^{\frac{1}{p}}\right)=a$$

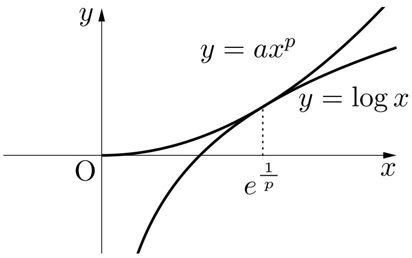
となるときのみである。よって，

$$a=f\left(e^{\frac{1}{p}}\right)=\frac{1}{ep}$$

Q の $x$ 座標は，

$$x=e^{\frac{1}{p}}$$

(2) (1) より，$x>0$ において，$ax^p \geqq \log x$ であるので，求める体積 $V$ は




$$V=\pi\left(\int_0^{e^{\frac{1}{p}}} a^2x^{2p}\,dx\ -\int_1^{e^{\frac{1}{p}}} (\log x)^2\,dx\right)$$

ここで[2]

$$
\begin{aligned}
\int_0^{e^{\frac{1}{p}}} a^2x^{2p}\,dx &= \frac{a^2}{2p+1}\left[x^{2p+1}\right]_0^{e^{\frac{1}{p}}}\\
&= \frac{a^2}{2p+1}e^{2+\frac{1}{p}}\\
&= \frac{1}{(ep)^2}\frac{e^{2+\frac{1}{p}}}{2p+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^{e^{\frac{1}{p}}} (\log x)^2\,dx &= \int_1^{e^{\frac{1}{p}}} (x)'(\log x)^2\,dx\\
&= \left[x(\log x)^2\right]_1^{e^{\frac{1}{p}}} - \int_1^{e^{\frac{1}{p}}}\left(x\cdot 2\cdot\log x\cdot\frac{1}{x}\right)dx\\
&= e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p^2} - 2\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}(x)'\log x\,dx\\
&= \frac{1}{p^2}e^{\frac{1}{p}} - 2\left[x\log x\right]_1^{e^{\frac{1}{p}}} + 2\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)dx\\
&= \frac{1}{p^2}e^{\frac{1}{p}} - 2\cdot e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p} + 2e^{\frac{1}{p}} - 2\\
&= \frac{1}{p^2}e^{\frac{1}{p}} - \frac{2}{p}e^{\frac{1}{p}} + 2e^{\frac{1}{p}} - 2
\end{aligned}
$$

[2] $\log x$ がらみの積分計算は部分積分を念頭に計算しよう。$\log x$ は単体だと積分されにくいが，微分すると $\frac{1}{x}$ と扱いやすくなる。

よって，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\left\{\frac{1}{(ep)^2}\frac{e^{2+\frac{1}{p}}}{2p+1} - \left(\frac{1}{p^2}e^{\frac{1}{p}} - \frac{2}{p}e^{\frac{1}{p}} + 2e^{\frac{1}{p}} - 2\right)\right\}\\
&= 2\pi\left(\frac{1-2p}{2p+1}e^{\frac{1}{p}} + 1\right)
\end{aligned}
$$

(3) $V = 2\pi$ のとき，$2\pi\left(\frac{1-2p}{2p+1}e^{\frac{1}{p}} + 1\right) = 2\pi$ である。$e^{\frac{1}{p}} \fallingdotseq 0$，$2p+1 \fallingdotseq 0$ より

$$1 - 2p = 0$$

よって，

$$p = \frac{1}{2}\ (> 0 \text{ であり有理数である})$$

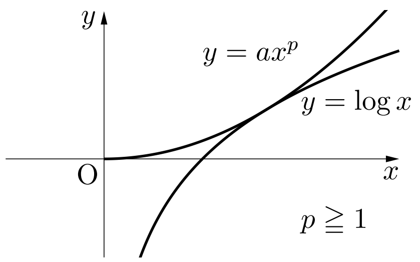
**解説**

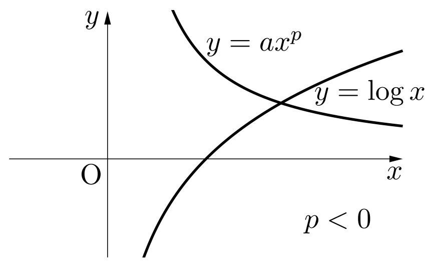
(1) 教科書や基本的な問題集にも紹介されている定数分離の方法を使うのが最も自然であろう。文字定数が 2 つありややこしいが，$a$ を分離するのが簡単で分かりやすいはずだ。増減表を書く際には必ず区間の両端についても確認を忘れないようにすること。今回は用いてよい極限が与えられていたので気づいたかもしれな

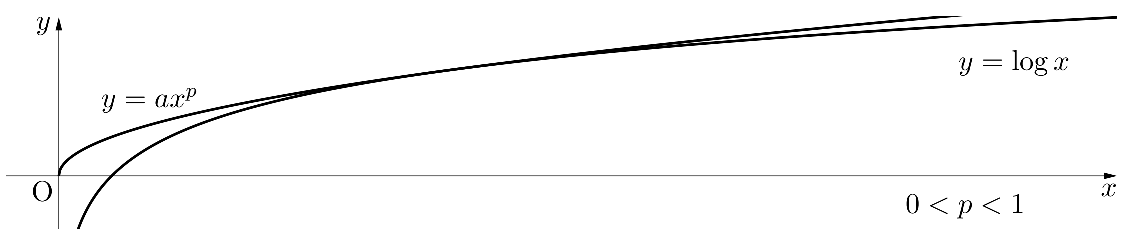
いが，つねに意識しておきたい。

ところで，共有点が 1 点のみであるということから，2 つの曲線が共通接線をもつという条件を思いついて解答を書いた人がいるかもしれない。本問の場合には，$p$ が正の有理数であることから，このような解法でもうまくいくのだが，$p$ の値に制限がないときは，2 つの曲線の共有点が 1 点であることと，2 つの曲線が共通接線をもつということは同値ではないことを簡単に説明しておこう。

以下に $y = ax^p$ と，$y = \log x$ のグラフの上下関係を $p \geqq 1$，$p < 0$，$0 < p < 1$ で場合分けして示した ($p = 0$ の場合は大丈夫だろう)。図を見ればわかるように，$p < 0$ のときは共有点で共通接線をもたない。$p \geqq 1$ で接線をもつのも図から明快である。$0 < p < 1$ のときは厳密に示すには問題文の条件 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$ を使う必要がある。もし共通接線をもつ条件で解答を書くなら，この点について考察していることをアピールする必要があるだろう。




(2) 本問のメインとなる部分である。$(\log x)^2$ の積分は，東大受験生なら経験がある人も多いだろう。$\log x$ と同じように，$x$ が微分されたものがかかっているとみなして計算すればよいだろうと思うのは自然なことである。途中に合成関数の微分が入るので注意したい。次の問題も見越して，出来るだけ整理しておきたい。

(3) (2) までできれば当然正解できるサービス問題である。なお，(2) で計算ミスをしていると答えがとても出せないので，計算ミス発見器として機能したかもしれない。

**別解**

(1) $y = ax^p$ $(x > 0)$，$y = \log x$ $(x > 0)$ の共有点がただ 1 つであるから，$x$ の方程式

$$ax^p = \log x$$

のはただ 1 つの正の実数解をもつ。つまり $ax^p - \log x = 0$ を満たす $x(> 0)$ がただ 1 つだけ存在する。そこで，

$$f(x) = ax^p - \log x$$

とおけば[3]

[3] $x$ に関する等式があるときは，それを整理して $f(x) = 0$ の形にするのも 1 つの定石である。

$$f'(x) = apx^{p-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(apx^p - 1)$$

であるから，増減表は次のようになる。($ap > 0$ に注意。)

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $(\infty)$ | ↘ | 極小 | ↗ | $(\infty)$ |

方程式 $f(x) = 0$ が，ただ 1 つの実数解をもつ条件は，（極小値）$= 0$ であることなので

$$f\left(\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p}\left(1 - \log\frac{1}{ap}\right) = 0$$

よって，

$$a = \frac{1}{ep}\ (> 0)$$

以下は **解答** と同じである。

**別解解説**

(1) 定数分離ではなく，単に差を取ってそのグラフが $x$ 軸と共有点をただ 1 つもつことを考える方法もある。定数分離はときに複雑な関数が現れ，強引に微分しても増減が調べられないということが起こりうる。そのような場合は，差を取る方法が有効である。どちらの解法も使えるようにしておくべきである。

（井上輝義，江崎ゆり子）

# 2015 年度 東京大学 前期 数学

## 第 4 問　フィボナッチ数列

| | |
|---|---|
| 出題範囲 | 数列 |
| 難易度 | ★★☆☆☆ |
| 所要時間 | 25 分 |
| 傾向と対策 | フィボナッチ数列に関する問題で (1) の誘導問題がカギを握っている。しかし (1) の証明も簡単ではなく，ここで行き詰まってしまった人も少なくないだろう。(1) が解けたあとは各小問の問題文をよく読み，それぞれの繋がりを読み解くことが求められた。 |

**解答**

(1)【証明】$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}} &= \frac{\left(\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\right)^2+{p_{n+1}}^2+1}{\left(\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\right)p_{n+1}} \\ &= \frac{({p_{n+1}}^2+1)^2+({p_{n+1}}^2+1){p_n}^2}{({p_{n+1}}^2+1)p_{n+1}p_n} \\ &= \frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}\end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ は $n$ によらない。この値は $p_1=1$，$p_2=2$ より

$$\frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n} = \frac{{p_2}^2+{p_1}^2+1}{p_2p_1} = 3$$

(証明終)

(2) (1) より，すべての自然数に対して[1]

$$\frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n} = 3$$

が成立し，与えられた条件を変形した

$${p_{n+1}}^2+1 = p_np_{n+2}$$

[1] 前問の結果が使えないかまず考えよう。

を代入すると

$$\frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_np_{n+2}+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n}$$
$$=\frac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}$$
$$=3$$

となる。これより

$$p_{n+2}+p_n=3p_{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ。$n$ を $n-1$ に置きかえて

$$p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(3)【証明】条件より

$$q_{2n+1}=q_{2n}+q_{2n-1}=2q_{2n-1}+q_{2n-2}=3q_{2n-1}-q_{2n-3}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

$$\Leftrightarrow q_{2(n+1)-1}+q_{2(n-1)-1}=3q_{2n-1}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

である。よって，$\{p_n\}$ と $\{q_{2n-1}\}$ は同じ 3 項間漸化式を満たす。

ここで $n=1,\ 2$ のときのそれぞれの値は

$p_1=1,\ p_2=2,\ q_1=1,\ q_3=2$ であり，一致する。

よって，帰納的に $p_n=q_{2n-1}$ である。[2] (証明終)

[2] 数列の一般項が分かっていないときは，漸化式と初期条件が等しいことを示せばよい。

**解説**

(3) の数列 $\{q_n\}$ はフィボナッチ数列と呼ばれるものである。この問題では，複雑な漸化式の数列が，実はフィボナッチ数列の 1 つ飛ばしになっていることを証明させている。非常に誘導が丁寧なので（特に (1) が与えられているのでやや易しめの問題となった）言われたとおり解いていけば問題ないだろう。

誘導がないときは，実験をして類推すると数学的帰納法で示せることがある。問題を解いていて行き詰まったときは，必ず実験をしてみよう。

(3) について，数学的帰納法を用いて記述した別解を示しておく。

**別解**

(3)【証明】すべての自然数 $n$ について

$$p_n=q_{2n-1}\qquad\cdots\cdots\ ①$$

を数学的帰納法で示す。

(i) $n=1,\ 2$ のとき

$p_1=1$，$q_1=1$，$p_2=2$，$q_3=q_2+q_1=1+1=2$ となり，① は成立する。

(ii) $n=k$，$k+1$ のとき，① を仮定する。つまり

$$p_k=q_{2k-1},\quad p_{k+1}=q_{2k+1}$$

であるとする。

$p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n$ より，$p_{n+1}=3p_n-p_{n-1}$ であるから

$$\begin{aligned} p_{k+2}=3p_{k+1}-p_k &= 3q_{2k+1}-q_{2k-1} \\ &= 3q_{2k+1}-(q_{2k+1}-q_{2k}) \\ &= 2q_{2k+1}+q_{2k} \\ &= 2q_{2k+1}+(q_{2k+2}-q_{2k+1}) \\ &= q_{2k+2}+q_{2k+1} \\ &= q_{2k+3} \end{aligned}$$

であり，$n=k+2$ のときも ① は成り立つ。

以上より，すべての自然数 $n$ について ① が成り立つことが示された。 (証明終)

**別解解説**

数学的帰納法を用いた。このとき，漸化式を利用することを考えて，$n=k$，$k+1$ のときの成立を仮定しなければいけないのではないか，という勘を働かせたい。この場合，$k=1$，$2$ のときに成立することをあらかじめ示す必要がある。(ii) の証明では，どのように式変形するか少し迷うが，$q_n$ についての漸化式を変形した $q_n=q_{n+2}-q_{n+1}$ を用いる。この形なら，$n$ の式から $n+1$，$n+2$ の式にすることができ，$n=k$，$k+1$ から $n=k+2$ に持っていくうえで非常にわかりやすい。

◆ **Check!!**

**フィボナッチ数列**

フィボナッチ数列とは

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\quad F_0=0,\quad F_1=1$$

で定められる数列 $\{F_n\}$ のことである。この漸化式を解くと，フィボナッチ数列の一般項は，黄金比 $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を用いて

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

で表せる。3 項間漸化式を解くだけなので各自で計算をしてみよう。

なお，本問との関係を考えてみると

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_{n-2} &= \frac{1}{5}\{\phi^{n+2} - (-\phi)^{-n-2}\}\{\phi^{n-2} - (-\phi)^{-n+2}\} \\ &= \frac{1}{5}\{\phi^{2n} + (-\phi)^{-2n} - (\phi^4 + \phi^{-4})(-1)^n\} \\ &= \frac{1}{5}\{\phi^{2n} + (-\phi)^{-2n} - 7(-1)^n\} \\ &= \frac{1}{5}\{\phi^{2n} + (-\phi)^{-2n} - 2(-1)^n\} - (-1)^n \\ &= {F_n}^2 - (-1)^n \end{aligned}$$

である。これを変形して

$$F_{n+2} = \frac{{F_n}^2 - (-1)^n}{F_{n-2}}$$

となるから，$\{F_n\}$ の $n$ が奇数である項を取り出した数列を $\{p_n\}$ とすると

$$p_{n+2} = \frac{{p_{n+1}}^2 + 1}{p_n}$$

となる。

（大久保佳徳，松下祐樹，辻啓吾）

# 2015 年度 東京大学 前期 数学

## 第 5 問　二項係数

| | |
|---|---|
| **出題範囲** | 整数 |
| **難易度** | ★★★★☆ |
| **所要時間** | 25 分 |
| **傾向と対策** | 見た目のインパクトのある問題である。しっかり解くには，整数問題にどれほど親しんでいるかはもちろん，二項係数をどう見つめるかも重要である。とっかかりがないので難しい部類に入るが，思考力の試される良問であり，これが解ければ他の受験生に差をつけられるだろう。二項係数を題材にした問題は過去にも何度か出題されているので (2009 年度第 1 問，1999 年度第 5 問)，二項係数の扱いにも慣れておくとよいだろう。 |

**解答**

$$ {}_{2015}\mathrm{C}_m = \frac{2015}{1}\cdot\frac{2014}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2016-m}{m} \ (m \geqq 1) $$ [1]

整数 $n$ の素因数 2 の個数を $v_2(n)$ とおく。$v_2(2015\cdot 2014\cdot\cdots\cdot(2016-m)) > v_2(m!)$ であることと，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数であることは同値である。さらに，${}_{2015}\mathrm{C}_1 = 2015$ は奇数であり

$$ {}_{2015}\mathrm{C}_m = \frac{2016-m}{m}\cdot {}_{2015}\mathrm{C}_{m-1} \ (m \geqq 2) $$

であるから，$v_2(2016-m) > v_2(m)$ となる最小の自然数 $m$ を求めればよい[2]。$2016 = 2^5\cdot 63$ であるから，$m = 2^k\cdot n$($k$ は 0 以上の整数，$n$ は正の奇数) とおくと，$k = 0, 1, 2, 3, 4$ のとき

$$ 2016 - m = 2^5\times 63 - 2^k\times n = 2^k\times(2^{5-k}\times 63 - n) = 2^k\times(\text{奇数}) $$

より，$v_2(2016-m) = v_2(m)$ である。よって，$m = 1, 2, 3, \cdots, 31$[3]では $v_2(2016-m) = v_2(m)$ であるから，$m = 1, 2, 3, \cdots, 31$ では ${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は奇数である。$m = 32 = 2^5\times 1$ のとき

$$ \begin{aligned} 2016 - m &= 2^5(63-1) \\ &= 2^6\times 31 \end{aligned} $$

[1] ${}_n\mathrm{C}_k$ の表記方法を

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} $$

しか知らない人は解答の表し方も覚えておこう。

[2] $\dfrac{2016-m}{m}$ を小さい方から書き出していくと $m$ が小さいときは全部約分できて，$\dfrac{\text{奇数}}{\text{奇数}}$ となってしまう。これはなぜだろうかと考えてみると解法の道筋が見える。

[3] これらの自然数は，$m = 2^k\cdot n$ という表式において，$k = 0, 1, 2, 3, 4$ のいずれかである。${}_{2015}\mathrm{C}_1$ は奇数であるから，$m = 1$ から順に $v_2(2016-m)$ と $v_2(m)$ の関係を調べていく必要があることに注意しよう。

となり，$v_2(2016-m) > v_2(m)$ である。よって，$v_2(2016-m) > v_2(m)$ と

なる最小の $m$ は 32 であり，これが求める自然数 $m$ の値である。

**解説**

まず

$$ {}_{2015}\mathrm{C}_m = \frac{2015}{1}\cdot\frac{2014}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2016-m}{m}\ (m \geqq 1) $$

と表せるのは大丈夫だろう。注目したいのは，これが分数の形で表されているということである。たとえば，$\dfrac{16}{24}$ を約分すると分子が偶数になる理由をあえて考えてみる。

24 を素因数分解すると，素因数 2 が 3 つ出てくる。対して 16 の素因数 2 の個数は 4 である。分子の方が分母より，素因数分解したときに出てくる 2 の個数が多いため，分子が偶数となるのだ。この「分母分子をそれぞれ素因数分解したとき，分子の素因数 2 の個数が分母のそれより多い場合，その分子は偶数になる」という方針が立つかがこの問題のひとつのポイントである。

さらに，二項係数は整数であり，${}_{2015}\mathrm{C}_1$ が奇数であることと，二項係数についての漸化式を考えれば，$m=2$ から順に $v_2(2016-m)$ と $v_2(m)$ の関係を調べればいいということがわかるので，$m$ によって $v_2(2016-m)$ と $v_2(m)$ の関係がどう変わっていくかを調べる。

まず $2016 = 2^5\cdot 63$ となることに注目する。つまり，$v_2(2016)=5$ である。2 の個数を考えたいのだから，$k$ を 0 以上の整数，$n$ を 0 以上の奇数として，$m = 2^k\times n$ と表す。これで全ての自然数 $m$ を表現できる（$m$ が奇数なら $k=0$ とすればよい)。整数をこのような形で表すことでうまくいく場合がある。

このようにすると，$v_2(2016-m)$ と $v_2(m)$ の関係を調べることができて，$k=0,1,2,3,4$ のときは $v_2(2016-m) = v_2(m) = k$ である。このことから

「$k=0,1,2,3,4$ のとき $\dfrac{2016-m}{m}$ を約分すると分母分子はともに奇数である。よって，$m=1,2,\cdots,31$ では，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は奇数である。」

ということがわかる。2 が約分ですべて消えてしまうためである。

続いて $k=5$ のときを調べる。$n=1$ としてみると，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となると分かる。このとき $m=32$ である。$m=31$ までは ${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は奇数であることがわかっているので，$m=32$ が ${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の自然数である。

**別解**

$$ {}_{2015}\mathrm{C}_m = \frac{2015!}{(2015-m)!m!} $$

整 数 $n$ を 素 因 数 分 解 し た と き に 現 れ る 2 の 指 数 を $v_2(n)$ と す る 。

$v_2(2015!) > v_2((2015-m)!m!)$ であれば，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は偶数である。$v_2(2015!)$

は定数であり，$m=1$ のとき，${}_{2015}\mathrm{C}_1 = 2015$ は奇数である。よって，$m$ を 1

から増やしていったときに，$v_2((2015-m)!m!)$ が初めて減少するときの $m$ の値を求めればよい。

$[x]$ が $x$ を超えない最大の整数を表すとすると，$1 \leqq m \leqq 2015$ で考えればよく，$1024 = 2^{10} < 2015 < 2^{11} = 2048$ より

$$\begin{aligned} v_2((2015-m)!m!) &= \left[\frac{2015-m}{2}\right] + \left[\frac{2015-m}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{2015-m}{1024}\right] \\ &\quad + \left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{m}{1024}\right] \\ &= \left(\left[\frac{2015-m}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{2015-m}{4}\right] + \left[\frac{m}{4}\right]\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\left[\frac{2015-m}{1024}\right] + \left[\frac{m}{1024}\right]\right) \end{aligned}$$ [4]

[4]

このように表せることがすぐに分からない人は， 例えば $p(10!)$ を考えてみるとよい。1 から 10 までの整数には，2 で割り切れる数が $\left[\frac{10}{2}\right] = 5$ 個，4 で割り切れる数が $\left[\frac{10}{4}\right] = 2$ 個，8 で割り切れる数が $\left[\frac{10}{8}\right] = 1$ 個あるので，$p(10!) = 8$ である。

と表せる。ここで，$2015 = 2^5 \times 63 - 1$ から

$$\left[\frac{2015-m}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right],\ \left[\frac{2015-m}{4}\right] + \left[\frac{m}{4}\right],\ \left[\frac{2015-m}{8}\right] + \left[\frac{m}{8}\right],$$
$$\left[\frac{2015-m}{16}\right] + \left[\frac{m}{16}\right],\ \left[\frac{2015-m}{32}\right] + \left[\frac{m}{32}\right]$$

の値は，それぞれの第 1 項の値が 1 小さくなるたびに第 2 項の値が 1 大きくなるので，$m$ によらず一定である。一方，

$$\left[\frac{2015-m}{64}\right] + \left[\frac{m}{64}\right]$$

の値は，2015 より小さく最も 2015 に近い 64 の倍数が 1984 であることから，$m = 2015 - 1984 = 31$ までは第 1 項は一定である。

しかし，$m = 32$ になると第 1 項は 1 小さくなり，第 2 項は $32 < 64$ なので変化しない。よって，全体としては 1 小さくなる。他の項についても同様に調べると

$$\left[\frac{2015-m}{128}\right] + \left[\frac{m}{128}\right] \text{ は } m = 96 \text{ で初めて減少}$$
$$\left[\frac{2015-m}{256}\right] + \left[\frac{m}{256}\right] \text{ は } m = 224 \text{ で初めて減少}$$
$$\left[\frac{2015-m}{512}\right] + \left[\frac{m}{512}\right] \text{ は } m = 480 \text{ で初めて減少}$$
$$\left[\frac{2015-m}{1024}\right] + \left[\frac{m}{1024}\right] \text{ は } m = 992 \text{ で初めて減少}$$

とわかる。よって $v_2((2015-m)!m!)$ は $m = 32$ のときに初めて減少する。

ゆえに，$m = 32$ が求める値である。

**別解解説**

この解法では

$$ {}_{2015}\mathrm{C}_m = \frac{2015!}{(2015-m)!m!} $$

という定義に注目した。$v_2(2015!)$ は一定だが，$v_2((2015-m)!m!)$ は $m$ に依存する。$m=1$ のとき，${}_{2015}\mathrm{C}_1 = 2015$ は奇数なので，$m$ を増やしていったときに，$v_2((2015-m)!m!)$ が初めて減少する $m$ を求めるという方針をとる。$v_2((2015-m)!m!))$ はガウス記号 $[x]$ という，$x$ を超えない最大の整数を表す記号を用いれば数式で表すことができる。

$v_2((2015-m)!m!)$ の増減は微分などを用いて調べることができるわけではないが，ここでは整数の性質を用いるとうまくいく。

例えば，$\left[\dfrac{2015-m}{2}\right]+\left[\dfrac{m}{2}\right]$ という項は，$m=1$ で $1007+0=1007$，$m=2$ で $1006+1=1007$，$m=3$ で $1006+1=1007$，$\cdots$ と $m$ について一定である。これは，2015 が (偶数) $-1$ であるということからわかる。同様に，分母が 4，6，8，16，32 の項をすべてまとめると $m$ によらず一定であることがわかる。

しかし，分母が 64 である項からはそうはいかず，$m=1, 2, \cdots$ と増やしたときに値が減少する $m$ の値がある。(実は，各 $2^k$ $(k \leqq 6)$ に対してこのようなことが起こる最小の $m$ の値は $m=2^k-32$ である。) これを調べれば，$v_2((2015-m)!m!))$ が初めて減少する $m$ の値が求まり，それが答えとなる。

さて，$m$ の値の変化による $v_2((2015-m)!m!))$ の増減が，上に述べたとおりになることをきちんと証明しよう。(答案としては **別解** に示した通りで十分であろう。)

【証明】

$$ \left[\frac{2015-m}{2^k}\right]+\left[\frac{m}{2^k}\right] \quad (1 \leqq m \leqq 2015,\ 1 \leqq k \leqq 10) $$

について，$k \leqq 5$ のとき，$2015 = 2^5 \times 63 - 1$ であるから，第 1 項を $2^k$ で割って

$$ 2015 = 2^{5-k} \cdot 2^k \times 63 - 1 $$

と表せる。よって，自然数 $m$ について

$$ 2015 - m = 2^{5-k} \cdot 2^k \times 63 - (m+1) $$

よって，第 1 項 $\left[\dfrac{2015-m}{2^k}\right]$ は，$2015-m$ を $2^k$ で割ったときの商であるから，これが 1 減少するのは，$a$ を自然数として，$m = 2^k \cdot a - 1$ から $m = 2^k \cdot a$ となるときである。一方，第 2 項 $\left[\dfrac{m}{2^k}\right]$ は，$m = 2^k \cdot a - 1$ から $m = 2^k \cdot a$ となるとき 1 増加するので，全体としては不変である。

$k \geqq 6$ のとき，$2015 = 2048 - 32 - 1 = 2^{11} - 2^5 - 1$ であるから，これを $2^k$ で割り算して

$$ 2015 = 2^k \cdot 2^{11-k} - 2^5 - 1 $$

と表せる。すると，自然数 $m$ について

$$2015-m=2^k\cdot 2^{11-k}-(m+2^5+1)=2^k\cdot 2^{11-k}-(m+33)$$

である。よって

$$\left[\frac{2015-m}{2^k}\right]=2^{11-k}+\left[-\frac{m+33}{2^k}\right]$$

であるから，第 1 項 $\left[\dfrac{2015-m}{2^k}\right]$ が初めて 1 減少するのは，$m$ の値が $2^k-33$ から $2^k-32$ となるときである。このとき，第 2 項 $\left[\dfrac{m}{2^k}\right]$ は増加しないので，全体として $m$ の値が $2^k-33$ から $2^k-32$ となるときに 1 減少する。

(証明終)

（井上輝義，江崎ゆり子）

# 2015 年度 東京大学 前期 数学

## 第 6 問　積分の計算と極限

| | |
|---|---|
| 出題範囲 | 微分／積分 |
| 難易度 | ★★★★☆ |
| 所要時間 | 25 分 |
| 傾向と対策 | 置換積分・部分積分といった数 III の積分をしっかりと使いこなせているかを問う問題構成となっている。(1) は $nx = t$ の置換がまずポイントであり、そのほかにも様々なポイントがある良問である。(2) に関しては $g(x)$ が $h(x)$ の原始関数であることに気づけたかどうかで大きな差がついたのではないだろうか。 |

**解答**

(1)【証明】

$$I_n = n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx$$

とおく。さらに

$$nx = t \qquad \cdots\cdots ①$$

とおくと[1]，$ndx = dt$，$n \geqq 1$ である。また，$|t| > 1$ のとき $g(t) = 0$ なので，置換積分して

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-n}^{n} g(t)f\left(\frac{t}{n}\right)dt = \int_{-1}^{1} g(t)f\left(\frac{t}{n}\right)dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\cos(\pi t)+1}{2} f\left(\frac{t}{n}\right)dt \end{aligned}$$

[1] $|x| \leqq \frac{1}{n}$ での $f(x)$ の条件が与えられているので，どうにか積分範囲を $|x| \leqq \frac{1}{n}$ に絞りたい。それと $g(x)$ が 0 でない範囲に注目すれば解けるだろう。

である。ここで，① より，

$$|nx| \leqq 1 \text{ において } p \leqq f(x) \leqq q \iff |t| \leqq 1 \text{ において } p \leqq f\left(\frac{t}{n}\right) \leqq q$$

であり，また，

$$\frac{\cos(\pi t)+1}{2} \geqq 0$$

であるから，$-1 \leqq t \leqq 1$ において常に

$$pg(t) \leqq g(t)f\left(\frac{t}{n}\right) \leqq qg(t)$$

が成立する。よって，以下の不等式が成立する。[2]

$$\begin{aligned} &p\int_{-1}^{1}\frac{\cos(\pi t)+1}{2}dt \\ &\leqq \int_{-1}^{1}\frac{\cos(\pi t)+1}{2}f\left(\frac{t}{n}\right)dt \\ &\leqq q\int_{-1}^{1}\frac{\cos(\pi t)+1}{2}dt \end{aligned}$$

ここで，

$$\int_{-1}^{1}\frac{\cos(\pi t)+1}{2}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t + t\right]_{-1}^{1} = 1$$

である。したがって，

$$p \leqq I_n \leqq q$$

が成り立つ。　　(証明終)

(2)

$$D_n = n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

とする。$g(x)$ は $|x|<1$ で微分可能であり，$g'(x)=h(x)$ となっている。また，

$$\lim_{x\to+0}\frac{g(1+x)-g(1)}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{g(1+x)-g(1)}{x} = 0$$

より，$g(x)$ は $x=1$ においても微分可能であり，$g'(x)=h(x)$ となっている。$x=-1$ においても同様である。このことに注意して $D_n$ を部分積分する。$\frac{d}{dx}(g(nx)) = ng'(nx) = nh(nx)$ であり，$n>1$ であることと，$|x|>1$ のとき $g(x)=0$ であることより，$g(n\cdot 1)=g(n\cdot(-1))=0$ なので，[3]

$$\begin{aligned} D_n &= n\left[g(nx)\log\left(1+e^{x+1}\right)\right]_{-1}^{1} - n\int_{-1}^{1}g(nx)\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx \\ &= -n\int_{-1}^{1}g(nx)\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx \end{aligned}$$

ここで，[4]

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$$

[2] 定積分の値を評価する。
$a \leqq x \leqq b$ において

$$m \leqq f(x) \leqq M$$

であるとき，この範囲で負でない値をとる関数 $g(x)$ に対して

$$\begin{aligned} &m\int_a^b g(x)dx \\ &\leqq \int_a^b f(x)g(x)dx \\ &\leqq M\int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

と評価できる。

[3] はさみうちの原理を使うことは (1) の様子からうかがえる。どうにか (1) と同じ形に持ち込みたいが，$n^2$ の部分で (1) に比べて $n$ が 1 つ余分にある。そこで $n$ を消すために部分積分をしている。（置換積分でも消えるが，(1) と同じ形を保ちたいので部分積分を選択した）

[4] $h(nx)$ が $g(nx)$ になったので，$\log\left(1+e^{x+1}\right)$ は $f(x)$ に対応するのではないかと考えよう。“誘導問題” である (1) の形に近づけていくことをゴールに操作を進める。

とおくと，

$$f(x)=\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=\frac{1}{e^{-(x+1)}+1}$$

より，$f(x)$ は $|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ の範囲で単調増加関数であるから，この範囲で $f(x)$ は以下の不等式を満たす。

$$f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq f(x)\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}=f\left(\frac{1}{n}\right)$$

(1) の結果より

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq -D_n\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$$

$n\to\infty$ において最左辺と最右辺はどちらも $\dfrac{e}{1+e}$ になるので，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}-D_n=\frac{e}{1+e}$$

よって，極限は

$$\lim_{n\to\infty}D_n=\frac{-e}{1+e}$$

**解説**

(1) は比較的よく出題される評価についての問題なので，解答できた受験生も少なくはないだろう。(2) においては，$g'(x)=h(x)$ であることに気づけるかどうかが大きなポイントであった。$g(x)$ と $h(x)$ が似ていることから，(1) が (2) の誘導問題である確率が高いことを意識すれば気づけるだろうが，気づけなければ解き進めることは難しい。肝に銘じてほしいことは，歯が立たないと思っても白紙で提出しないよう，自分が理解できたことはしっかり記述することだ。例えば本問においては、$g(x)$ のグラフを書いてそれをもとに色々考察し記述する，のようなことができるだろう。何か書けば部分点はくるかもしれない。(2) は問題としては難しいが，注釈につけたようなプロセスを追って解くことを意識してほしい。(1) で得られたことをしっかりと利用することが求められている。

◆ **Check!!**

**デルタ関数**

（以下の内容は高校数学の範囲を超えているので，読み飛ばしても構わない。）

本問は，実はデルタ関数をテーマとした問題である。

まず，連続関数 $f(x)$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

と書くことにする。

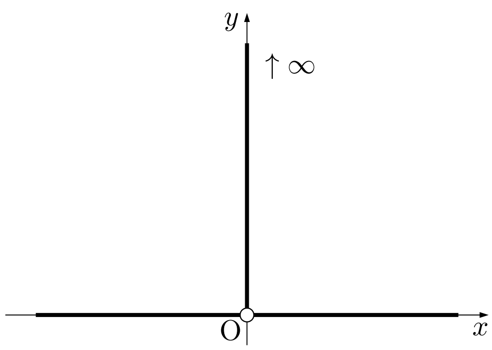
デルタ関数 $\delta(x)$ は連続関数 $f(x)$ に対してその積を実数全体で積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

となるようなもの（デルタ関数は関数ではなく，超関数に分類される）である。この定義からわかるとおり，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

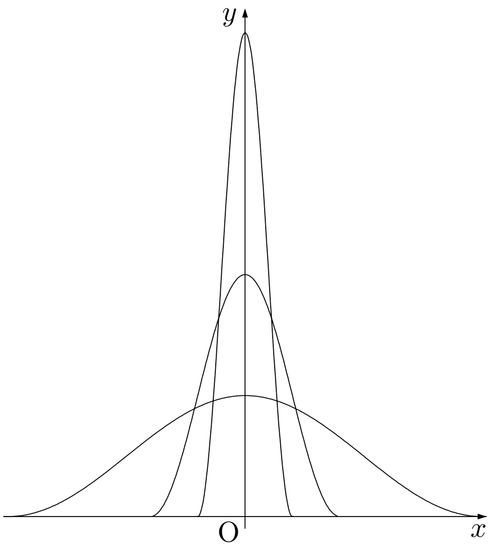
が成り立つ。$\delta(x)$ は $x=0$ 以外の点で $x$ によらないので $\delta(x)=0$ である。そして $x=0$ において正の無限大に発散するグラフとなる。




本問の $g(x)$ に対して，関数の数列 $g_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を次のように定義する。

$$g_n(x) = ng(nx)$$

すると，実は $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = G(x)$ がちょうど $\delta(x)$ となっているのである。$g_n(x)$ は $n$ が大きくなるにつれて次の図のようにデルタ関数に近づいていく。




本問はデルタ関数を知っている人にとってはその性質を計算しながら味わえるような問題構成となっている。(1) は $n \to \infty$ で $p = q = f(0)$ となり，

$$I_n = \int_{-1}^{1} f(x) g_n(x) dx$$

であり，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx$ であることを考えると，$n \to \infty$ で

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_{-1}^{1} f(x)\delta(x) dx = f(0)$$

となることを示唆している（一般には極限と積分の順序交換が成立するためには条件が必要であるが，高校の学習指導要領の範囲外なので，ここでは割愛する）。(2) においてもデルタ関数に収束する関数の微分形を含む定積分を部分積分することで，$\log(1 + e^{x+1})$ の微分形に対してデルタ関数の性質が使えることが示唆されている。

（Chen Mark，佐藤賢志郎，寺内一記）