2015 年度 東京大学 前期 数学

第 1 問　整数に関する命題の真偽判定

出題範囲	整数の性質
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	東大にしては珍しい，命題の真偽を答える問題。解き筋が見通せれば簡単だが，なかなか見えにくい。どちらも，整数を一度実数に拡張にしてから考えようという共通のテーマがある。命題 A はがむしゃらに代入せず，なんとか値を絞る方法を考えたい。命題 B は文字が多いので，文字を消去しようという発想に至れるかがポイントである。最後まで論証が丁寧に行えるかが問われた。

解答

〔命題 A〕

偽である。実際，n に 17 を代入して (左辺) − (右辺) を計算すると

$$
\begin{aligned}
\frac{17^3}{26}+100-17^2 &= \frac{1}{26}(17^3-26\cdot 17^2+2600)\\
&= \frac{1}{26}(-9\cdot 17^2+2600)\\
&= \frac{1}{26}(-2601+2600)<0
\end{aligned}
$$

となるから，$n=17$ が反例となり，命題 A は成り立たない。[1]

[1] 反例を与えればよいので，答案としてはこれで十分である。詳しくは解説に記した。

〔命題 B〕

真である。

【証明】条件式 $5n+5m+3l=1$　　$\cdots\cdots$ ① より

$$3l=1-5n-5m$$

したがって

$$
\begin{aligned}
10nm+3ml+3nl &= 10nm+3l(n+m) \\
&= 10nm+(1-5n-5m)(n+m) \\
&= 10nm+\{1-5(n+m)\}(n+m) \\
&= 10nm+(n+m)-5(n+m)^2 \\
&= 10nm+(n+m)-5(n^2+2nm+m^2) \\
&= (-5n^2+n)+(-5m^2+m)
\end{aligned}
$$

と変形できるので，示すべき不等式は

$$(-5n^2+n)+(-5m^2+m)<0$$

である。この式を変形して

$$-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}<0 \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで，$f(x)=-5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2$ は軸 $x=\frac{1}{10}$ の上に凸な 2 次関数なので，x が整数のとき，この 2 次関数は $x=0$ で最大値をとる。n, m は整数なので，② の左辺は $n=m=0$ のときに限り最大値をとる。

このとき，② の左辺は 0 に等しくなるが，条件式 ① より

$$0+0+3l=1 \Leftrightarrow l=\frac{1}{3}$$

であり，l が整数にならず不適である。

$n=m=0$ 以外のときは，$-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}<0$ である。したがって，条件を満たすすべての整数の組 (n, m, l) に対し，② が成り立つことが示された。 (証明終)

解説

〔命題 A〕

真偽が不明のまま，値をひたすら代入して反例を見つけようとする方法は得策ではない。まずは不等式の問題を解くときの定石通り，左辺にすべての項を集めた上で，見通しをよくするために関数

$$f(x)=\frac{x^3}{26}+100-x^2$$

を考えてみる。

$$f'(x) = \frac{3}{26}x^2 - 2x = \frac{3}{26}x\left(x - \frac{52}{3}\right)$$

であるから，増減表を書くと，$x > 0$ においては $x = \dfrac{52}{3}$ で最小値をとることがわかる。したがって，反例があるとすれば $\dfrac{52}{3}$ 近くの整数，すなわち $n = 17, 18$ あたりにあると考えられる。実際に代入してみると 17 が反例であるとわかる。命題が偽なので，解答ではここまでの流れを書く必要はなく，ただ反例を示すだけでよい。

〔命題 B〕

文字が 3 つありややこしいので，条件式 ① を用いてどれかを消去することを考える。解答では l を消去した。m や n ではダメなのかと考えるかもしれないが，ここでは m と n が入れ替えに対して対称であるのだから，l を消去すればきれいに変形できそうだと考えるのが自然である。実際，n や m を消去すると式が汚くなり，かなり扱いづらくなってしまう。

l を消去したあとは実際に不等式を示していくこととなる。m と n が全く同じ形で現れるので，その部分を取り出し，改めて関数をおいて考えるとよい。考える関数は上に凸な 2 次関数であり，しかもその最大値は 0 なので，ほとんどの場合において関数の値は負になることがわかる。ここまでわかればしめたものである。論証を丁寧に行って確実に解ききりたい。

（神藤駿介，沈有程，辻啓吾）

2015年度 東京大学 前期 数学

第2問　条件を満たす点の通過領域

出題範囲	図形と方程式／2 次関数
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	東大では頻出の通過領域の問題。条件を自然に処理していけば，1 次関数の存在条件に帰着する。その後は通過領域の問題に慣れているかで差がついただろう。

解答

まず (ii) を考える。直線 AB の式は $y=-x$ であり，3 点 A，P，B が同一直線上にあるなら点 P も直線 $y=-x$ 上にある (ただし $|x|\leqq 1$)　$\cdots\cdots$ I

次に (i) を考える。3 点 A，P，B を通る 2 次関数を

$$f(x)=ax^2+bx+c \ (a\neq 0)$$

とおく。点 A，B を通ることから

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+c=1 & \cdots\cdots ① \\ f(1)=a+b+c=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

という関係が成り立つ。これを b，c について解くことで

$$\begin{cases} b=-1 \\ c=-a \end{cases}$$

がわかる[1]。よって

$$f(x)=ax^2-x-a=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{4a^2+1}{4a}$$

である。この 2 次関数の軸は $x=\dfrac{1}{2a}$ なので，頂点の x 座標の絶対値が 1 以

[1] ② から ① を引くと $b=-1$，① と ② を足すと，$c=-a$ が得られる。

上となる条件は

$$\left|\frac{1}{2a}\right| \geqq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqq |a| \text{ かつ } a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqq a < 0 \text{ または } 0 < a \leqq \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdot ③$$

である。点 P が，$y = f(x)$, $|x| \leqq 1$ 上に存在することから，$y = f(x)$ とし

$$y = (x^2 - 1)a - x$$

の，a を ③ の範囲で動かしたときの通過領域を考える。これは a の 1 次関数である。P の x 座標の絶対値は 1 以下だから

$$x^2 - 1 \leqq 0$$

$x^2 - 1 = 0$ のときは，$y = -x$ となる。このとき，$x = \pm 1$ より，条件をみたす P は　$(x, y) = (\pm 1, \mp 1)$(複号同順)　　$\cdots\cdots$ Ⅱ

また，$x^2 - 1 < 0$ のとき，③ より，$y = (x^2 - 1)a - x$ の x を固定して，a を変数としたときの値域は[2]

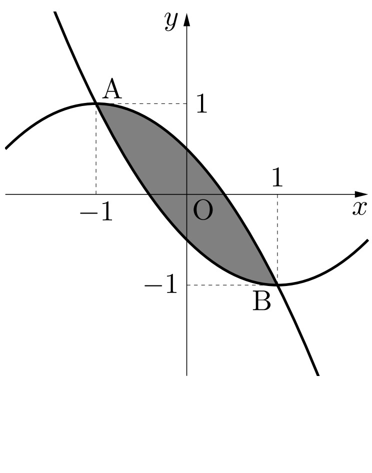
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - 1) - x \leqq y < -x \\ \text{または} \\ -x < y \leqq -\frac{1}{2}(x^2 - 1) - x \end{cases} \qquad \cdots\cdots Ⅲ$$

[2] x を固定して a だけを動かした場合，a にかかる係数 $x^2 - 1$ が負なので，a が大きくなるほど y が小さくなる。

以上 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ を合わせて，(i)，(ii) をみたす点 P の範囲は

$$\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 1 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 1 \ (|x| \leqq 1)$$

である。図示すると，下図網掛部である（境界含む)。



これの面積は

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}(x+1)^2+1\right)-\left(\frac{1}{2}(x-1)^2-1\right)\right\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3$$
$$=\frac{4}{3}$$

解説

(ii)⇔「点 P が $y=-x$，$|x|\leqq 1$ 上にある」ということはすぐにわかるだろう。問題は (i) をどう処理していくかである。3 点 A，P，B を通る 2 次関数を $f(x)=ax^2+bx+c$ とおき，2 点 A，B を通ることから 2 次関数の式を a だけで表し，軸の条件から a の範囲を絞り込む，というところまではできてほしい。

ここからは

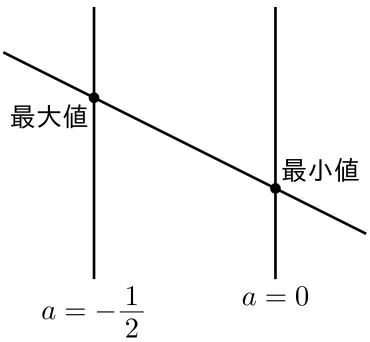
$$-\frac{1}{2}\leqq a<0 \text{ または } 0<a\leqq\frac{1}{2}$$

という条件のもとで，関数

$$y=(x^2-1)a-x$$

の値域を考えればよい。

さて，これは x を固定すると a についての 1 次関数であるから，a の係数だけ気にすればよい。a の係数が正なら，a が大きくなると y も大きくなる。逆に a の係数が負なら，a が大きくなると y は小さくなる。傾きが 0 のときは定数関数となる。例えば傾きが負のときについては，次の図を参照するとわかりやすい。



$-\frac{1}{2}\leqq a\leqq 0$ という範囲で考えると，y は $a=-\frac{1}{2}$ で最大値を，$a=0$ で最小値をとり，最大値と最小値の間の値もすべてとり得ることがわかるだろう。このように，x の値を固定して y のとり得る範囲を調べる方法は，通

過領域を求める問題の定番の解法である。

別解

(2 次関数を a で表すところまでは **解答** と同様)

$y = f(x)$ とし

$$y = (x^2 - 1)a - x$$

とみて通過領域を考える。これを a の方程式とみて，$-\dfrac{1}{2} \leqq a < 0$ または $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ という範囲で解をもつ条件を考える。P の x 座標の絶対値は 1 以下だから，$x^2 - 1 \leqq 0$ である。

$x^2 - 1 = 0$ のとき，$y = -x$ より $(x, y) = (\pm 1, \mp 1)$(複号同順)。

$x^2 - 1 < 0$ のとき

$$a = \frac{x + y}{x^2 - 1}$$

ゆえ，求める条件は

$$0 < \frac{x + y}{x^2 - 1} \leqq \frac{1}{2} \text{ または } -\frac{1}{2} \leqq \frac{x + y}{x^2 - 1} < 0$$

これを整理すると

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x^2 - 1) - x \leqq y < -x \\ -x < y \leqq -\dfrac{1}{2}(x^2 - 1) - x \end{cases}$$

(以下，**解答** と同様)

別解解説

別解のように，方程式が解をもつ条件を考える方法も有効である。a についての 1 次方程式であり，x の範囲に気をつければ解くことができる。あとは解を a の不等式に代入すれば領域が求まる。

本問では 2 つの解法のどちらであってもそれほど労力は変わらなかったが，問題によっては計算量が大きく変わることもある。2 つの解法を両方ともしっかり身に付けておこう。

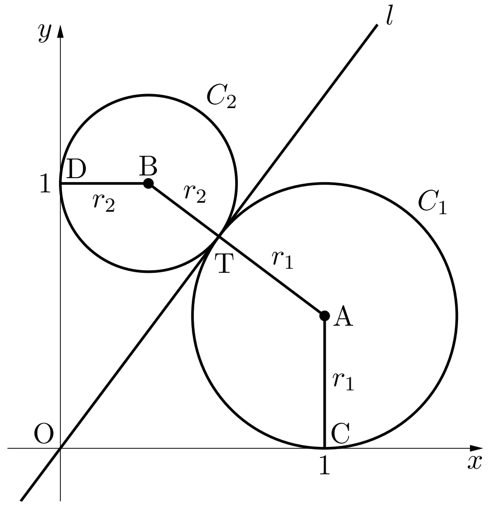
(神藤駿介，沈有程，辻啓吾)

2015 年度 東京大学 前期 数学

第 3 問　条件によって定まる円

出題範囲	平面図形
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	まずこの問題で分かってほしいことは，1 変数ですべての状況が表せるということである。例えば円 C_1 を基準に考えれば，r_1 が定まれば円 C_1 が定まり，それに続いて直線 l，円 C_2，そして r_2 が定まるので，結局 r_1 のみで状況を表せたことになる。だからこの問題は $8r_1+9r_2$ から変数を 1 つ消去することで解けそうだと考えるべきである。図形の性質を利用して正しく式を立てていけばスムーズに解けるので，自力で解けるようにしておきたい問題である。ここでは解き方をいくつか紹介するが，特に解答の解法はしっかり身に付けるべきである。

解答



円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ A，B とおく。また，円 C_1 と x 軸との接点を C，円 C_2 と y 軸との接点を D，円 C_1 と円 C_2 の接点を T とおく。

円の 2 接線の長さは等しいので，$\mathrm{OC}=\mathrm{OT}=\mathrm{OD}=1$。したがって，点 A，B の座標はそれぞれ $\mathrm{A}(1, r_1)$，$\mathrm{B}(r_2, 1)$ と表される。円 C_1，C_2 が外接することより

$$\sqrt{(1-r_2)^2+(r_1-1)^2}=r_1+r_2$$

これを変形して

$$(1-r_2)^2+(r_1-1)^2=(r_1+r_2)^2$$

$$1-r_1-r_2=r_1r_2$$

$$r_2=\frac{1-r_1}{1+r_1}$$

よって

$$\begin{aligned}8r_1+9r_2&=8r_1+9\cdot\frac{1-r_1}{1+r_1}\text{[1]}\\&=8(1+r_1)-8+9\cdot\frac{-(1+r_1)+2}{1+r_1}\\&=8(1+r_1)-8-9+\frac{18}{1+r_1}\\&=8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17\\&\geqq 2\sqrt{8(1+r_1)\cdot\frac{18}{1+r_1}}-17\\&\qquad\text{(相加相乗平均の関係より)}\\&=2\cdot 12-17\\&=7\end{aligned}$$

[1] r_2 を消去して変数を減らす。

等号成立は $8(1+r_1)=\dfrac{18}{1+r_1}$ のとき。すなわち

$$(1+r_1)^2=\frac{9}{4}$$

$$1+r_1=\frac{3}{2}$$

$$r_1=\frac{1}{2}$$

のときである。したがって，$8r_1+9r_2$ の最小値は 7。

また，このとき

$$r_2=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

である。このとき，直線 AB の傾きは $\dfrac{r_1-1}{1-r_2}=-\dfrac{3}{4}$ であり，直線 l と直線 AB は垂直なので，直線 l の傾きは $\dfrac{4}{3}$ となる[2]。l は原点を通るので，求める l の方程式は $y=\dfrac{4}{3}x$ である。

[2] 2 直線が垂直
⇔ 傾きの積が -1

解説

本問の目標は $8r_1+9r_2$ が最小となるような条件を求めることである。この式には変数が 2 つ（r_1 と r_2）存在するので，そのままだと扱いにくい。そこで，r_2 を r_1 の式で（あるいは r_1 を r_2 の式で）表すことを考える。そうすれば変数を 1 文字消去でき，式が扱いやすくなる。本問では様々な図形的な制約があるので，それを定式化することにより 1 文字消去できる。

最小値を求める際には $1+r_1$ に対し相加相乗平均の関係を用いたが，このような塊を作り出す手法はあらゆる問題で頻出である。しっかりと押さえておきたい。

別解 1 r_2 を r_1 で表すところまでは **解答** と同様。

$$
\begin{aligned}
8r_1+9r_2 &= 8r_1+9\cdot\frac{1-r_1}{1+r_1}\\
&= \frac{8{r_1}^2-r_1+9}{1+r_1}
\end{aligned}
$$

これを r_1 の関数 $f(r_1)$ とみて微分すると[3]

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr_1}f(r_1) &= \frac{(16r_1-1)(1+r_1)-(8{r_1}^2-r_1+9)}{(1+r_1)^2}\\
&= \frac{8{r_1}^2+16r_1-10}{(1+r_1)^2}\\
&= \frac{2(2r_1+5)(2r_1-1)}{(1+r_1)^2}
\end{aligned}
$$

[3] 商の微分は数学 III で扱う内容だが，文系の問題であってもときどき役に立つ。詳しくは別解解説 1 を参照。

これをもとに $r_1>0$ における $f(r_1)$ の増減表を書くと，以下のようになる。

r_1	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$\frac{d}{dr_1}f(r_1)$		$-$	0	$+$
$f(r_1)$		$\searrow$	7	$\nearrow$

よって，$f(r_1)$ は $r_1=\dfrac{1}{2}$ で最小値 7 をとる。以下，**解答** と同様。

別解 1 解説

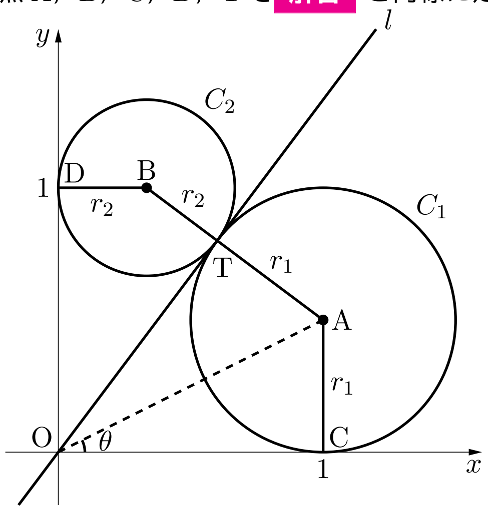
文系の受験生にとっては範囲外だが，数学 III で扱う商の微分公式を知っていれば最小値を求めることができる。商の微分公式は以下である。

$$
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}
$$

範囲外とはいえ，最大値・最小値を求める際に便利なので，余裕があれば使えるようにしておくとよい。使う際は分子での微分の順序に注意しよう。

別解 2

点 A，B，C，D，T を **解答** と同様に定める。



上図のように，$\angle\mathrm{AOC} = \theta$ とおく。直線 OA は $\angle\mathrm{TOC}$ の二等分線なので

$$\angle\mathrm{TOA} = \angle\mathrm{AOC}$$

が成り立つ。同様に

$$\angle\mathrm{TOB} = \angle\mathrm{BOD}$$

これより

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BOD} + \angle\mathrm{AOC} &= \frac{1}{2}\angle\mathrm{TOC} + \frac{1}{2}\angle\mathrm{TOD} \\ &= \frac{1}{2}(\angle\mathrm{TOC} + \angle\mathrm{TOD}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$ [4]

[4] 若干テクニカルに見えるかもしれないが，図形的性質を押さえておけば自然に思いつける変形である。

すなわち，$\angle\mathrm{BOD} = \dfrac{\pi}{4} - \theta$ である。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$，$0 < \dfrac{\pi}{4} - \theta < \dfrac{\pi}{4}$ であるから，r_1，r_2 は

$$\begin{cases} r_1 = \tan\theta & \cdots\cdots\ ① \\ r_2 = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

と表される。② を変形して

$$r_2 = \frac{\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\dfrac{\pi}{4}\tan\theta} = \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$$

これに ① を代入して

$$r_2 = \frac{1-r_1}{1+r_1}$$

以下，r_1，r_2 を求めるところまでは **解答** と同様。

直線 l の傾きは $\tan 2\theta$ である。$r_1 = \tan\theta = \dfrac{1}{2}$ であることから，2 倍角の公式を用いて

$$\tan 2\theta = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

l は原点を通るので，求める l の方程式は $y = \dfrac{4}{3}x$ である。

別解 2 解説

角を設定し，$\tan$ を用いた解法。r_2 を r_1 で表すところまですっきりと持っていける。さらに，直線 l の傾きは $\tan 2\theta$ であるから，2 倍角の公式を用いることで傾きも楽に求めることができる。本問においては **解答** とそれほど労力は変わらないが，うまく角度を設定することで計算量が各段に減るケースは非常に多い。図形問題では，与えられた辺や角だけを使おうと考えるのではなく，辺や角を新しくおくことで処理が楽にならないかどうか考えることが大切である。

（神藤駿介，沈有程，青木徹）

2015年度 東京大学 前期 数学

第4問　確率漸化式

出題範囲	場合の数と確率／漸化式
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	東大数学お得意の確率漸化式の問題である。問題設定は非常に分かりやすく，操作の状況把握が簡単なものの，いざ漸化式を立てようと思っても何に注目すればいいか分からず筆が止まってしまった受験生も多かったことだろう。A が 2 つあることが状況をややこしくしていると考え，それらを区別して考える解法を本解として載せたが，「最初の一手で場合分け」をして漸化式を立てる 別解 1 ，「最後の一手で場合分け」をして漸化式を立てる 別解 2 もそれぞれ自然な発想である。どれか 1 つで良いので思いついてしまえば、あとは機械的に 2 項間ないし 3 項間漸化式を解くだけである。答えが求まったら，$n=1, 2, 3$ あたりで検算をする癖をつけておこう。 場合分けをして直接数え上げるのは実践的ではなく，計算が非常に煩雑になるので，できるだけ早い段階で見切りをつけて別の解法を考えるべきである。

解答

表が出たとき、文字列 AA の代わりに AA′ を書くことを考える。[1]

(1) 求める確率は、n 番目の文字が A または A′ となる確率である。

n 番目の文字が A となる確率を p_n とおく。

・n 番目の文字が A のとき，$n+1$ 番目の文字が A となる確率は 0

・n 番目の文字が A′ もしくは B のとき，$n+1$ 番目の文字が A となる確率は $\dfrac{1}{2}$

このことから，

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}(1-p_n)$$

が成り立つ。これを変形して，[2]

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

これより，数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列をなし，$p_1 = \dfrac{1}{2}$ であるから，[3]

$$p_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

[1] 東大の確率問題はだいたい確率漸化式がテーマとなる。それを念頭に漸化式がたてられるような p_n をうまくとることができたかがカギであった。(※必ずしも求める確率を p_n とおく必要はない！)

[2] ここからの変形は素早くできるようにしておこう。

[3] p_1 とはすなわち 1 番目に表が出る確率である。

$$\Leftrightarrow p_n = \frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$n \geqq 2$ のとき，n 番目の文字が A' となる確率は，$n-1$ 番目の文字が A となる確率 p_{n-1} と等しい。よって，求める確率は

$$\begin{aligned} p_n + p_{n-1} &= \frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} + \frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &= \frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \end{aligned}$$

$n=1$ のとき，求める確率は $\frac{1}{2}$ であり，このときも上式は成り立つ。よって，これが求める確率である。

(2) 求める確率は，$n-1$ 番目の文字が A' で，かつ n 番目の文字が B となる確率である。[4]

[4] この解き方の場合 (2) はサービス問題である。

$n \geqq 3$ のとき，$n-1$ 番目の文字が A' となる確率は，$n-2$ 番目の文字が A となる確率 p_{n-2} と等しい。このとき，n 番目の文字が B となる条件付き確率は $\frac{1}{2}$ である。よって，求める確率は

$$\frac{1}{2}p_{n-2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} = \frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$n=2$ のとき，求める確率は 0 であり，このときも上式は成り立つ。よって，これが求める確率である。

解説

A を 2 種類に区別して考えることで，一見文字が増えて煩雑になるかと思いきや，簡単な 2 項漸化式 1 本で処理できてしまう。(2) で (1) の結果を流用できることを考えると，答案の分量も少なく、楽な解法であると言える。式が少なくなる分，状況の説明や立式の意味を言葉できちんと書くようにしよう。

別解 1

(1) 求める確率を p_n とおく。$p_1 = \frac{1}{2}$ であり，p_2 については，1 回目と 2 回目のどちらかで表が出る確率であり，余事象[5]を考えて $p_2 = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ である。

[5] 「1 回目にも 2 回目にも表が出ない」というものが余事象。

$n \geqq 3$ のとき，n 番目の文字が A となるのは，[6]

① 1 回目に裏が出て，B の 1 文字が書かれ，その次から数えて $n-1$ 番目の文字が A となる場合

② 1 回目に表が出て，AA の 2 文字が書かれ，その次から数えて $n-2$ 番目の文字が A となる場合

の 2 通りに場合分けできるので，このことから，

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}$$

が成り立つ。これを変形して，

$$\begin{cases} p_n + \dfrac{1}{2}p_{n-1} = p_{n-1} + \dfrac{1}{2}p_{n-2} \\ p_n - p_{n-1} = -\dfrac{1}{2}(p_{n-1} - p_{n-2}) \end{cases}$$

これより，数列 $\left\{p_n + \dfrac{1}{2}p_{n-1}\right\}$ は定数数列をなし，数列 $\{p_n - p_{n-1}\}$ は等比数列をなす。$p_1 = \dfrac{1}{2}$，$p_2 = \dfrac{3}{4}$ であるから，

$$\begin{cases} p_n + \dfrac{1}{2}p_{n-1} = p_2 + \dfrac{1}{2}p_1 = 1 & \cdots\cdots(*) \\ p_n - p_{n-1} = (p_2 - p_1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & \cdots(**) \end{cases}$$

最左辺と最右辺について，$(*) \times 2 + (**)$ とすると

$$3p_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow p_n = \frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$\Leftrightarrow p_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$n = 1, 2$ のときも上式は成り立つ。よってこれが求める確率である。

(2) 求める確率を q_n とおく。$q_2 = 0$ であり，q_3 については，1 回目に表が出て，2 回目に裏が出る確率なので $q_3 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ である。

$n \geqq 4$ のとき，$n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となるのは，

・1 回目に裏が出て，B の 1 文字が書かれ，その次から数えて $n-2$ 番目の文字が A で，かつ $n-1$ 番目の文字が B となる場合

・1 回目に表が出て，AA の 2 文字が書かれ，その次から数えて $n-3$ 番目

[6] 最初の 1 回で場合分けしている。① では 1 回目に書かれるのは B の 1 文字なので，残り $n-1$ 回のうち $n-1$ 番目の文字が A になる確率を求めればよい。② では 1 回目に書かれるのは AA の 2 文字なので，最後の 1 回を除いた残り $n-2$ 回のうち $n-2$ 番目の文字が A になる確率を求めればよい。② の場合，n 回目に何が出ても n 番目の文字には影響しないので，考えなくてよい。

の文字が A で，かつ $n-2$ 番目の文字が B となる場合

の 2 通りに場合分けできるので，このことから，

$$q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{2}q_{n-2}$$

が成り立つ。[7] (1) と同様にして解いて

[7] 先ほどと全く同じ漸化式である。

$$\begin{cases} q_n + \dfrac{1}{2}q_{n-1} = q_3 + \dfrac{1}{2}q_2 = \dfrac{1}{4} & \cdots\cdots (*)' \\ q_n - q_{n-1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}(q_3 - q_2) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} & \cdots (**)' \end{cases}$$

最左辺と最右辺について，$(*)' \times 2 + (**)'$ とすると

$$3q_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow q_n = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$n = 2, 3$ のときも上式は成り立つ。よってこれが求める確率である。

別解 1 解説

「最初の一手で場合分け」をして漸化式を立てる一連の操作は，この類の問題の常套手段である。3 項間漸化式が立ってしまえば、あとは単なる数式の処理になる。漸化式の形式は同様であるとはいえ，(1) と (2) で 2 回漸化式を解かなければならないので，解答用紙に書くときはスペースに少々余裕を持たせておこう。

別解 2

ちょうど n 文字書かれた状態になる確率を a_n とおく。[8] 何も書かれていない状態を 0 文字とし，$a_0 = 1$ とする。また，$a_1 = \dfrac{1}{2}$ である。$n \geqq 1$ について，n 文字書かれた状態にならないのは，$n-1$ 文字書かれた状態になり，その次に表が出て AA の 2 文字が書かれる場合のみなので，これを除いて考えれば，

[8] n 文字になったときにコインを何回投げたかは気にしていない。

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}a_{n-1}$$

が成り立つ。これを変形して，

$$a_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \frac{2}{3}\right)$$

これより，数列 $\left\{a_n - \frac{2}{3}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列をなすので，

$$\begin{aligned} & a_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a_0 - \frac{2}{3}\right) \\ \Leftrightarrow & a_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \Leftrightarrow & a_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \end{aligned}$$

$n = 0$ のときも上式は成り立つ。

(1) $n \geqq 2$ のとき，n 番目の文字が A となるのは，[9]

・$n-1$ 文字書かれた状態になり，その次に表が出て AA が書かれる場合

・$n-2$ 文字書かれた状態になり，その次に表が出て AA が書かれる場合

の 2 通りに場合分けできるので，求める確率は，

$$\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2} = a_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$n = 1$ のとき，求める確率は $\frac{1}{2}$ であり，このときも上式は成り立つ。

よって，これが求める確率である。

[9] n 回投げた時点で文字列はすでに n 文字以上であるので，何回投げたかの議論はしなくてよい。

(2) $n \geqq 3$ のとき，$n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となるのは，$n-3$ 文字書かれた状態になり，その次に表が出て AA，さらに続いて裏が出て B と書かれる場合のみであるので，求める確率は，

$$a_{n-3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$n = 2$ のとき，求める確率は 0 であり，このときも上式は成り立つ。よって，これが求める確率である。

別解 2 解説

別解 1 と似た発想であるが，「最後の一手で場合分け」をするにあたって，補助的に a_n という数列を自分でおくとすんなり解ける。a_n を求めてしまえば，(1) と (2) が一気に解けてしまう点がこの解法の強みであるといえよう。

（神藤駿介，沈有程，辻啓吾）