

2016 年度 東北大学 前期 物理

1 物体の分離，鉛直面内での円運動

出題範囲	運動方程式，運動量保存則
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	誘導に沿って解いていけば，難なく処理できる問題であった。各小球が物体 A の運動に及ぼす影響が無視できるかどうかに注意すること。また，問(3)(b)は計算量の多いものであったので，落ち着いて解こう。相対運動エネルギーの知識があれば，時間を節約できたであろう。

解説

問(1)

(a)

小球 B についてのつり合いの式を x 方向， y 方向について書く。その際，小球 B にはたらく慣性力 $m_B a_A$ ，重力 $m_B g$ を x 方向， y 方向について分解すればよい。

よって，

$$F_x = m_B(a_A \cos \theta - g \sin \theta)$$

$$F_y = -m_B(a_A \sin \theta + g \cos \theta)$$

(b)

小球 B が斜面上で動き出す条件は，小球 B にはたらく合力の x 成分が正になればよく，すなわち条件は $F_x > 0$ である。

よって，

$$F_x > 0$$

$$\Leftrightarrow a_A \cos \theta - g \sin \theta > 0$$

$$\therefore a_A \cos \theta > g \sin \theta$$

$$\therefore a_A > g \tan \theta$$

問(2)

(a)

今回は物体 A の運動を考える際、小球 B の質量は無視できるとしているため、小球 B が x 軸方向に動き出す条件は、問(1)より $a_A > g \tan \theta$ である。

小球 B が最も動きやすくなるときは、小球 B にはたらく慣性力の x 成分が最大になるときである。すなわち、ばねが最も縮んで物体 A の水平方向左向きの加速度が最大になるときを考えればよい。水平方向左向き正とすると、ばねが最も縮んだときの物体 A の運動方程式は、

$$m_A a_A = -k(-L)$$

と表される。よって、

$$a_A = \frac{kL}{m_A}$$

したがって答えは、

$$\begin{aligned} \frac{kL}{m_A} &> g \sin \theta \\ \therefore L &> \frac{m_A g}{k} \tan \theta \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

(b)

小球 B が斜面から離れないための条件は、小球 B に対し斜面から垂直抗力 N がはたらくときであり、その条件は $N > 0$ である。物体 B における y 軸方向の力のつり合いより、

$$N + F_y = 0$$

$$\therefore N = -F_y$$

よって、

$$-F_y > 0$$

$$\therefore F_y = -m_B(a_A \sin \theta + g \cos \theta) < 0$$

$$\therefore a_A > -\frac{g}{\tan \theta}$$

また、慣性力の y 軸方向成分が最大になるのはばねが伸び切ったときであり、このときでさえ小球 B が斜面から離れなければ、物体 A がほかの場所でも小球 B が斜面から離れることはない。

なお、ばねが伸び切ったときの物体 A の運動方程式は、

$$m_A a_A = -kL$$

$$\Leftrightarrow a_A = -\frac{kL}{m_A}$$

以上より答えは、

$$L < \frac{m_A g}{k \tan \theta} \quad \dots\dots ②$$

(c)

物体 B が斜面に対して、「浮き上がらない」かつ「動き出す」ための L の条件は「①かつ②」で表される。

2 式を連立すると、

$$\frac{m_A g}{k} \tan \theta < L < \frac{m_A g}{k} \cdot \frac{1}{\tan \theta} \quad \dots\dots ③$$

であり、これを満たす L の存在条件は、

$$\frac{m_A g}{k} \tan \theta \leq \frac{m_A g}{k} \cdot \frac{1}{\tan \theta}$$

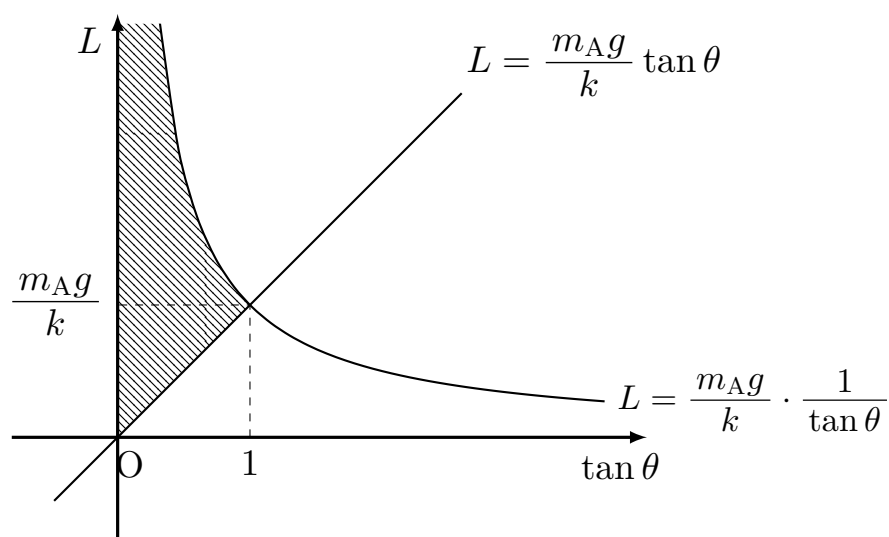
となる。これを解くと、

$$0 < \tan \theta \leq 1 \quad (\because 0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

ゆえに、最大の角度は $\tan \theta = 1$ のとき、すなわち $\theta_{\max} = 45^\circ$ となる。

グラフは $\tan \theta > 0$ と③式 $\frac{m_A g}{k} \tan \theta < L < \frac{m_A g}{k} \cdot \frac{1}{\tan \theta}$ を連立して得られる領域である。なお、横軸は $\tan \theta$ にとるのが簡便である。

グラフは下図のようになる。



問(3)

(a)

傾斜角が 30° であるから、衝突直前の小球 C の水平方向の速度は（左向きを正として）、

$$v_A + v_C \cos 30^\circ$$

衝突は撃力であり、本問では物体 A と小球 C を合わせた系は、水平方向において衝突の瞬間、外部からの力は無視できるので、水平方向の運動量保存則より、

$$(m_A + m_C)v'_A = m_A v_A + m_C(v_C \cos 30^\circ + v_A)$$

$$\therefore v'_A = v_A + \frac{\sqrt{3}m_C}{2(m_A + m_C)}v_C$$

(b)

衝突によって失われたエネルギー ΔE は、

$$\Delta E = (\text{衝突直前の運動エネルギーの合計}) - (\text{衝突直後の運動エネルギーの合計})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_C \{(v_A + v_C \cos 30^\circ)^2 + (v_C \sin 30^\circ)^2\} - \frac{1}{2}(m_A + m_C)v_A'^2 \\ &= \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_C \left\{ \left(v_A + \frac{\sqrt{3}}{2}v_C \right)^2 + \left(\frac{1}{2}v_C \right)^2 \right\} - \frac{1}{2}(m_A + m_C) \left(v_A + \frac{m_C}{m_A + m_C} \frac{\sqrt{3}}{2}v_C \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_C \frac{4m_A + m_C}{4(m_A + m_C)}v_C^2 \end{aligned}$$

よって、エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}kL'^2 + \Delta E$$

$$\therefore L' = \sqrt{L^2 - \frac{1}{k}m_C \frac{4m_A + m_C}{4(m_A + m_C)}v_C^2}$$

◆ Column

2 物体の運動エネルギーについて

一般に、運動エネルギー（運動量、角運動量も同様）はそれぞれ重心運動エネルギーと相対運動エネルギー（内部運動エネルギーともいう）に分けられる。直線上を、それぞれ m_A, m_B の質量をもった球 A, B がそれぞれ速度 v_A, v_B で運動していたとする。このとき、2つの物体のもつ運動エネルギーの和 K は、

$$K = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

で表される。これを変形すると、以下のようになる。

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \underbrace{\frac{1}{2} m_G v_G^2}_{(ア)} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_r^2}_{(イ)}$$

ただし、 m_G は A と B の質量の合計値、 v_G は A と B の重心の速度、 v_r は A から見た B の相対速度で、

$$m_G = m_A + m_B$$

$$v_G = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$$

$$v_r = v_B - v_A$$

を表している。さらに、 $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ を換算質量とよび、しばしば μ で表す。気になる人は、右辺に m_G と v_G 、および v_r の値を実際に代入して整理して、左辺に一致していることを確かめるとよい。

(ア)は重心運動エネルギー、(イ)は相対運動エネルギーとよばれる。

これを用いて、問 (3) を解いてみよう。

(a)

衝突は撃力であり、本問では物体 A と小球 C を合わせた系は、水平方向において衝突の瞬間、外部からの力は無視できるから、衝突前後で系の x 方向の重心速度は一定に保たれる。衝突後、物体 A と小球 C は一体となって動くので、 v'_A は物体 A と小球 C の x 方向の重心速度に等しい。

よって、

$$\begin{aligned} v'_A &= \frac{m_A v_A + m_C \left(v_A + \frac{\sqrt{3}}{2} v_C \right)}{m_A + m_C} \\ &= \frac{(m_A + m_C) v_A + m_C \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} v_C}{m_A + m_C} \\ &= v_A + \frac{\sqrt{3} m_C}{2(m_A + m_C)} v_C \end{aligned}$$

もちろん運動量保存則とはねかえりの式から解くこともできるが、物理現象として何が起きているかに注目すると、わざわざはねかえりの式をもち出さなくてもよいことがわかる。

(b)

運動エネルギーはスカラー量であるから、二次元空間では、
 $(x \text{ 方向の運動エネルギー}) + (y \text{ 方向の運動エネルギー}) = (\text{全体の運動エネルギー})$ が成り立つ。
 よって、

$$\begin{aligned}\Delta E &= (x \text{ 方向の運動エネルギー変化}) + (y \text{ 方向の運動エネルギー変化}) \\ &= (\text{水平方向の相対運動エネルギー変化}) + (\text{小球 C の鉛直方向の運動エネルギー変化})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m_A m_C}{m_A + m_C} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v_C \right)^2 + \frac{1}{2} m_C \left(\frac{v_C}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot m_C \frac{4m_A + m_C}{4(m_A + m_C)} v_C^2\end{aligned}$$

問 (3) (b) で注意したいのは、失われたエネルギーの合計を出す際、相対運動エネルギー以外にも失われたエネルギーが存在することである。なぜなら、相対運動エネルギーのほかに、鉛直方向の重心運動エネルギーも失われるからである。よって、 ΔE は以下のように求めてもよい。

$$\Delta E = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{m_A m_C}{m_A + m_C} v_C^2}_{(ウ)} + \underbrace{\frac{1}{2} (m_A + m_C) \left(\frac{m_C}{m_A + m_C} \cdot \frac{1}{2} v_C \right)^2}_{(エ)}$$

(ウ)は、水平方向、鉛直方向を合算した相対エネルギーの損失分で、(エ)は、鉛直方向の重心運動エネルギーの損失分である。

(大泉雄司, 仲里佑利奈, 岡田和也, 岡部律心)

2016 年度 東北大学 前期 物理

2 平行板コンデンサーの極板間への金属板の挿入

出題範囲	コンデンサー
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	去年に続いて、今年もコンデンサー関連の問題であった。途中から、極板 A, B に蓄えられている電荷や金属板 M の電位が複雑だと感じるかもしれないが、図を描いて基本に返ろう。人によっては計算が少し煩雑に思えるかもしれないが、落ち着いて処理すれば、完答も難しくない問題である。また、設問によっては問われていることが複数あるものもあるので、解きもれがないように気をつけよう。

解説

問(1)

(a)

一般に 2 枚の極板からなる平行板コンデンサーの電気容量 C は、極板間距離を d 、共有する極板の面積を S 、極板間の誘電率を ϵ とすると、

$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

と表される。

いま、誘電率が ϵ_0 、極板 A と金属板 M 間の距離が $4d - x$ 、極板 B と金属板 M 間の距離が x 、極板 A、金属板 M、極板 B の面積はともに S ゆえ、

$$C_A = \epsilon_0 \frac{S}{4d - x}, \quad C_B = \epsilon_0 \frac{S}{x}$$

(b)

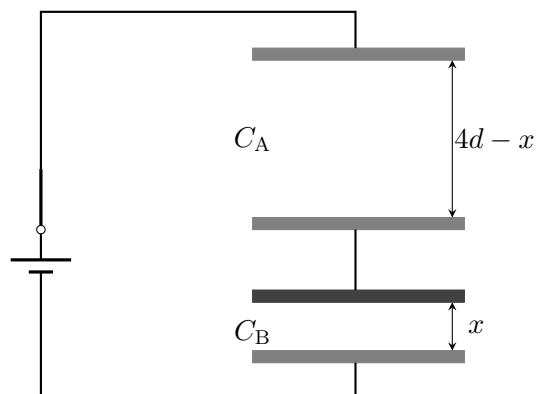
厚さ d の金属板 M は完全に静電誘導が起こり、全体として、極板 A と極板 B からなるコンデンサーの極板間距離が $5d$ から $4d$ になったものと見なせる。よって答えは、

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{4d}$$

(別解)

今回, AM 間, BM 間でコンデンサーが直列に接続されていると見なせる。また, これらのコンデンサーは初め電荷を蓄えていないので, 合成容量の公式より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{C} &= \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 S} (4d - x + x) \\ &= \frac{4d}{\varepsilon_0 S} \\ \therefore C &= \frac{\varepsilon_0 S}{4d}\end{aligned}$$



また, 静電エネルギー U は,

$$U = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \frac{S}{d} V_0^2$$

となる。

(c)

考え方は (b) とまったく同じで, 金属板 M の挿入によって, 極板 A と極板 B からなるコンデンサーの極板間距離が $5d$ から $4d$ になったと見なせる。よって,

$$\begin{aligned}\Delta Q &= (\text{挿入後の電荷}) - (\text{挿入前の電荷}) \\ &= \varepsilon_0 \frac{V_0}{4d} S - \varepsilon_0 \frac{V_0}{5d} S \\ &= \varepsilon_0 \frac{V_0}{20d} S\end{aligned}$$

(復習)

2つの極板間に蓄えられた電荷は, 極板間の電気容量を C , 極板間の電位差を V とすると, 次のように書ける。

$$Q = CV$$

(d)

起電力が V で一定の電池が、電荷 Q を移動させるときの、電池のする仕事は、

$$W = QV$$

と表される。いま、電池の移動させた電荷量は ΔQ 、電池の起電力は V_0 であるから、電池のした仕事は、

$$W_p = \Delta Q V_0 = \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{20d} S$$

また、コンデンサーのエネルギー収支を考えると、

$$(\text{コンデンサーのエネルギー変化}) = (\text{電池のした仕事}) + (\text{外力がした仕事})$$

であたえられるから、

$$\frac{1}{2} \Delta Q V_0 = \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{40d} S = W_p + W_e$$

$$\therefore W_e = \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{40d} S - W_p = -\varepsilon_0 \frac{V_0^2}{40d} S$$

問(2)

(a)

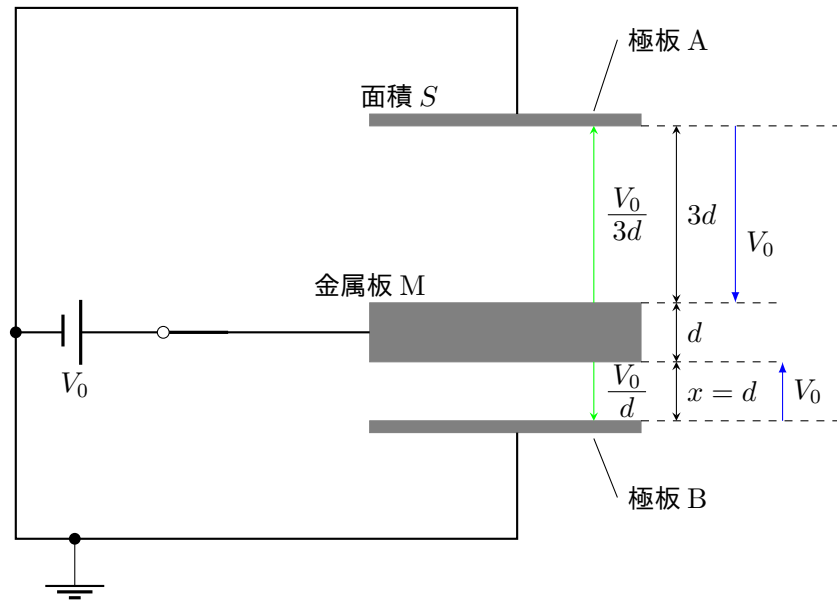
極板 A と金属板 M 間の距離は $3d$ 、極板 B と金属板 M 間の距離は d である。よって、下図を参考にして、極板 A、極板 B に蓄えられる電荷はそれぞれ、

$$Q_A = -\varepsilon_0 \frac{V_0}{3d} S$$

$$Q_B = -\varepsilon_0 \frac{V_0}{d} S$$

であり、金属板 M に蓄えられる電荷は、

$$\begin{aligned} Q_M &= -(Q_A + Q_B) \\ &= \varepsilon_0 \frac{V_0}{3d} S + \varepsilon_0 \frac{V_0}{d} S \\ &= \varepsilon_0 \frac{4V_0}{3d} S \end{aligned}$$



(青色矢印は電位，緑色矢印は電場を表す)

(b)

スイッチを開くと，極板 A と極板 B にたまっている合計の電荷，金属板 M にたまっている電荷はそれぞれ一定に保たれる。スイッチを開く直前まで MA 間と MB 間の電位差が異なるので，スイッチを開くと両者の電位差が等しくなるまで電流が流れる。

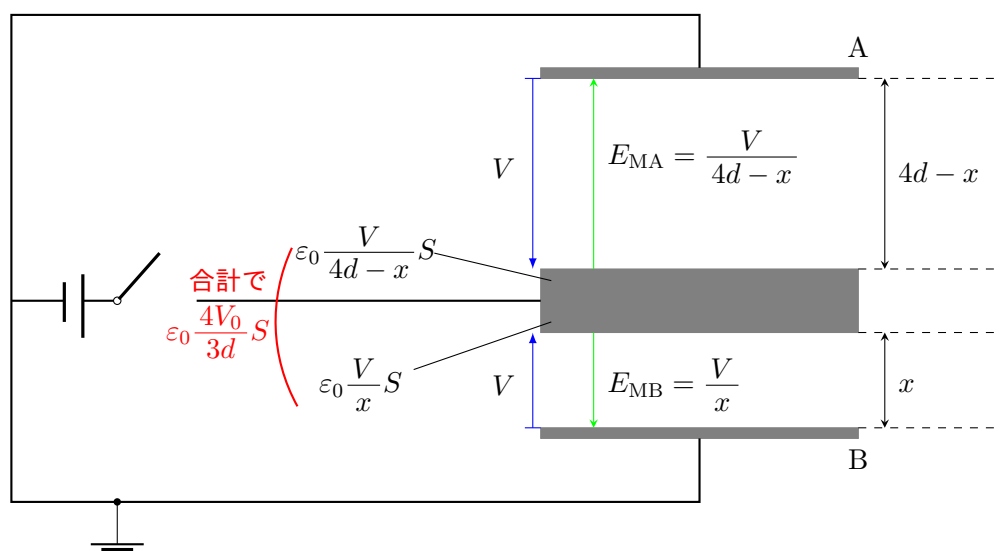
まず，電位 V を求めてしまえば話が早いので，電位を求める。求める電位を V とおくと，極板 A，金属板 M 間の電場の大きさ E_{MA} ，極板 B，金属板 M 間の電場の大きさ E_{MB} はそれぞれ，

$$E_{MA} = \frac{V}{4d - x}, E_{MB} = \frac{V}{x}$$

である。金属板 M の電荷はわかっているので，これを V を用いて表すと，

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{4V_0}{3d} S &= \varepsilon_0 E_{MA} S + \varepsilon_0 E_{MB} S \\ &= \varepsilon_0 \frac{V}{4d - x} S + \varepsilon_0 \frac{V}{x} S \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \therefore V &= \frac{V_0}{3} \left\{ 4 - \left(\frac{x}{d} - 2 \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

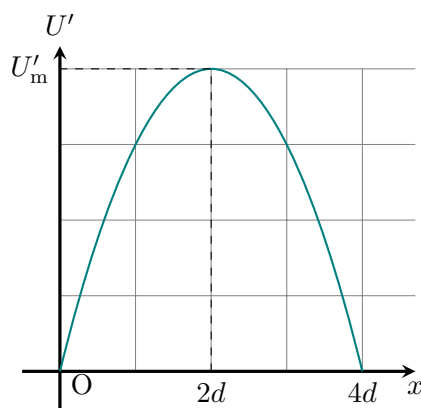
となる (次図参考)。



ここで、 V が求まったので、求める静電エネルギーは $U = \frac{1}{2} QV$ を用いて、

$$\begin{aligned} U' &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{4V_0}{3d} S \frac{V_0}{3} \left\{ 4 - \left(\frac{x}{d} - 2 \right)^2 \right\} \\ &= \frac{2}{9} \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{d} S \left\{ 4 - \left(\frac{x}{d} - 2 \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

よって、静電エネルギーが x の関数として求まったので、 U' の x に対する最大値も容易に求まり、グラフも簡単にかける。



グラフより、 U' が最大になるのは $x = 2d$ のときで、このとき、

$$U'_m = \frac{8}{9} \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{d} S, \quad x_m = 2d$$

となる。

(別解)

本質的にはなんら変わらないのだが、電気容量に着目して U' を求めてみる。

問 (1) (a) より, $C_A = \varepsilon_0 \frac{S}{4d-x}$, $C_B = \varepsilon_0 \frac{S}{x}$ である。金属板 M について、電荷保存則より、

$$\begin{aligned} Q_M &= \varepsilon \frac{4V_0}{3d} S = C_A V + C_B V \\ &= \varepsilon_0 \frac{S}{4d-x} V + \varepsilon_0 \frac{S}{x} V \end{aligned}$$

これは①と同じ式である。この後の計算は上の計算と同じである。

(c)

ゆっくりと移動させることを前提としているため、ジュール熱の発生が無視できるので、外力のした仕事はすべて静電エネルギーの増加に使われたと考えてよい。よって、

$$\begin{aligned} W'_e &= U'(2d) - U'(d) \\ &= \frac{2}{9} \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{d} S (4-3) \\ &= \frac{2}{9} \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{d} S \end{aligned}$$

となる。

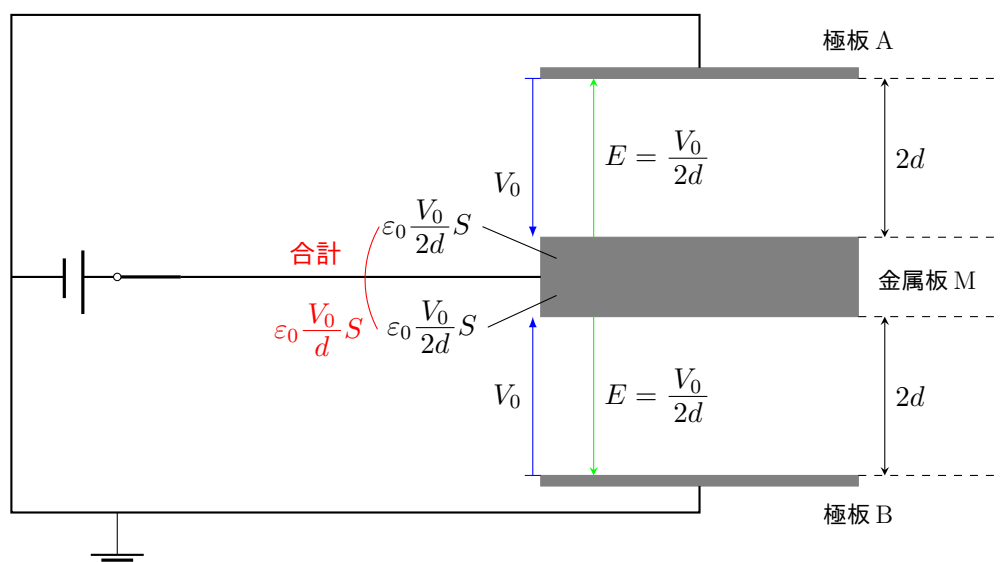
(d)

スイッチが閉じているとき、電池により、極板 A, 金属板 M 間の電位差と極板 B, 金属板 M 間の電位差がともに V_0 で一定に保たれる。もう一度金属板の位置に対する静電エネルギーの変化を x の関数として求めてもよいが、そのようなことをしなくても $x = x_m$ での状態を求めてしまえば、計算も楽に済む。

ここで、電池を通過する電荷を Δq , 静電エネルギーの変化を ΔU とすると、以下の等式が成り立つ。

$$(\text{静電エネルギーの変化}) = (\text{電池のする仕事}) + (\text{外力のする仕事})$$

$$\Delta U = \Delta q V_0 + W''_e$$



また、極板間の電位差は V_0 で一定のため、静電エネルギー変化は電荷の変化に比例する。金属板が $x = 2d$ の位置にあるときは金属板に蓄えられている電荷 Q''_M は、

$$Q''_M = 2 \cdot \varepsilon_0 \frac{V_0}{2d} S = \varepsilon_0 \frac{V_0}{d} S$$

である。よって、

$$\Delta q = Q''_M - Q_M = \varepsilon_0 \frac{V_0}{d} S - \varepsilon_0 \frac{4V_0}{3d} S = -\varepsilon_0 \frac{V_0}{3d} S$$

また、

$$\Delta U = \frac{1}{2} \Delta q V_0$$

であるから、

$$\begin{aligned} W''_e &= \Delta U - \Delta q V_0 \\ &= -\frac{1}{2} \Delta q V_0 \\ &= \frac{1}{6} \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{d} S \end{aligned}$$

(別解)

Δq を x の関数として求めて W''_e を導く。

問 (2) の (a) の状態から金属板 M と極板 B との距離が x となるまでに電池を通過した電荷を $q(x)$ とおく。

問 (1) の (a) より、

$$C_A = \varepsilon_0 \frac{S}{4d - x}, \quad C_B = \varepsilon \frac{S}{x}$$

よって,

$$\begin{aligned}\Delta q(x) &= (C_A V_0 + C_B V_0) - Q_M \\ &= \varepsilon_0 S V_0 \left(\frac{1}{4d-x} + \frac{1}{x} \right) - Q_M \\ &= \varepsilon_0 S V_0 \frac{4d}{(4d-x)x} - Q_M\end{aligned}$$

ここで, $x = x_m = 2d$, $Q_M = \varepsilon_0 \frac{4V_0}{3d} S$ を代入して,

$$\begin{aligned}\Delta q(2d) &= \varepsilon_0 S V_0 \frac{4d}{2d \cdot 2d} - \varepsilon_0 \frac{4V_0}{3d} S \\ &= -\varepsilon_0 \frac{V_0}{3d} S\end{aligned}$$

また, $\Delta U(x) = \frac{1}{2} \Delta q(x) V$ であるから,

$$\begin{aligned}W_e'' &= \Delta U(2d) - \Delta q(2d) V_0 \\ &= -\frac{1}{2} \Delta q(2d) V_0 \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\varepsilon_0 \frac{V_0}{3d} S \right) V_0 \\ &= \frac{1}{6} \varepsilon_0 \frac{V_0^2}{d} S\end{aligned}$$

(楊博, 仲里佑利奈, 岡部律心, 岡田和也)

2016 年度 東北大学 前期 物理

3 2 空間での理想気体の状態変化

出題範囲	気体の法則，熱力学第一法則
難易度	★☆☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	易しい問題であるから，ぜひ点につなげたい。エネルギーの収支を正しく考えたいところである。解けなかった人は，熱力学第一法則を見直して，確実に自分のものにしよう。さらに，熱力学問題でよくあることだが，各状態や隔てられた気体などによって温度や内部エネルギー，熱量が異なる。東北大は記述式であるから，自分で文字をしっかりと定義してから解答を書こう。

解説

問(1)

(a)

理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ より，

$$T = \frac{PV}{nR}$$

として温度が求まる。ここでは，

$$n = 1 \text{ mol}, \quad V = Sh_A, \quad P = p_{A0}$$

である。

よって，

$$T_A = \frac{p_{A0}Sh_A}{R}$$

である。

(b)

ピストンが静止しているため，ピストンについて，つり合いの式が立てられる。

$$p_B S = p_{A0} S + Mg$$

$$\therefore p_B = p_{A0} + \frac{Mg}{S}$$

また，理想気体の状態方程式より，

$$T_B = \frac{p_B S h_B}{R} = \frac{h_B}{R} (p_{A0} S + Mg)$$

問(2)

(a)

圧力の時々刻々の変化はわからないが，部分情報として変化前と変化後の状態はわかっている。ここで，空間 A は断熱変化をしているので，空間 A と外界との熱のやり取りはなく，熱力学第一法則より，

$$(\text{内部エネルギー変化}) = (\text{された仕事})$$

が成り立つ。状態 1 の空間 A 内の気体の温度を T_{A1} とする。

また，空間 A 内の気体は単原子分子理想気体であるから，定積モル比熱は $\frac{3}{2}R$ である。よって，内部エネルギーの変化量は，

$$\frac{3}{2}R(T_{A1} - T_A)$$

である。ここで，理想気体の状態方程式より，

$$T_{A1} = \frac{p_{A1} S (h_A - x)}{R}, \quad T_A = \frac{p_{A0} S h_A}{R}$$

であり，これを上の式に代入すればよい。以上より，

$$\begin{aligned} W &= \frac{3}{2}R(T_{A1} - T_A) \\ &= \frac{3}{2}S\{p_{A1}(h_A - x) - p_{A0}h_A\} \\ &= \frac{3}{2}S\{(p_{A1} - p_{A0})h_A - p_{A1}x\} \end{aligned}$$

(b)

空間 B の気体が外部にする仕事を W_{all} ，状態 1 における空間 B の気体の絶対温度を T_{B1} とすると，熱力学第一法則（エネルギー保存則）より，

$$Q = \Delta U + W_{\text{all}}$$

ここで，

$$\Delta U = \frac{3}{2}R(T_{B1} - T_B)$$

であり、再び理想気体の状態方程式より、

$$T_{B1} = \frac{\left(p_{A1} + \frac{Mg}{S}\right)S(h_B + x)}{R}, \quad T_B = \frac{\left(p_{A0} + \frac{Mg}{S}\right)Sh_B}{R}$$

また、 W_{all} は空間 B の気体が空間 A の気体とピストンにする仕事の合計である。よって、

$$W_{\text{all}} = W + Mgx$$

※補足

空間 A の高さを y_A 、空間 B の高さを y_B とすると、

$$y_A + y_B = h_A + h_B \text{ より, } dy_B = -dy_A$$

よって、

$$\begin{aligned} W_{\text{all}} &= \int_{h_B}^{h_B+x} p_B(y_B)Sdy_B \\ &= \int_{h_B}^{h_B+x} \left\{ p_A(y_A) + \frac{Mg}{S} \right\} Sdy_B \\ &= \int_{h_A}^{h_A-x} \left\{ p_A(y_A) + \frac{Mg}{S} \right\} S \cdot (-dy_A) \\ &= - \int_{h_A}^{h_A-x} p_A(y_A)Sdy_A + Mgx \\ &= W + Mgx \end{aligned}$$

(空間 B の高さが $h_B \rightarrow h_B + x$ に変化すると同時に、空間 A の高さは $h_A \rightarrow h_A - x$ に変化していることで積分区間が変化していることに注意)

以上より、

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{2} \{ (h_B + x)(p_{A1}S + Mg) - h_B(p_{A0}S + Mg) \} + \frac{3}{2} S \{ (p_{A1} - p_{A0})h_A - p_{A1}x \} + Mgx \\ &= \frac{5}{2} Mgx + \frac{3}{2} S(p_{A1} - p_{A0})(h_A + h_B) \end{aligned}$$

と求まる。

問(3)

(a)

状態 2 から状態 3 にかけて、空間 B の気体にかかる圧力は $p_0 + \frac{Mg}{S}$ で一定である。

仕事の定義 $\Delta W = p \cdot \Delta V$ から、

$$W' = (p_0 S + Mg)h_A$$

となる。

(b)

状態 2 から状態 3 にかけて、空間 B の気体にかかる圧力 p は $p_0 + \frac{Mg}{S}$ で一定である。

モル数一定の理想気体の定圧変化の過程では、温度は体積のみに依存し、定圧モル比熱が $\frac{5}{2}R$ であることから、理想気体の定圧モル比熱より、

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{5}{2}R\Delta T \\ &= \frac{5}{2}p\Delta V \\ &= \frac{5}{2}(p_0 S + Mg)h_A \end{aligned}$$

となる。

(別解)

状態 2 における、空間 B の気体の絶対温度を T_{B2} 、状態 3 における空間 B の気体の絶対温度を T_{B3} とする。
理想気体の状態方程式より、

$$\begin{aligned} T_{B2} &= \frac{1}{R} \left(\frac{Mg}{S} + p_0 \right) (h_A + h_B) S \\ T_{B3} &= \frac{1}{R} \left(\frac{Mg}{S} + p_0 \right) h_B S \end{aligned}$$

よって、このときの空間 B の気体の内部エネルギーの変化 ΔU は、

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{3}{2}R(T_{B3} - T_{B2}) \\ &= -\frac{3}{2}h_A(Mg + p_0 S) \end{aligned}$$

熱力学第一法則より,

$$\begin{aligned} Q' &= -\Delta U + W' \\ &= \frac{3}{2} h_A (Mg + p_0 S) + h_A (Mg + p_0 S) \\ &= \frac{5}{2} h_A (Mg + p_0 S) \end{aligned}$$

※補足

微小変化における理想気体の状態方程式を考える。

モル数一定の時の微小変化での状態方程式は,

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

または,

$$p\Delta V + V\Delta p = nR\Delta T$$

と書ける。これは以下のように導出される。

理想気体の状態方程式より,

$$\frac{pV}{T} = nR = \text{一定}$$

p , V , T を変化させて, $p + \Delta p$, $V + \Delta V$, $T + \Delta T$ とすると,

$$\frac{(p + \Delta p)(V + \Delta V)}{T + \Delta T} = \frac{pV}{T} = nR = \text{一定}$$

最初の等号について整理する。

$$\frac{pV + V\Delta p + p\Delta V + \Delta p\Delta V}{T + \Delta T} = \frac{pV}{T}$$

$$(pV + V\Delta p + p\Delta V)T = pV(T + \Delta T) \quad (\because 2 \text{ 次微小項は無視できる})$$

$$(V\Delta p + p\Delta V)T = pV\Delta T$$

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

となり,

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

が導かれる（各自手を動かしていただきたい）。また，この式の両辺に pV をかけて理想気体の状態方程式を適用すると，

$$V\Delta p + p\Delta V = \frac{pV}{T}\Delta T = nR\Delta T$$

も導出される。

（楊博，仲里佑利奈，三澤颯大，岡田和也）