2016 年度 東北大学 前期 数学

1　三角形の垂線と円の性質

出題範囲	平面図形
難易度	★★☆☆☆
所要時間	10 分
傾向と対策	三角形の 3 つの頂点から対辺に垂線を引いたとき，垂線の足と頂点の 4 点を通る円が複数存在する，という事実は有名である。(1) はこのうち 1 つの円についての証明であり，(2) は同一円周上にある 4 点をみつけ，円周角の定理をフルに活用していきたい。

解答

(1)【証明】三角形 AEH，AFH において $\angle AFH = 90°$，$\angle AEH = 90°$ より，線分 AH は三角形 AEH，AFH の外接円の直径である。したがって，この 2 つの三角形の外接円が一致しているので，4 点 A，E，F，H は同一円周上にある。[1]

[1] 「対角の和が 180° であるから四角形 AEHF は円に内接する」としてもよい。

また，三角形 BCF，BCE に注目すると，$\angle BFC = \angle BEC = 90°$ である。2 点 F，E は直線 BC に関して同じ側にあるので，円周角の定理の逆より，4 点 B，C，E，F は同一円周上に位置する。

以上より，四角形 BCEF と AEFH は円に内接する。　(証明終)

(2)【証明】四角形 BCEF は同一円周上に存在し，弧 EF に対する円周角が等しいので

$$\angle ECF = \angle FBE \quad \cdots\cdots ①$$

(1) と同様にして，四角形 ABDE，ACDF は円に内接する。

四角形 ABDE の外接円について，弧 AE に対する円周角が等しいので

$$\angle ADE = \angle ABE \quad \cdots\cdots ②$$

四角形 ACDF の外接円について，弧 AF に対する円周角が等しいので

$$\angle ADF = \angle ACF \quad \cdots\cdots ③$$

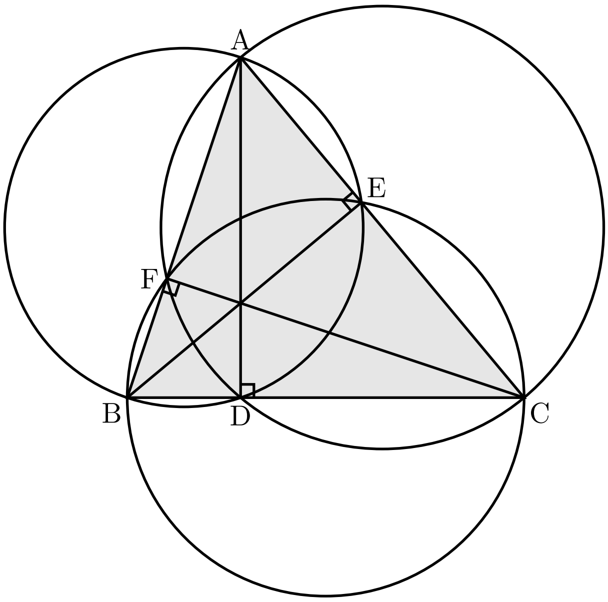
である。①，②，③ より

$$\angle ADF = \angle ADE$$

よって題意は示された。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

解説

(1)



図のように三角形 ABC の各頂点から対辺に垂線を下ろすと，その垂線の足 2 つと三角形の頂点 2 つの 4 点は同一円周上にある。また，垂心と 2 つの垂線の足と頂点の 4 点も同一円周上にある。証明は解答の通りでよいだろう。これは，垂心に関する問題が出たときにぜひとも思い出してほしい性質である。

(2) (2) の結果について，同様にして $\angle\mathrm{BED} = \angle\mathrm{BEF}$ および $\angle\mathrm{CFE} = \angle\mathrm{CFD}$ がわかるので，点 H は三角形 DEF の内心と一致することがわかる。

（河合敬宏，松岡駿，辻啓吾）

2016 年度 東北大学 前期 数学

2　数学的帰納法と整数の範囲の絞り方

出題範囲	整数の性質
難易度	★★★★☆
所要時間	20 分
傾向と対策	(1) は不等式評価の証明である。(2) は (1) の誘導を用いることで $p=2$ についてはすぐに示すことができるが，$p \geqq 3$ のときに解が存在しないことを如何に証明するかがカギとなっている。手法はいくつかあるので，解説及び別解を参考にしてほしい。

解答

(1)【証明】$2^n > n^2+7$　$\cdots\cdots$ ①

(i) $n=6$ のとき

$$2^6-(6^2+7) = 64-43$$
$$= 21 > 0$$

より，$2^n > n^2+7$ は $n=6$ のとき成立。

(ii) $n=k$ (k は 6 以上の整数) のとき

$2^k > k^2+7$ が成立すると仮定する。

両辺に 2 をかけて

$$2^{k+1} > 2k^2+14 = k^2+k\cdot k+1+13 \text{[1]}$$
$$> k^2+2k+1+13$$
$$> (k+1)^2+7$$

[1] $k>6$ より $k^2>2k$

これは，① が $n=k+1$ でも成立することを示している。

(i)(ii) より，n に関する数学的帰納法により，n が 6 以上の整数のとき，

① は成立する。　(証明終)

(2) $p^q = q^p+7$　$\cdots\cdots$ ②

(i) $p=2$ のとき

$$2^q = q^2+7 \quad \cdots\cdots ③$$

である。

(1) より，$q \leqq 5$ でないと等号は成立しないので，q が素数であること

を考慮すると，$q=2$，3，5 である。このうち，③ が成立するのは

$q=5$ のみである。

よって，$(p,q)=(2,5)$

(ii) $p \geqq 3$ のとき

p，q が素数なので，$q \geqq 3$ とすると，p^q，q^p ともに奇数になるため，

両辺の偶奇が一致しない。したがって，条件を満たし得るのは $q=2$

のときのみである。

このとき，② は

$$p^2 = 2^p + 7$$

$$\Leftrightarrow 2^p = p^2 - 7 \qquad \cdots\cdots ④$$

となる。

(1) より，p が 6 以上の整数のとき

$$2^p > p^2 + 7 > p^2 - 7$$

となるから，④ が成立するためには p は 5 以下の素数であることが必

要。

$p=3,5$ はともに ④ を満たさない。

(i)(ii) より，求める (p,q) の組み合わせは $(2,5)$ である。

解説

(1) 問題の通り，数学的帰納法を用いて解けばよい。また，2^n と n^2 の増加の度合いは大きく違うため，大雑把な評価でうまく下から評価すると解ける問題になっている。

(2) 計算を進めると，(1) より $q \leqq 5$ がいえるので，p の値の範囲を求めて，範囲内で 1 つずつ調べていくのが確実で無難である。p の範囲を絞る際に，p, q が素数であることと，両辺の偶奇に注目して処理量を減らしたい。また，この手の問題では，$y = 2^x - x^2 - 7$ のように差をとった関数を考えてその増減を調べる方法や，因数分解をして合同式を用いる等様々な方法があるので，複数の解き方を身につけておくと対応しやすくなるだろう。

別解

(2)(i) $p=2$ のときは **解答** と同じ。

(ii) $p \geqq 3$ のとき

$$p^2 = 2^p + 7$$

$$p^2 - 1 = 2^p + 6$$

$$(p+1)(p-1) = 2^p + 6$$

ここで，p は素数，すなわち $p \geqq 3$ のとき奇数であるため，(左辺) $\equiv 0 \pmod 4$

また，(右辺) $\equiv 2 \pmod 4$ である。

よって，$p \geqq 3$ のとき，$p^2 = 2^p + 7$ を満たす p は存在しない。

以下，**解答** と同じ。

別解解説

(2) $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ のように因数分解出来ることを利用した解答である。その後，左辺は 4 で割れて，右辺 $2(2^{p-1}+3)$ が 4 で割れないことに注目すると **解答** のような不等式評価を行うことなく簡潔に計算できる。

（河合敬宏，青木徹，辻啓吾）

2016 年度 東北大学 前期 数学

3 サイコロの目の出方と確率

出題範囲	確率／平面図形
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	初めは a, b, c の順番を考えずに，題意の三角形をつくる 3 つの数字の組み合わせを見つけるとよいだろう。そのうえで，順列の場合の数の分だけ掛ければよい。もれなく迅速に数え上げて次の問題に移りたい。

解答

題意を満たす三角形を考える際，(a, b, c) を $a' \leqq b' \leqq c'$ となる (a', b', c') に並び替えることができる。よって，$a \leqq b \leqq c$ である (a, b, c) とその並び替えを考えることですべての場合を考えることができる。

(1) 三平方の定理より

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たす a, b, c の組み合わせを考える。

右の $a^2 + b^2$ の値を示した表より，直角三角形になるのは $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ のときのみである。

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	2	×	×	×	×	×
2	5	8	×	×	×	×
3	10	13	18	×	×	×
4	17	20	25	32	×	×
5	26	29	34	41	50	×
6	37	40	45	52	61	72

以上より，求める確率は

$$3! \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$$

(2) 鈍角三角形となる条件は

$$a + b > c, a^2 + b^2 < c^2$$

が同時に成立するときである。a, b, c がすべて正なので

$$a^2 + b^2 < c^2 < (a + b)^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

が条件である。

右の表は $(a+b)^2$ の値を示す。
$1 \leqq c^2 \leqq 36$ であるから，(1) の表で $a^2+b^2<36$ となる組み合わせのみを考える。「●」は $a^2+b^2<36$ を満たさない組である。

b＼a	1	2	3	4	5	6
1	4	×	×	×	×	×
2	9	16	×	×	×	×
3	16	25	36	×	×	×
4	25	36	49	64	×	×
5	36	49	64	●	●	×
6	●	●	●	●	●	●

(i) $a=1$ のとき，① は $b^2<1+b^2<c^2<(1+b)^2$ となるが，連続する 2 つの自然数 $b, b+1$ の平方数の間に自然数 c の平方数は存在しないので不適である。

(ii) $a=2$ のとき，① は $4+b^2<c^2<(2+b)^2$ ……② となる。

(ii−1) $b=2$ のとき，② は $8<c^2<16$ となり，$c=3$

(ii−2) $b=3$ のとき，② は $13<c^2<25$ となり，$c=4$

(ii−3) $b=4$ のとき，② は $20<c^2<36$ となり，$c=5$

(ii−4) $b=5$ のとき，② は $29<c^2<49$ となり，$c=6$

よって，$(a,b,c)=(2,2,3),(2,3,4),(2,4,5),(2,5,6)$ の 4 つの組み合わせが存在する。

(iii) $a=3$ のとき，① は $9+b^2<c^2<(3+b)^2$ ……③ となる。

(iii−1) $b=3$ のとき，③ は $18<c^2<36$ となり，$c=5$

(iii−2) $b=4$ のとき，③ は $25<c^2<49$ となり，$c=6$

(iii−3) $b=5$ のとき，③ は $34<c^2<64$ となり，$c=6$

よって，$(a,b,c)=(3,3,5),(3,4,5),(3,5,6)$ の 3 つの組み合わせが存在する。

(iv) $a=4$ のとき，① は $16+b^2<c^2<(4+b)^2$ ……④ となる。

$b=4$ のとき，④ は $32<c^2<64$ となり，$c=6$ である。

よって，$(a,b,c)=(4,4,6)$ の 1 つの組み合わせが存在する。

(i)(ii)(iii)(iv) より，各組み合わせの順列も考えると，[1]求める確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{P}_3\cdot 5+{}_3\mathrm{P}_1\cdot 3}{216}=\frac{39}{216}=\frac{13}{72}$$

[1] (2,3,4) など，数字が 3 種類のものの並び替えは ${}_3\mathrm{P}_3$，(2,2,3) など，数字が 2 種類のものの並び替えは ${}_3\mathrm{P}_1$

解説

3 辺の長さが a, b, c $(a \leqq b \leqq c)$ である三角形が成立する条件は

$$c < a + b$$

である。また，鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形の成立条件は順に

$$a^2 + b^2 > c^2, a^2 + b^2 = c^2, a^2 + b^2 < c^2$$

である。この事実は重要なので，いま一度確認しておこう。

これらは，余弦定理を用いて確認することができる。

（青木徹，辻啓吾）

2016 年度 東北大学 前期 数学

4 複素数とド・モアブルの定理

出題範囲	複素数
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	二項定理を用いて $P(x)$ を展開してみよう。すると，x の指数が偶数の項しか残らないことがわかる。(2) では，$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ を (1) で計算する前の式に代入したほうが，ド・モアブルの定理が使えて累乗計算が楽になり，見通しがよくなる。(3) で差がつくが，(1)，(2) を利用しようと考え，$Q(x_k) = P\left(\dfrac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right)$ であることに気づきたい。そこまで気づいたら，あとは 3 次方程式の解と係数の関係を用いて答えを求めるだけである。

解答

(1)

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i} \\
&= \sum_{k=0}^{7} \frac{{}_7\mathrm{C}_k x^{7-k} i^k - {}_7\mathrm{C}_k x^{7-k}(-i)^k}{2i} \\
&= \sum_{k=0}^{7} \frac{{}_7\mathrm{C}_k \{i^k - (-i)^k\}}{2i} x^{7-k}
\end{aligned}
$$

よって，$x^{7-k}(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 7)$ の係数を比較して

$$
a_k = \frac{{}_7\mathrm{C}_k \{i^k - (-i)^k\}}{2i}
$$

である。

$k = 2m\ (m = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ のとき

$$
i^{2m} - (-i)^{2m} = i^{2m} - i^{2m} = 0
$$

$k = 2m+1\ (m = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ のとき

$$
i^{2m+1} - (-i)^{2m+1} = 2(-1)^m i
$$

であることを考慮して，求める答えは

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2i \cdot {}_7\mathrm{C}_1}{2i} = 7 \\ a_3 = -\dfrac{2i \cdot {}_7\mathrm{C}_3}{2i} = -35 \\ a_5 = \dfrac{2i \cdot {}_7\mathrm{C}_5}{2i} = 21 \\ a_7 = -\dfrac{2i \cdot {}_7\mathrm{C}_7}{2i} = -1 \\ a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0 \end{cases}$$

(2)【証明】

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) &= \frac{\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\right)^7 - \left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\right)^7}{2i} \\ &= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^7 - (\cos\theta - i\sin\theta)^7}{2i\sin^7\theta} \\ &= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^7 - (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^7}{2i\sin^7\theta} \end{aligned}$$

したがって，ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) &= \frac{(\cos 7\theta + i\sin 7\theta) - \{\cos(-7\theta) + i\sin(-7\theta)\}}{2i\sin^7\theta} \\ &= \frac{2i\sin 7\theta}{2i\sin^7\theta} \\ &= \frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta} \end{aligned}$$

となり，成立する。 (証明終)

(3) (1) より

$$P(x) = a_1x^6 + a_3x^4 + a_5x^2 + a_7$$

であるから

$$Q\left(x^2\right) = a_1x^6 + a_3x^4 + a_5x^2 + a_7 = P\left(|x|\right)$$

となる。$x_k = \dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ について

$$Q\left(x_k\right) = Q\left(\frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}\right) = P\left(\left|\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right|\right) = P\left(\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right) = \frac{\sin 7k\theta}{\sin^7 k\theta}$$ [1]

[1] $k\theta = \dfrac{\pi}{7}, \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{3\pi}{7}$ の範囲において，$\dfrac{\cos k\theta}{\sin k\theta} > 0$ が成立するため $P\left(\left|\dfrac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right|\right) = P\left(\dfrac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right)$ である。

$\theta = \dfrac{\pi}{7}$ を代入して

$$Q\left(x_k\right) = \frac{\sin k\pi}{\sin^7 \dfrac{k\pi}{7}}$$

$k=1,\ 2,\ 3$ であるので，$Q\left(x_k\right)=0$ である。

x の 3 次方程式 $Q\left(x\right)=7x^3-35x^2+21x-1=0$ の 3 解が $x=x_1,\ x_2$

，x_3 であり，これはこの 3 次方程式のすべての解である。

よって，解と係数の関係より，$x_1+x_2+x_3=-\dfrac{-35}{7}=5$ である。

解説

この問題を解く際にはいくつかの定理が絡んでくるのでまとめておこう。

◆Check!!

複素数の主要な定理

<1> ド・モアブルの定理

実数 θ と整数 k に対して

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

が成り立つ。

【証明】任意の実数 α, β について

$$\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(\cos\beta+i\sin\beta\right)$$

$$=\left(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\right)+i\left(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\right)$$

$$=\cos\left(\alpha+\beta\right)+i\sin\left(\alpha+\beta\right)$$

が成り立つ。

$k \geqq 0$ の場合を，k に関する数学的帰納法を用いて証明する。

$k=0$ の場合は成立する。

$k \geqq 0$ において，$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$ が成り立つとすると

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^{k+1}=\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^k\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$$

$$=\left(\cos k\theta+i\sin k\theta\right)\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$$

$$=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$$

以上より，k に関する数学的帰納法から，$k \geqq 0$ において

$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$ が成立する。

次に，$k<0$ の場合，$-k>0$ なので

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-k}=\cos(-k\theta)+i\sin(-k\theta)$$
$$=\frac{1}{\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)}$$

よって，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{k}=\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)$$

が成立する。

以上より，ド・モアブルの定理が成り立つ。 (証明終)

<2> 二項定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k$$

のように展開される。b^k の係数が ${}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}$ であることを表す。

n 個の $(a+b)$ の積のうち，k 個は b，$n-k$ 個は a を選んで掛け合わせると，$a^{n-k}b^k$ ができあがる，と考えると，a，b の選び方は ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りなので，それらを足し合わせると，${}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k$ となる。

n に関する帰納法で証明することができるが，ここでは扱わない。

<3> 因数定理

$P(x)$ を x の多項式とする。

$P(a)=0$ となるとき，$P(x)$ は $(x-a)$ で割り切れる。これを背理法を用いて示す。

【証明】$P(a)=0$ となるとき，$P(x)$ は $(x-a)$ で割り切れないと仮定すると，$Q(x)$ を x の多項式として

$$P(x)=(x-a)Q(x)+r \quad (r \text{ は定数項})$$

と表せるが，$P(a)=r\neq 0$ となってしまい，仮定 $P(a)=0$ に反する。よって，$P(a)=0$ となるとき，$P(x)$ は $(x-a)$ で割り切れる。 (証明終)

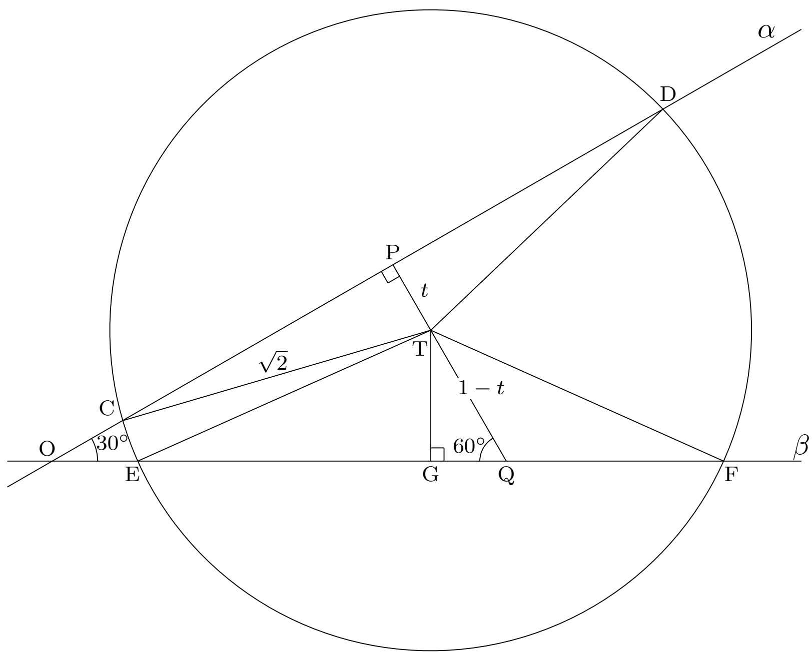
これらの定理はとても重要なので十分に理解しておくべきである。

（河合敬宏，青木徹，辻啓吾）

2016 年度 東北大学 前期 数学

5 球の切り口

出題範囲	平面図形
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	問題文が長く一見設定が複雑に見えるが，実際に図に描いて問われていることを整理してみると，平面図形の問題にすぎないことがわかる。点の位置関係も単純なので，平面図形の問題としてとらえることさえできればさほど難しくはないだろう。本問は，「空間図形は適切な断面で切り平面図形に落としこむことで解きやすくなる」という定石を確認できる問題である。



[1]

[1] 図は平面 OPQ(直線 l に対して垂直) で切った断面図。

S の平面 α による切り口である円を A，平面 β による切り口である円を B とする。

A の半径を r_1，B の半径を r_2 とおく。

三角形 OPQ は 3 辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形であり，$\angle\mathrm{POQ}=30^\circ$，$\angle\mathrm{PQO}=60^\circ$ である。A と直線 m との交点を O に近い方から順に C，D とおき，B と直線 n との交点を点 O から近い順に E，F とおく。

(1) TC は円 S の半径であるので，$\mathrm{TC}=\sqrt{2}$

よって

$$r_1 = \mathrm{PC} = \sqrt{\mathrm{TC}^2 - \mathrm{PT}^2}$$
$$= \sqrt{2 - t^2}$$

ゆえに，求める A の面積は $\pi r_1^2 = \pi(2 - t^2)$ である。

(2) 点 T から直線 n に下ろした垂線の足を G とする。

$\triangle\mathrm{TGQ} \backsim \triangle\mathrm{OPQ}$ であるので，

$$\mathrm{TG} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{TQ}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - t)$$

TE は球 S の半径であるので，

$$\mathrm{TE} = \sqrt{2}$$

三平方の定理より，

$$r_2 = \mathrm{EG} = \sqrt{\mathrm{TE}^2 - \mathrm{TG}^2}$$
$$= \sqrt{2 - \frac{3}{4}(1 - t)^2}$$
$$= \sqrt{-\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{5}{4}}$$

よって，円 B の面積は $\pi {r_2}^2 = \pi\left(-\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{5}{4}\right)$ である。

したがって，

$$f(t) = \pi\left\{-\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{5}{4} + 2 - t^2\right\}$$
$$= \pi\left\{-\frac{7}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{13}{4}\right\}$$
$$= \pi\left\{-\frac{7}{4}\left(t^2 - \frac{6}{7}t\right) + \frac{13}{4}\right\}$$
$$= \pi\left\{-\frac{7}{4}\left(t - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{9}{28} + \frac{13}{4}\right\}$$
$$= \pi\left\{-\frac{7}{4}\left(t - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{25}{7}\right\}$$

であるので，$0 \leqq t \leqq 1$ であることにより，

$t = \frac{3}{7}$ で $f(t)$ は最大値 $f\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{25}{7}\pi$ をとる。

解説

点の位置関係がわかれば，あとは三平方の定理や 2 次関数などの易しい問題に帰着する。空間図形の問題は平面で切ると急に簡単になることが多々あるので，図に描くことを常に意識しよう。

（河合敬宏，青木徹，佐藤賢志郎）

2016 年度 東北大学 前期 数学

6 複雑な三角関数を含んだ積分

出 題 範 囲	三角関数
難 易 度	★★★★☆
所 要 時 間	20 分
傾向と対策	被積分関数に絶対値記号が付いており，この絶対値を外して積分するのだが，それがなかなかやっかいな問題である。三角関数の和積に関する公式を用い，ひとつの和にまとめることができれば，処理がぐっと楽になる。

解答

$g(t) = \sin(t - x) - \sin 2t$ とおくと，

$$g(t) = 2\cos\frac{3t - x}{2}\cdot\sin\frac{-t - x}{2}$$
$$= -2\cos\frac{3t - x}{2}\sin\frac{t + x}{2}$$

と変形できる。$0 \leqq t \leqq \pi$，$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$0 \leqq \dfrac{t + x}{2} \leqq \pi$ であるから，$\sin\dfrac{t + x}{2} \geqq 0$

よって，$g(t)$ と $-2\cos\dfrac{3t - x}{2}$ との符号は一致する。

また，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{3t - x}{2} \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ である。

$-2\cos\dfrac{3t - x}{2} \leqq 0$ のとき，$\cos\dfrac{3t - x}{2} \geqq 0$ であるから，

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{3t - x}{2} \leqq \frac{\pi}{2}$$

t について整理して，

$$\frac{x - \pi}{3} \leqq t \leqq \frac{\pi + x}{3} \qquad \cdots\cdots\ ①$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$x - \pi \leqq 0$, $\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{\pi + x}{3} \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ であるから, $0 \leqq t \leqq \pi$ を考慮して，不等式 ① は以下のようになる。

$$0 \leqq t \leqq \frac{\pi + x}{3} \qquad \cdots\cdots\ ②$$

t が ② の範囲にあるとき，$g(t) \leqq 0$ となる。

$-2\cos\dfrac{3t - x}{2} \geqq 0$ のとき，$\cos\dfrac{3t - x}{2} \leqq 0$ であり，

$$\frac{\pi}{2} \leqq \frac{3t - x}{2} \leqq \frac{3\pi}{2}$$

t について整理して，

$$\frac{x+\pi}{3} \leqq t \leqq \pi + \frac{x}{3}$$

$0 \leqq t \leqq \pi$ を考慮して，

$$\frac{x+\pi}{3} \leqq t \leqq \pi \qquad \cdots\cdots\cdot \text{③}$$

t が ③ の範囲にあるときに $g(t) \geqq 0$ となる。

以上のことから，$\int g(t)\,dt = G(t)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\pi} |g(t)|\ dt \\ &= -\int_0^{\frac{x+\pi}{3}} g(t)\,dt + \int_{\frac{x+\pi}{3}}^{\pi} g(t)\,dt \\ &= G(\pi) + G(0) - 2G\left(\frac{x+\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

である。ここで，C を積分定数として，

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \{\sin(t-x) - \sin 2t\}\,dt \\ &= -\cos(t-x) + \frac{1}{2}\cos 2t + C \end{aligned}$$

であるので，

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos(\pi - x) + \frac{1}{2} - \cos(-x) + \frac{1}{2} - 2\left(-\cos\frac{\pi-2x}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{2x+2\pi}{3}\right) \\ &= 2\cos\frac{\pi-2x}{3} - \cos\frac{2x+2\pi}{3} + 1 \\ &= 2\cos\frac{\pi-2x}{3} - \cos\left(\pi - \frac{\pi-2x}{3}\right) + 1 \\ &= 3\cos\frac{\pi-2x}{3} + 1 \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi-2x}{3} \leqq \frac{\pi}{3}$ であるから，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \leqq \cos\frac{\pi-2x}{3} \leqq 1 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{5}{2} \leqq 3\cos\frac{\pi-2x}{3} + 1 \leqq 4 \end{aligned}$$

ゆえに，$f(x)$ の最大値と最小値は

$$\begin{cases} \text{最大値}\ 4 & \left(\frac{\pi-2x}{3}\ \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{2}\text{のとき}\right) \\ \text{最小値}\ \frac{5}{2} & \left(\frac{\pi-2x}{3} = \pm\frac{\pi}{3}\ \Leftrightarrow\ x = 0, \pi\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

解説

絶対値記号のついた関数はそのままでは積分することができない。よって，まず初めに積分記号を外すことを考える。三角関数の和・差は積に変形できることを利用すると，常に正である部分と，x，t によって符号が変わる部分を分離することができ，解答のように場合分けをすることができる。

別解として，三角関数の和積の公式を使わないで絶対値記号を外す解法を以下に載せている。

別解

$\sin(t-x)=\sin 2t$ となるような t を求める。

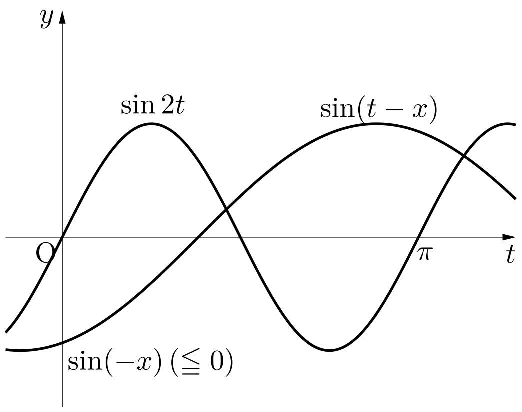
これが成立する条件は整数 k を用いて，

$$\begin{cases} t-x=2t+2k\pi & \cdots\cdots\text{④} \\ \text{もしくは} & \\ \pi-(t-x)=2t+2k\pi & \cdots\cdots\text{⑤} \end{cases}$$

と表される。④ より $t=-x-2k\pi$ だが，$0\leqq t\leqq\pi$ においてこれを満たす t は存在しない。

⑤ より $t=\dfrac{x-(2k-1)\pi}{3}$ である。$0\leqq t\leqq\pi$ を満たす t は $t=\dfrac{x+\pi}{3}$ のみである。

よって，グラフ $y=\sin(t-x)$ と $y=\sin 2t$ は $t=\dfrac{x+\pi}{3}$ で交わる。



上のグラフより

$0\leqq t\leqq\dfrac{x+\pi}{3}$ において $\sin(t-x)\leqq\sin 2t$ であり，$\dfrac{x+\pi}{3}\leqq t\leqq\pi$ において $\sin(t-x)\geqq\sin 2t$ である。

以下，**解答** と同じ。

（河合敬宏，青木徹，佐藤賢志郎）