2016 年度 東北大学 前期 数学

1　ベクトルと点の存在範囲

出題範囲	平面図形
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	平面ベクトルに関する領域の基本的な問題。(1) はいくつか解法例が考えられるが，本解では s，t を x，y の式で表すことで解いた。別解で示したように座標系を取り換える方法もある。(2) では，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値を x，y(別解では s，t）で表した直線の方程式とみて解いた。(s,t) で表す方が図からは分かりやすいが，x，y で表しても，傾きを考えれば同様にして解くことができる。

解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,y)$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)=s(3,1)+t(1,2)$$

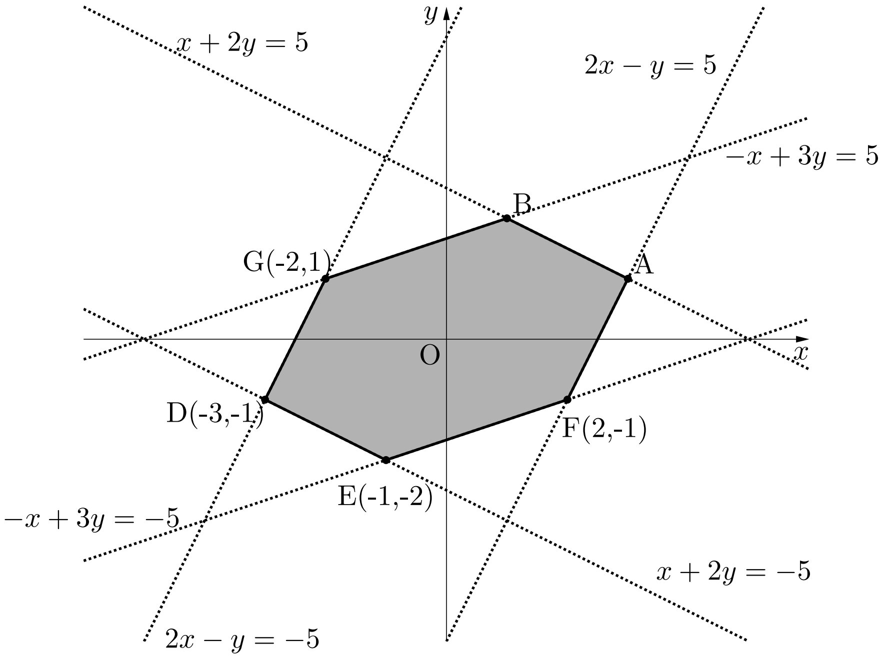
$$\Leftrightarrow (x,y)=(3s+t,s+2t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s=\dfrac{1}{5}(2x-y) \\ t=\dfrac{1}{5}(-x+3y) \end{cases}$$

条件より $-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ なので

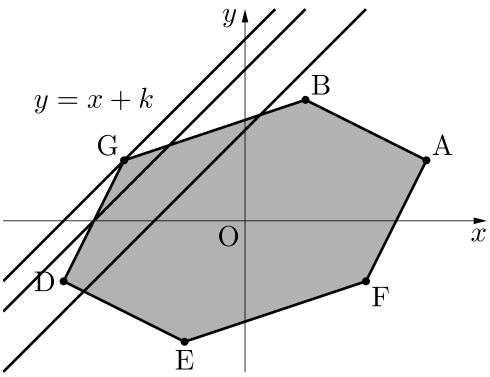
$$\begin{cases} -1\leqq\dfrac{1}{5}(2x-y)\leqq 1\Leftrightarrow 2x-5\leqq y\leqq 2x+5 \\ -1\leqq\dfrac{1}{5}(-x+3y)\leqq 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}(x-5)\leqq y\leqq\dfrac{1}{3}(x+5) \\ -1\leqq\dfrac{1}{5}(x+2y)\leqq 1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}(x+5)\leqq y\leqq-\dfrac{1}{2}(x-5) \end{cases}$$

よって，点 $\mathrm{P}(x,y)$ の存在範囲は次の図の網掛部。(境界はすべて含む。)



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-x+y=k$ とおく。

これは直線 $l: y=x+k$ の方程式とみることができる。この直線 l が範囲 D と共有点を持つ中で最大の y 切片を求めればよい。



$\mathrm{D}(-3,-1)$，$\mathrm{G}(-2,1)$，$\mathrm{B}(1,2)$ より直線 DG，BG の傾きはそれぞれ順に $2, \dfrac{1}{2}$ であるので，点 P が点 G に位置するときに直線 $y=x+k$ の切片が最大となる。このとき点 $\mathrm{P}(-2,1)$ より

$$k=-(-2)+1=3$$

であり，これが求める最大値である。

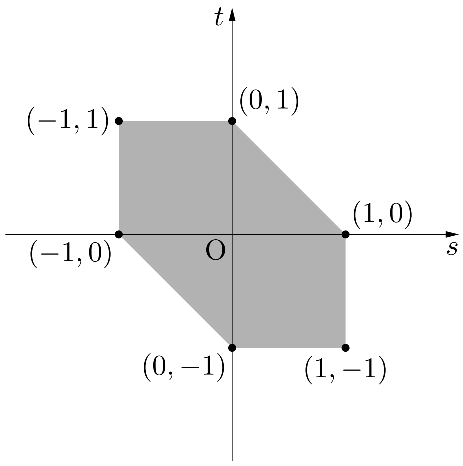
解説

(1) (s,t) の関係式を (x,y) の関係式に直して図示する。

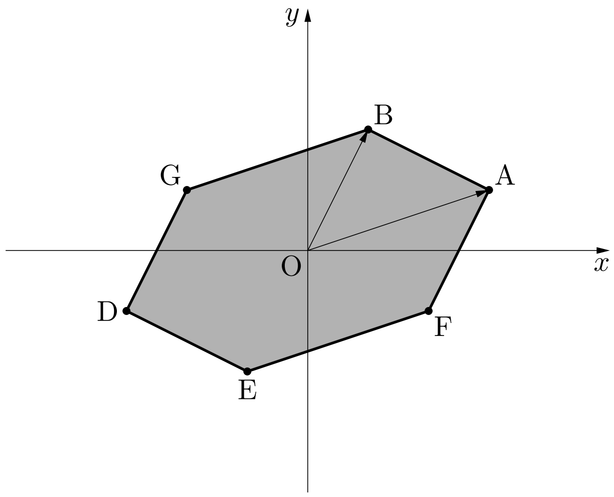
(2) x と y の式で $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を表して，それが最大になる場合を考える。直線の式とみて図示すると解ける。

別解

(1) s と t の動く範囲を (s,t) 座標平面に図示すると下の網掛部となる。



点 $\mathrm{P}(x,y)$ の存在範囲は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を基本ベクトルとする斜交座標で，それぞれの係数 s，t が指定された範囲を動くので，

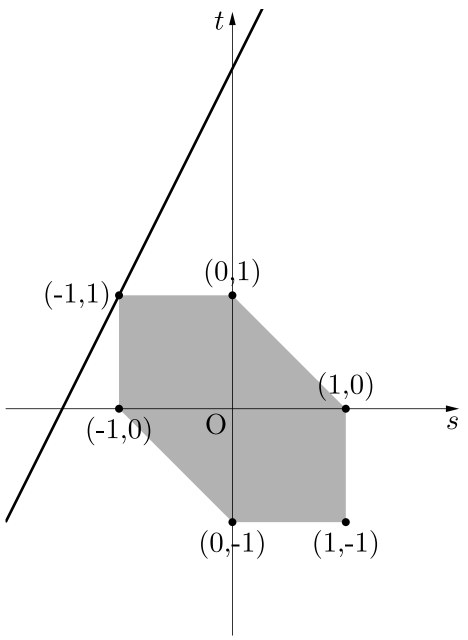


(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。

このとき $(x,y) = (3s+t, s+2t)$ となる。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -2s+t$ となる。

(s,t) の動く範囲は (1) に図示したとおりで，**解答** と同様にして $-2s+t=k$ を直線の方程式とみて，その直線が (s,t) の動く領域と共有点をもつときの t 切片が最大のときを求めると，



図より明らかに $s=-1$，$t=1$ のときに最大値 3 をとる。

別解解説

(1) 斜交座標とは，その名前のとおり，2 つの軸が斜めに交わる座標平面のことである。

一般に用いられる直交座標は 2 つのベクトル $(1,0),(0,1)$ を基本ベクトルとみなした斜交座標ということができる。直交座標上の点 $Q(x,y)$ の位置ベクトルは基本ベクトル $(1,0),(0,1)$ の一時結合として $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=x(1,0)+y(0,1)$ と表せる。これの基本ベクトルを斜めにとれば，軸が斜めの座標平面を定義できることがわかるだろう。斜交座標の便利なところは，図形に合わせた軸の（つまり基本ベクトルの）設定をすることで，図形上の頂点が簡単に表すことができる点である。

この **別解** を例にとって考えてみよう。直交座標系で図形の形を考えようとすると，答えとなる図形の辺はどれも軸と何の関係もないないので，その頂点は直線の交点として求めるほかない。

しかし，斜交座標で考えれば，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ はまさに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を基本ベクトルとした斜交座標上の点 (s,t) であるとみることができる。

斜交座標上にそのまま点 (s,t) を図示してもよいが，それは難しいので，この **別解** では，一度直交座標上に点 (s,t) の動く領域を図示し，概形を視覚的にとらえてから斜交座標上の考えを用いて図示した。

実際，

$(s,t)=(1,0)$ のとき点 A

$(s,t)=(0,1)$ のとき点 B

$(s,t)=(1,1)$ のとき点 G

$(s,t)=(-1,0)$ のとき点 D

$(s,t)=(0,-1)$ のとき点 E

$(s, t) = (1, -1)$ のとき点 F

という対応関係を考えて，s，t を動かしてみると，解答のような図がかけることがわかる。

幾何的な観点から容易に図示できるので，本解よりも少ない計算量で解くことができる。

(2) 本解以上に図より自明になる。

（河合敬宏，木村圭佑，沈有程）

2016年度 東北大学 前期 数学

2　点が満たす条件とその図示

出題範囲	積分
難易度	★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	(1) は定数分離を思いついてしまえば早い。(2) はその応用であり，(3) はサービス問題である。すべてグラフをかいて考える。

解答

(1) 直線 $y=-2|x|+k$ が放物線 C と共有点をもつための条件は

$$-\frac{1}{2}x^2=-2|x|+k \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+2|x|=k$$

が実数解をもつことであるので，

直線 $y=k$ と関数 $y=-\frac{1}{2}x^2+2|x|$ $(=f(x)$ とおく$)$ が共有点をもつ条件

を求めればよい。[1]

[1] 定数分離をした。

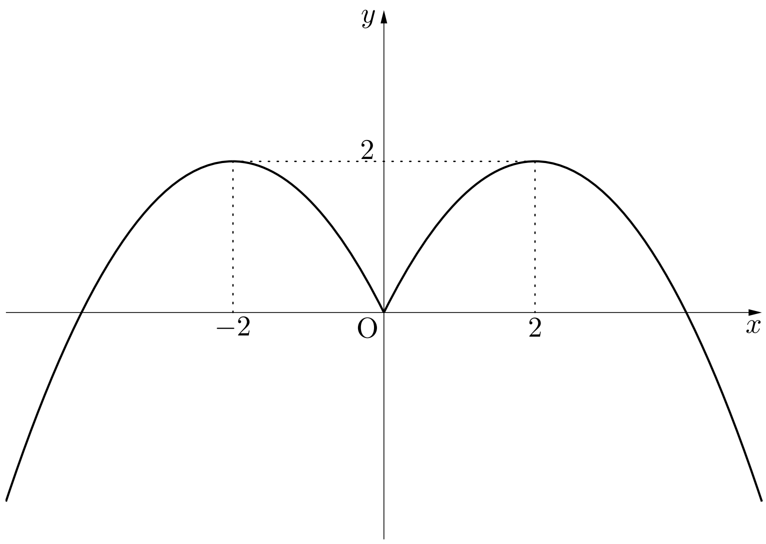
(i) $x \geqq 0$ のとき

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$$

(ii) $x<0$ のとき

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2$$

したがって，関数 $y=f(x)$ のグラフは図のようになる。



このグラフと直線 $y=k$ が共有点をもつ条件を考えて，求める k の範囲は

$$k \leqq 2$$

(2) 直線 $y=-2|x-a|+b$ が放物線 C と共有点をもつための条件は

$$-\frac{1}{2}x^2=-2|x-a|+b \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+2|2-a|=b$$

が実数解をもつことであるので，直線 $y=b$ と

関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2|x-a|\ \bigl(=g(x)$ とおく$\bigr)$ が共有点をもつ条件を求めれ

ばよい。

$x \geqq a$ のとき

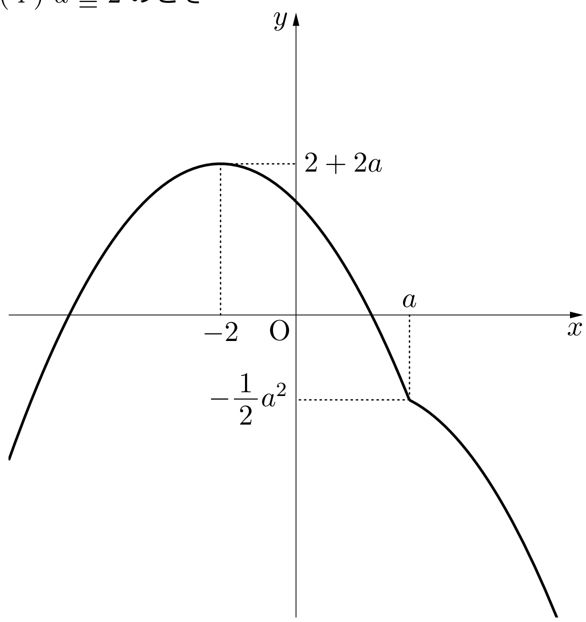
$$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2(x-a)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2-2a$$

$x<a$ のとき

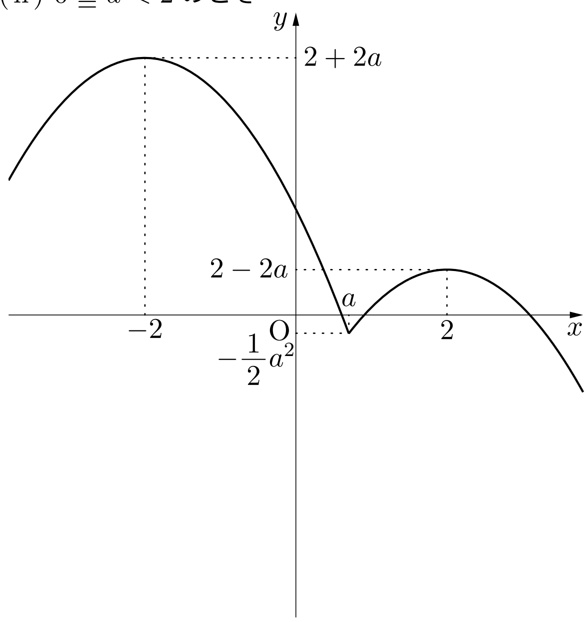
$$g(x)=-\frac{1}{2}x^2-2(x-a)=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2+2a$$

したがって，関数 $y=g(x)$ のグラフは図 (i)〜(iv) のようになる。

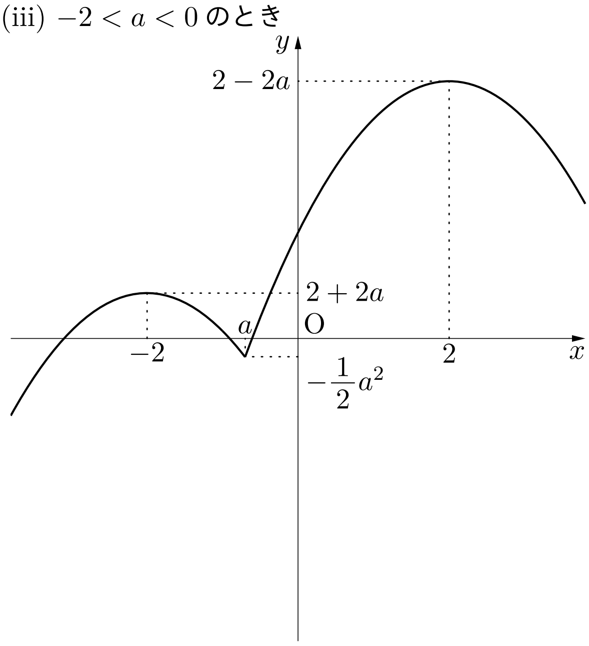
(i) $a \geqq 2$ のとき



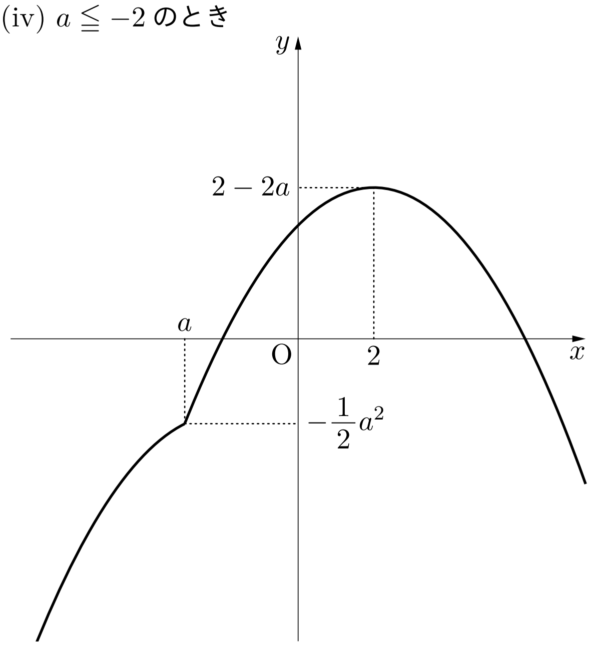
(ii) $0 \leqq a < 2$ のとき



(iii) $-2 < a < 0$ のとき



(iv) $a \leqq -2$ のとき

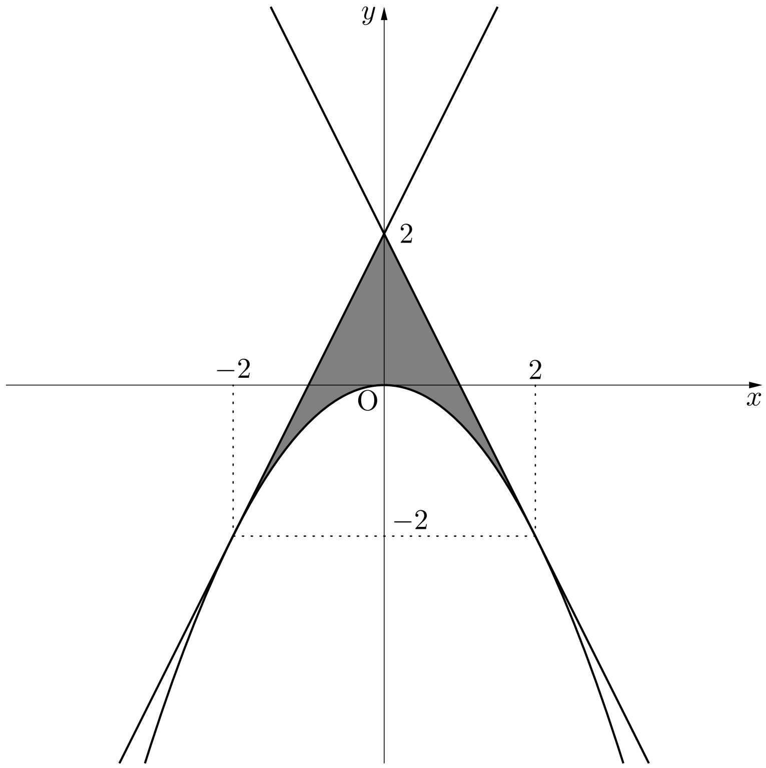


このグラフと直線 $y = k$ が共有点をちょうど 4 個もつ条件は

$$\left(0 \leqq a < 2 \text{ かつ } -\frac{1}{2}a^2 < b < 2 + 2a\right) \text{ または } \left(-2 < a < 0 \text{ かつ } -\frac{1}{2}a^2 < b < 2 - 2a\right)$$

よってこれを満たす (a, b) を xy 平面上に図示すると，

領域 D は次の網掛部。ただし境界線は含まない。



(3) 領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \left\{(2-2x) - \left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right\} dx = 2\left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^2$$
$$= \frac{8}{3}$$

解説

(1) 共有点をもつ条件→定数分離をして考える，という発想にすぐに至りたい。

(2) a の値によってグラフの形が大きく変わるので，丁寧に場合分けをして考えよう。

4 点で交わるためには $-2 < a < 2$ という条件が必要である。

(3) (2) が解けた人へのサービス問題である。領域 D の範囲が有限であるというヒントにもなっている。

（河合敬宏，江崎ゆり子，沈有程）

2016 年度 東北大学 前期 数学

3　不定方程式

出題範囲	整数の性質
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	落ち着いて場合分けしていけば解けるだろう。ただし整数問題は，本問のように数え上げられるとは限らないため，条件を絞り込む方法をしっかり身につけておくべきである。

解答

条件より

$$7l + 9m + 12n = 54$$

$$7l = 3(18 - 3m - 4n)$$

7 と 3 は互いに素なので，l は 3 の倍数である。[1]

$0 \leqq l \leqq 7$ かつ l が 3 の倍数であることより，$l = 0,\ 3,\ 6$

(i) $l = 0$ のとき

$$3m + 4n = 18$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq n \leqq 4$$

$n = 0$ のとき，$m = 6$

$n = 3$ のとき，$m = 2$

$n = 1,\ 2$ のとき，m は整数とならないので不適。

(ii) $l = 3$ のとき

$$3m + 4n = 11$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq n \leqq 2$$

$n = 2$ のとき，$m = 1$

$n = 0,\ 1$ のとき，m は整数とならないので不適。

[1] 不定方程式の整数解を求めるときの定石は，係数が互いに素であることを利用して解を絞り込む方法である。

(iii) $l = 6$ のとき

$$3m + 4n = 4$$

$(m, n) = (0, 1)$ のみ

以上 (i)(ii)(iii) より

$$(l, m, n) = (0, 6, 0),\ (0, 2, 3),\ (3, 1, 2),\ (6, 0, 1)$$

解説

l が 3 の倍数であることにはすぐ気づきたい。本問では，3 と 7 が互いに素であることを利用して，l の取り得る値を一気に絞り込んでいる。また，$0 \leqq n \leqq 4$ であることを利用して絞り込んでもよい。とにかく絞り込んで，各場合について個別に考えれば答えは得られる。

（河合孝弘，江崎ゆり子，沈有程）

2016 年度 東北大学 前期 数学

4 三角形の垂線と円の性質

出題範囲	平面図形
難易度	★★☆☆☆
所要時間	10 分
傾向と対策	三角形の 3 つの頂点から対辺に垂線を引いたとき，垂線の足と頂点の 4 点を通る円が複数存在する，という事実は有名である。(1) はこのうち 1 つの円についての証明であり，(2) は同一円周上にある 4 点をみつけ，円周角の定理をフルに活用していきたい。

解答

(1)【証明】三角形 AEH，AFH において $\angle AFH = 90°$，$\angle AEH = 90°$ より，線分 AH は三角形 AEH，AFH の外接円の直径である。したがって，この 2 つの三角形の外接円が一致しているので，4 点 A，E，F，H は同一円周上にある。[1]

また，三角形 BCF，BCE に注目すると，$\angle BFC = \angle BEC = 90°$ である。2 点 F，E は直線 BC に関し同じ側にあるので，円周角の定理の逆より，4 点 B，C，E，F は同一円周上に位置する。

以上より，四角形 BCEF と AEHF は円に内接する。 (証明終)

[1] 「対角の和が 180° であるから四角形 AEHF は円に内接する」としてもよい。

(2)【証明】四角形 BCEF は同一円周上に存在し，弧 EF に対する円周角が等しいので

$$\angle ECF = \angle FBE \qquad \cdots\cdots\ ①$$

(1) と同様にして，四角形 ABDE，ACDF は円に内接する。四角形 ABDE の外接円について，弧 AE に対する円周角が等しいので

$$\angle ADE = \angle ABE \qquad \cdots\cdots\ ②$$

四角形 ACDF の外接円について，弧 AF に対する円周角が等しいので

$$\angle ADF = \angle ACF \qquad \cdots\cdots\ ③$$

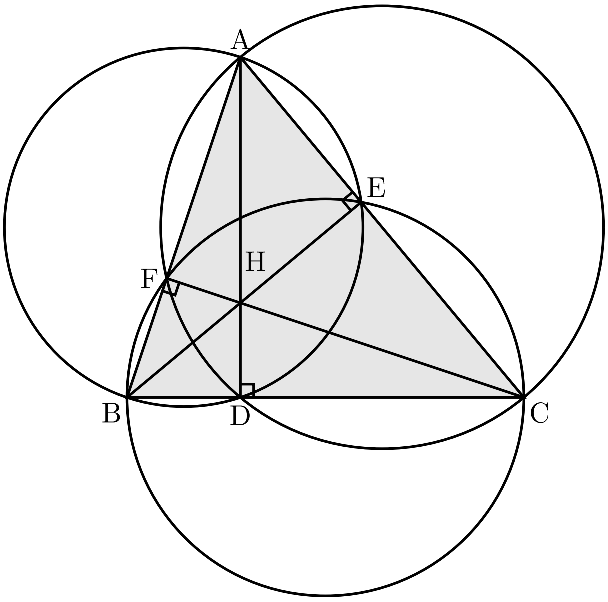
である。①，②，③ より

$$\angle ADF = \angle ADE$$

よって題意は示された。　　(証明終)

解説

(1)



図のように三角形 ABC の各頂点から対辺に垂線を下ろすと，その垂線の足 2 つと三角形の頂点 2 つの 4 点は同一円周上にある。また垂心と 2 つの垂線の足と頂点の 4 点も同一円周上にある。証明は解答の通りでよいだろう。これは垂心に関する問題が出たときにぜひとも思い出してほしい性質である。

(2) (2) の結果について，同様にして $\angle \mathrm{BED} = \angle \mathrm{BEF}$ および $\angle \mathrm{CFE} = \angle \mathrm{CFD}$ がわかるので，点 H は三角形 DEF の内心と一致することがわかる。

（河合敬宏，松岡駿，辻啓吾）