2015 年度 東北大学 前期 物理

1 円筒面に沿った 2 小球の運動，弾性衝突

出題範囲	運動量保存則，反発係数，円運動，力学的エネルギー保存則
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	円運動を中心に 2 物体の衝突をからめた問題で，基本は運動方程式やエネルギー保存の関係から問題を考察していけばよい。2 物体間における重心速度，相対速度の関係を理解していると，問(1)(d)などの答えが瞬時に導ける。

解説

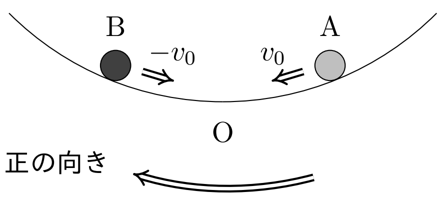
問 (1)

(a)

速さ v_0 で円筒部に導入された小球はその後位置エネルギーが変化しないので，運動エネルギーも変化しない。よって，円筒内でも速さ v_0 で等速円運動を続ける。円筒内の円周の長さは $2\pi r$ であるから，求める周期は，

$$T = \frac{2\pi r}{v_0}$$

(b)



運動量保存則から，

$$m_A v_0 + m_B(-v_0) = m_A v_A + m_B v_B$$

また，衝突は弾性衝突であるから，

$$-\frac{v_B - v_A}{-v_0 - v_0} = 1$$

以上 2 式を解いて，

$$v_A = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B} v_0$$

$$v_B = \frac{3m_A - m_B}{m_A + m_B} v_0$$

（別解）

衝突時の小球 A，小球 B の重心速度は，

$$v_\mathrm{G} = \frac{m_\mathrm{A}v_0 + m_\mathrm{B}\cdot(-v_0)}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}} = \frac{m_\mathrm{A}-m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}}v_0$$

また，小球 B から見た小球 A の相対速度は $2v_0$ であるから，これを質量の逆比に分割し，符号に注意して双方にそれぞれ足せばよい（注 1 を参照）。

よって，

$$v_\mathrm{A} = v_\mathrm{G} - \frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}}\cdot 2v_0 = \frac{m_\mathrm{A}-3m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}}v_0$$

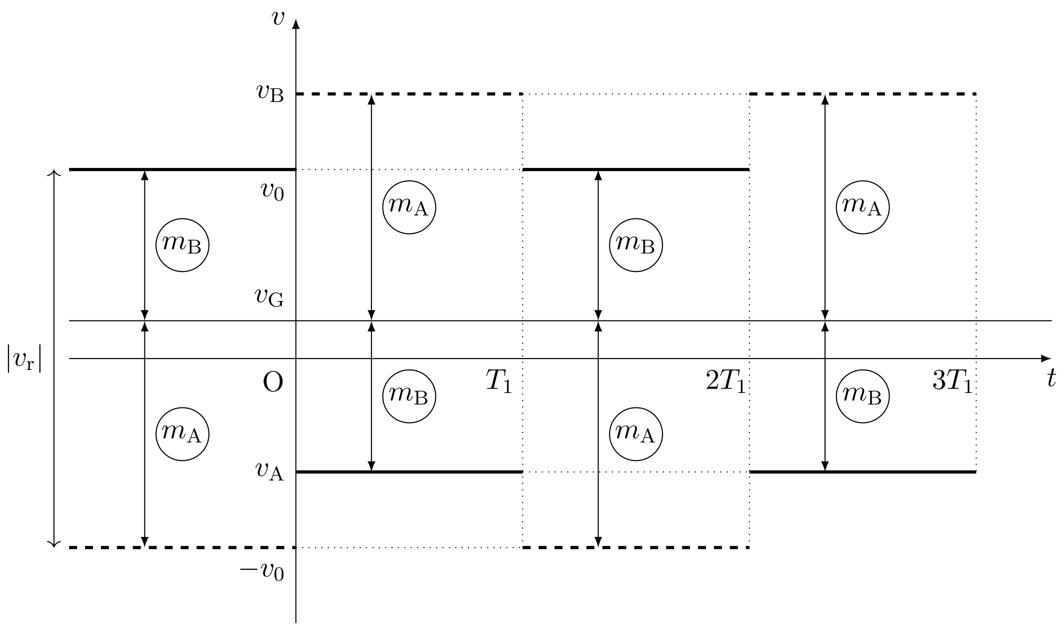
$$v_\mathrm{B} = v_\mathrm{G} + \frac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}}\cdot 2v_0 = \frac{3m_\mathrm{A}-m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}}v_0$$

※注 1

いま，v_G の定義式と内分点の公式を比較すると，v_G は A の速度と B の速度を $m_\mathrm{B} : m_\mathrm{A}$ に内分した速度にあたることがわかる。

また，小球 B から見た小球 A の相対速度を v_r とすると，衝突はすべて弾性衝突なので，衝突した回数によらず $|v_\mathrm{r}|$ は一定である（なお，注 2 では，力学的エネルギーに着目して $|v_\mathrm{r}|$ が不変であることを説明している）。

したがって，重心速度が変わらないことに注意して，小球 A の速度を太実線，小球 B の速度を太点線で表すと，2 つの小球の運動は下図のように表されるため，別解のように問題を解くことができる。



(c)

弾性衝突ということは，相対速度の大きさは変わらないので（注 2 を参照），衝突前の小球 B から見た小球 A の速度が $2v_0$ であることから，

$$v_B - v_A = 2v_0$$

よって，2 回目の衝突までにかかる時間は，

$$\boldsymbol{T_1} = \frac{2\pi r}{2v_0} = \boldsymbol{\frac{\pi r}{v_0}}$$

※注 2

直線上を，それぞれ m_A，m_B の質量をもった球 A，B がそれぞれ速度 v_A，v_B で運動していたとする。このとき，2 つの小球のもつ運動エネルギーの和 K は，

$$K = \frac{1}{2}m_A{v_A}^2 + \frac{1}{2}m_B{v_B}^2$$

で表される。ここで，これを変形すると，以下のようになる。

$$\frac{1}{2}m_A{v_A}^2 + \frac{1}{2}m_B{v_B}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}(v_A - v_B)^2 + \frac{1}{2}m_G{v_G}^2 \qquad \cdots\cdots(*)$$

ただし，m_G は A と B の質量の合計値，v_G は A と B の重心の速度で，

$$v_G = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$$

気になる人は，右辺に m_G と v_G の値を実際に代入して整理し，左辺に一致していることを確かめるとよい。

このとき，右辺の第 1 項目を相対運動の運動エネルギー，第 2 項目を重心の運動エネルギーと見なすことができる。これを用いて問題を解いてみる。

1 回目の衝突直後の小球 A と小球 B の速度を ${v_A}'$，${v_B}'$ とする。小球どうしは弾性衝突をするので，衝突前後で力学的エネルギーは保存するから，

$$\frac{1}{2}m_A{v_A}'^2 + \frac{1}{2}m_B{v_B}'^2 = \frac{1}{2}m_A{v_A}^2 + \frac{1}{2}m_B{v_B}^2$$

衝突前後で小球にはたらくのは内力のみであるから，運動量保存則が成り立ち，重心速度は変わらない。両辺を(＊)で導いた式を用いて変形して，

$$\frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}({v_A}' - {v_B}')^2 + \frac{1}{2}m_G{v_G}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}(v_A - v_B)^2 + \frac{1}{2}m_G{v_G}^2$$

$$\therefore \quad |{v_A}' - {v_B}'| = |v_A - v_B|$$

よって，A と B の相対速度の大きさは変化せず $2v_0$ であるから，2 回目の衝突までにかかる時間は，

$$T_1 = \frac{2\pi r}{2v_0} = \frac{\pi r}{v_0}$$

数式で書くと複雑に見えてしまうが，言葉で説明することもできる。

先ほども書いた理由より，小球の重心速度は変わらないので，重心の運動エネルギーは変化しない，また，弾性衝突なので，全体で見ても衝突前後で運動エネルギーの総和は保存していることがわかる。

ところで，先ほども示した通り，

$$\text{（運動エネルギーの総和）} = \text{（相対運動の運動エネルギー）} + \text{（重心の運動エネルギー）}$$

であるから，相対運動の運動エネルギーも衝突前後で変わらない。よって，相対速度の絶対値は衝突前後で変わらない。

(d)

(b)で得られた結果において，分子分母ともに m_B で割ると，

$$v_\mathrm{A} = \frac{\dfrac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}} - 3}{\dfrac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}} + 1} v_0$$

$$v_\mathrm{B} = \frac{3\dfrac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}} - 1}{\dfrac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}} + 1} v_0$$

$m_\mathrm{B} \gg m_\mathrm{A}$ より，$\dfrac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}} \to 0$ とできるので，$v_\mathrm{A} \to -3v_0$，$v_\mathrm{B} \to -v_0$ と近似できる。

また，注 2 と同様に，1 回目の衝突直後の小球 A と小球 B の速度を v_A'，v_B' とすると，(b)と同様にして，

$$m_\mathrm{A}(-3v_0) + m_\mathrm{B}(-v_0) = m_\mathrm{A} v_\mathrm{A}' + m_\mathrm{B} v_\mathrm{B}'$$

$$-\frac{v_\mathrm{B}' - v_\mathrm{A}'}{(-v_0) - (-3v_0)} = 1$$

これを解き，分子分母ともに m_B で割ると，

$$v_\mathrm{A}' = \frac{-3\dfrac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}} + 1}{\dfrac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B} + 1}} v_0$$

$$v_\mathrm{B}' = \frac{-5\dfrac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}} - 1}{\dfrac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}} + 1} v_0$$

さきほどと同様に $\dfrac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}} \to 0$ とできるので，$v_{\mathrm{A}}' \to v_0$，$v_{\mathrm{B}}' \to -v_0$ と近似できる。これは小球 A と小球 B ともに最初の衝突前の速度と同じである。

したがって，以後衝突を繰り返すたびに，$(v_{\mathrm{A}},\ v_{\mathrm{B}})$ は $(v_0,\ -v_0)$ と $(-3v_0,\ -v_0)$ の値を交互にとることがわかる。v_{B} は常に $-v_0$ であるから，答えは（ウ）か（オ）に絞られる。

また，弾性衝突なので，小球の相対速度の大きさは衝突前後で変わらないから，衝突の時間間隔は常に一定である。

以上を満たしているのは **（オ）** となる。

問（2）

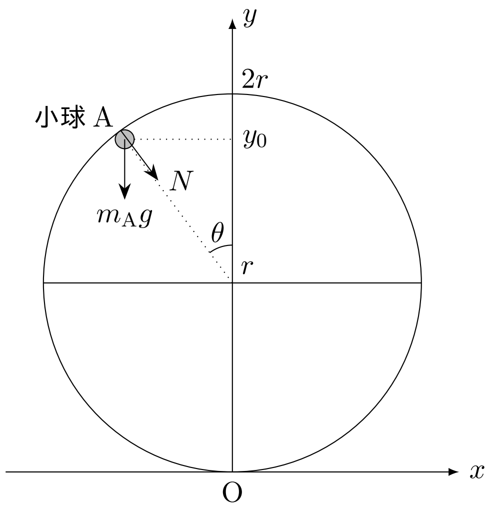
（a）

力学的エネルギー保存則から，

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}{V_0}^2 = m_{\mathrm{A}}g \cdot 2r$$

$$\boldsymbol{V_0 = 2\sqrt{gr}}$$

（b）



非等速円運動では，力学的エネルギー保存則と運動方程式を立てるのが定石である。円筒から離れる直前の小球の速さを v とする。最初に小球 A を落としたときから力学的エネルギーは保存しているので，右図のように θ をおくと，

$$m_{\mathrm{A}}gr(1+\cos\theta) + \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v^2 = m_{\mathrm{A}}g \cdot 2r$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v^2 = m_{\mathrm{A}}gr(1-\cos\theta) \qquad \cdots\cdots ①$$

また，小球の向心方向の運動方程式から，

$$m_{\mathrm{A}}\frac{v^2}{r} = N + m_{\mathrm{A}}g\cos\theta$$

これに①を代入して，

$$2m_{\mathrm{A}}g(1-\cos\theta) = N + m_{\mathrm{A}}g\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad N = m_{\mathrm{A}}g(2-3\cos\theta) \qquad \cdots\cdots ②$$

小球が円筒に沿って運動しているとき，$N \geqq 0$ であるから，円筒から離れるのは垂直抗力が正から負になるとき，すなわち $N = 0$ のときである。したがって，これを②に代入して，

$$m_{\mathrm{A}} g(2 - 3\cos\theta) = 0$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{2}{3}$$

以上より，

$$\boldsymbol{y_0} = r(1 + \cos\theta) \boldsymbol{= \frac{5}{3} r}$$

(c)

1 回目の衝突直前の 2 つの小球の速さは等しく，V_0 である。1 回目の衝突直後の小球 A，小球 C の速度をそれぞれ V_{A}，V_{C} とおき，小球 C の質量を m_{C} とすると，問(1)(b)と同様に考えることができ，

$$V_{\mathrm{A}} = \frac{m_{\mathrm{A}} - 3m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}} V_0$$

$$V_{\mathrm{C}} = \frac{3m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}} V_0$$

ここに，$m_{\mathrm{C}} = 3m_{\mathrm{A}}$ を代入して，

$$V_{\mathrm{A}} = -2V_0$$

$$V_{\mathrm{C}} = 0$$

よって，1 回目の衝突直後に小球 C は $(0,\ 0)$ で静止し，小球 A のみが動く。このあと小球 A は円筒を 1 周して，再び小球 C と衝突する。その点は，$\boldsymbol{(x_1,\ y_1) = (0,\ 0)}$ である。

(d)

運動量保存則から，

$$m_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A2}} + m_{\mathrm{C}} V_{\mathrm{C2}} = m_{\mathrm{A}} \cdot (-2V_0) + m_{\mathrm{C}} \cdot 0$$

また，この衝突は弾性衝突なので，

$$-\frac{V_{\mathrm{C2}} - V_{\mathrm{A2}}}{0 - (-2V_0)} = 1$$

以上より，

$$\boldsymbol{V_{A2}} = V_0 \boldsymbol{= 2\sqrt{gr}}$$

$$\boldsymbol{V_{C2}} = -V_0 \boldsymbol{= -2\sqrt{gr}}$$

このあと，小球 A と小球 C は y 軸に関して対称に運動をする。つまり，同時に円筒に沿って上っていき，高さ $y = y_0$ にきた時点で円筒を離れて放物運動へと移り，しばらくして 2 つは衝突する，よって，これらの小球が 3 回目に衝突する地点の x 座標は，対称性より，$\boldsymbol{x_3 = 0}$ である。

次に，小球 C が円筒を離れてから衝突するまでにかかる時間を考える。この間，小球 C の水平方向速度成分は常に一定である（水平方向に力が加わらないので，水平方向の運動量が保存する）。小球 A の水平方向速度成分を V とすると，

$$|V| = v\cos\theta = \frac{2}{3}v$$

となる。ただし，ここでの θ は (b) で用いた値であることに注意。

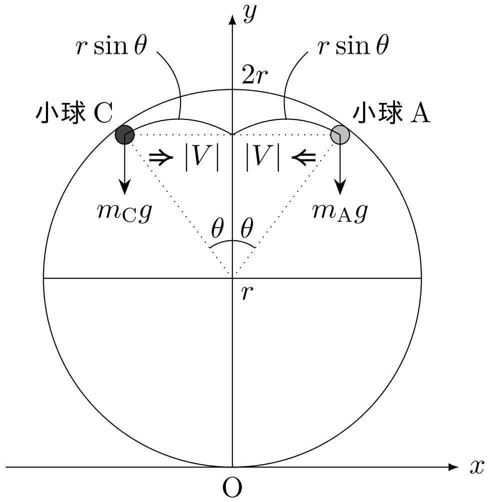
また，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v^2 = m_{\mathrm{A}}gr(1-\cos\theta) = \frac{1}{3}m_{\mathrm{A}}gr$$

v は速さなので 0 以上であることから，これを計算すると，

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gr}$$

また，小球 A と小球 C が衝突するのにかかる時間は，右図のように水平方向に $r\sin\theta$ の距離を速さ $|V|$ で進むのにかかる時間だから，求める時間 T_2 は，



$$\boldsymbol{T_2} = \frac{r\sin\theta}{|V|}$$

$$= \frac{r\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}}{\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}gr}}$$

$$\boldsymbol{= \sqrt{\frac{15r}{8g}}}$$

（ 山崎裕太郎，岡田和也，岡部律心 ）

2015 年度 東北大学 前期 物理

2 コンデンサーの充電，電気振動

出題範囲	コンデンサー，自己誘導
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	この大問は誘導が親切になされており，それゆえに順を追ってミスなく解答することが求められる。問 (1)，問 (2) は単純なコンデンサーに関する問題で，問 (3) はコイルとコンデンサーがともに存在する系の考察となっている。これを時間経過とともに数式で定量評価するのは高校物理の範囲を超えるが，電流，電荷がどのような変化をするかは回路の式から予想はつく。また，時間経過における電流，電荷の挙動が求められていない場合は，保存量に注目して等式を立てるとすっきりするだろう。

解説

問 (1)

(a)

RC 回路において十分時間がたったとき，回路に電流は流れなくなるので，抵抗にかかる電圧は 0 である。よって，コンデンサーにかかる電圧は電池の起電力に等しい。極板 A は電池の負極側につながっているから，蓄えられる電荷は負であることに注意して，

$$\frac{-Q}{C} = V$$

ただし，コンデンサーの電気容量 C は，

$$\boldsymbol{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

であるから，以上より，

$$\boldsymbol{Q = -\varepsilon_0 \frac{S}{d} V}$$

(b)

コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーは，

$$U_1 = \frac{1}{2}CV^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{d} V^2}$$

また，電池は電気量 $|Q|$ の電荷を電位差 V だけ運ぶので，それに必要な仕事は，

$$\boldsymbol{W} = |Q|V \boldsymbol{= \varepsilon_0 \frac{S}{d} V^2}$$

問 (2)

(a)

スイッチ 1 は閉じているので，コンデンサーにかかる電圧は変化しない。また，問 (1) より，

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

より，極板 AB の間隔を問 (1) の半分にすると，電気容量は 2 倍になる（$Q = CV$ より，蓄えられる電荷の大きさも 2 倍になる)。$U = \frac{1}{2}CV^2$ だから，電圧一定のとき静電エネルギーは電気容量に比例し，つまり極板 AB の間隔を半分にすると静電エネルギーは 2 倍になるから，

$$\boldsymbol{\varDelta U} = 2U_1 - U_1 = U_1 \boldsymbol{= \frac{1}{2} C V^2}$$

(b)

スイッチ 2 は開いているので，コンデンサーに蓄えられる電荷は (a) から変化しない。一方で，極板 AB の間隔は 2 倍になるので，電気容量は半分になる。また，一般に，$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ だから，電荷が一定のとき，静電エネルギーは電気容量に反比例する。つまり，問題文の操作を行うと静電エネルギーは 2 倍になるから，

$$\boldsymbol{U_2} = 2 \times (U_1 + \varDelta U) \boldsymbol{= 2CV^2}$$

問 (3)

(a)

自己インダクタンス L のコイルに電流 I が流れているとき，コイルがもつエネルギーは $\frac{1}{2}LI^2$ で与えられる。また 2 つのコイルは直列につながれているから，それぞれのコイルに流れる電流は常に互いに等しい。回路に電流 I が流れ，コンデンサーに電荷が q だけ蓄えられているとき，エネルギー保存則から，

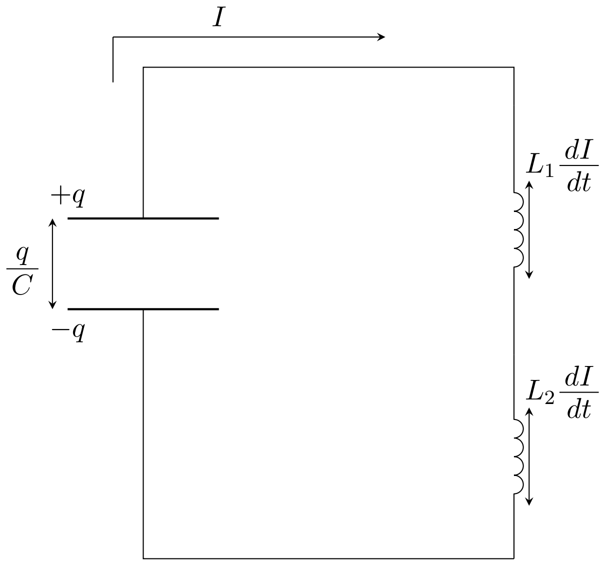
$$\frac{1}{2}L_1 I^2 + \frac{1}{2}L_2 I^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(2CV)^2}{C}$$

$q=0$ のとき，電流 I は最大値 $I_{\max}$ をとる。これを代入して，

$$\frac{1}{2}L_1 {I_{\max}}^2 + \frac{1}{2}L_2 {I_{\max}}^2 = 2CV^2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{I_{\max} = 2\sqrt{\frac{C}{L_1+L_2}}V}$$

次に，コイル 1 の両端にかかる電圧の最大値を考える。コイル 1 の両端にかかる電圧を V_1 とおくと，$V_1 = L_1\dfrac{dI}{dt}$ で表されるから，$\dfrac{dI}{dt}$ が最大になるとき，V_1 も最大になる。図で回路の方程式から，



$$\begin{aligned}\frac{q}{C} &= (L_1+L_2)\frac{dI}{dt}\\ &= \frac{L_1+L_2}{L_1}V_1\end{aligned}$$

よって，q が最大になるとき，V_1 も最大になるので，

$$\frac{q_{\max}}{C} = \frac{L_1+L_2}{L_1}V_{\max}$$

先ほどのエネルギー保存則の式を考えれば，q が最大になるのは $I=0$ のときなので，

$$q_{\max} = 2CV$$

したがって，

$$\boldsymbol{V_{\max}} = \frac{L_1}{(L_1+L_2)C}q_{\max} \boldsymbol{= \frac{2L_1}{L_1+L_2}V}$$

(b)

電流の定義は，単位時間あたりに流れる電荷であった。正負に注意して，

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

これを，(a) で得た回路の方程式（$\dfrac{q}{C} = L_1\dfrac{dI}{dt} + L_2\dfrac{dI}{dt}$）に代入して，

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{(L_1+L_2)C}q$$

これは，力学における単振動で登場する微分方程式に似ていることに気がつけば，同様の方法で解くことができる。$t=0$ において $q=2CV$，$I=0$ であったことに注意して，$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}$ を用いて，

$$q=2CV\cos\omega t$$

$$I=-\frac{dq}{dt}=2CV\omega\sin\omega t$$

$$U=\frac{1}{2}L_1I^2=\frac{2L_1}{L_1+L_2}CV^2\sin^2\omega t$$

これを満たすグラフは，**(オ)**である。また，

$$\boldsymbol{\tau=\frac{\pi}{\omega}=\pi\sqrt{(L_1+L_2)C}}$$

$$\boldsymbol{U_{\max}=\frac{2L_1}{L_1+L_2}CV^2}$$

◆ Column

実践的に解くには

問 (3) (a) ではエネルギー保存則を用いて $I_{\max}$ を求めていたが，(b) ではエネルギー保存則を用いずに $I_{\max}=2CV\omega$ を導いている。つまり，実際の答案では，(a) でいきなり I の時間変化を導出してしまい，そこから $I_{\max}$ や $V_{\max}$ を求めることもできる。さらに，実践的にグラフを選ぶだけなら，コイルに蓄えられるエネルギー U は公式 $U=\dfrac{1}{2}LI^2$ であるから，常に 0 以上である。また，共振回路であるからエネルギーのグラフは周期性をもつものである。さらに，$t=0$ のときは $U=0$ であるから，これらをすべて満たすグラフは(オ)である，と求めることができる。

（楊博，仲里佑利奈，岡田和也，山崎裕太郎）

2015 年度 東北大学 前期 物理

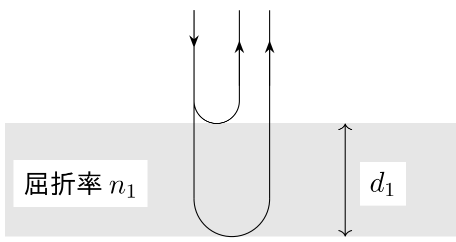
3 薄膜での光の屈折と反射，干渉

出題範囲	光の反射と屈折，光の干渉と回折
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	この年の物理の大問 3 つの中では，この 3 は計算量が少なく，方針も立てやすいため，ここで迅速かつ正確に回答し，ほかの大問やもう 1 科目の理科に時間をあてたい。 問 (1) は，どれも典型問題なので完答する必要がある。その上で，ここをどれだけ時間をかけずに解けたかが，理科全体の点数に影響を与えるだろう。(b) の光路差の導出は教科書にも記載されている重要事項である。できなかった人や時間をかけてしまった人は，コラムにしっかり目を通して，自力で素早く導出できるようにしておこう。 問 (2) の (a) は，図を描く問題ということで身構えた人もいるかもしれないが，問われていること自体は容易なので，落ち着いて正答しよう。(b) は，幾何の要素が強く，また，ここまでの設問と比べて計算も面倒なため，差がつく問題だろう。(a) で幾何的なアプローチに意識が切り替えられれば，苦労せずに立式できるだろう。難関大学の物理は，数式だけで解くのではなく，どんな現象が起きているのか，図で視覚化して考えることが重要である。しかし，これは一朝一夕でできるようになるものではないため，日頃から図を描いて考えることを意識しよう。 問 (3) は，空気，ガラス板，液体，そしてまた空気と扱う媒質が多く，さらに容器が傾いているなど，慣れない設定に焦った人もいるだろう。しかし，落ち着いて作図し，それぞれの媒質間での屈折を考えていくと，計算は非常に単純なことがわかる。方針が立たないときは，図を描いて視覚化し，1 つひとつの現象について考え，それらを組み合わせて全体を捉えよう。

解説

問 (1)

(a)



反射はいずれも屈折率の小さい媒質から大きい媒質に入ろうとするときに起きているので，反射によってどちらも位相が π だけずれ，2 つの反射光に位相差はない。

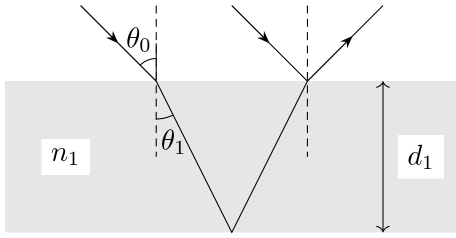
よって，弱め合う条件は，

$$2d_1n_1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$m = 1$ で d_1 は最小となるので，

$$d_1 = \boldsymbol{\frac{\lambda}{4n_1}}$$

（b）



（a）と同様に，反射はいずれも屈折率の小さい媒質から大きい媒質に入ろうとするときに起きているので，反射によってどちらも位相が π だけずれ，2 つの反射光に位相差はない。

屈折角を θ_1（$0° < \theta_1 < 90°$） とすると，屈折の法則より，

$$\sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1$$

また，光路差は $2d_1 n_1 \cos\theta_1$ だから，求める条件は，

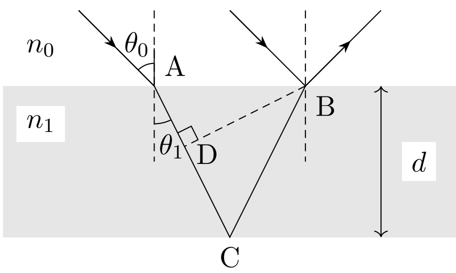
$$2d_1 n_1 \cos\theta_1 = m\lambda$$

θ_1 を消去して，

$$\boldsymbol{2d_1\sqrt{{n_1}^2 - \sin^2\theta_0} = m\lambda}$$

◆ **Column**

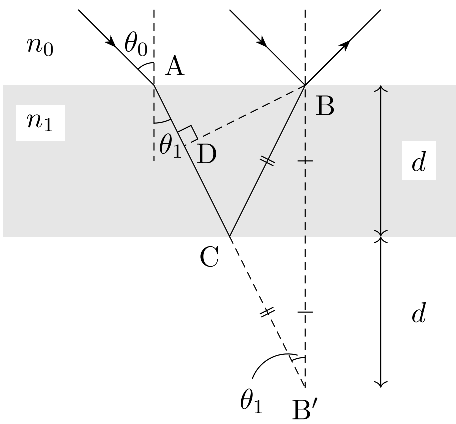
入射角が 0 ではないときの光路差



右図のような場合を考えて，光路差を導く。

ここで注意しなければならないのは，入射角が 0 のときとは異なり，光が入る点と出ていく点が異なるということである。したがって，光路差を求めるときには，DC + CB を求める必要がある。

これを求めるときに計算が楽になる方法が，媒質に光が侵入した後に反射する面で図形を折り返す，つまり右図のようにすることである。



こうすることで，

$$\mathrm{DC} + \mathrm{CB} = \mathrm{DC} + \mathrm{CB'} = \mathrm{DB'}$$

となり，三角形 BDB′ について考えることで，

$$\mathrm{DB'} = \mathrm{BB'}\cos\angle\,\mathrm{DB'B} = 2d\cos\theta_1$$

となることがわかる。

よって，光路差は $2dn_1\cos\theta_1$ となる。

（c）

屈折の法則より，

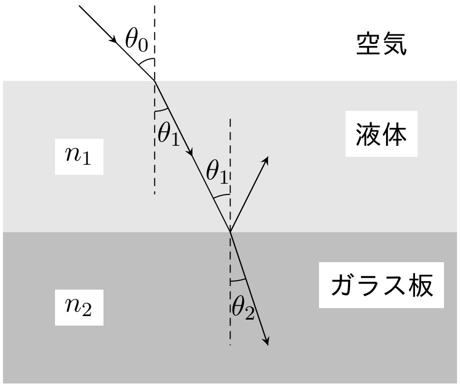
$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

また，（b）でも示した通り，

$$\sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1$$

であるから，以上より，

$$\boldsymbol{\sin\theta_0 = n_2 \sin\theta_2}$$



問（2）

（a）

解答の図は右のようになる。ただし，ϕ_2 は記載しなくてよい。

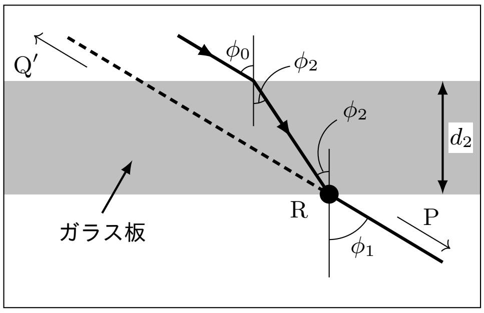
右図のように ϕ_2（$0° < \phi_2 < 90°$）を定めると，屈折の法則より，

$$\sin\phi_0 = n_2 \sin\phi_2$$

$$n_2 \sin\phi_2 = \sin\phi_1$$

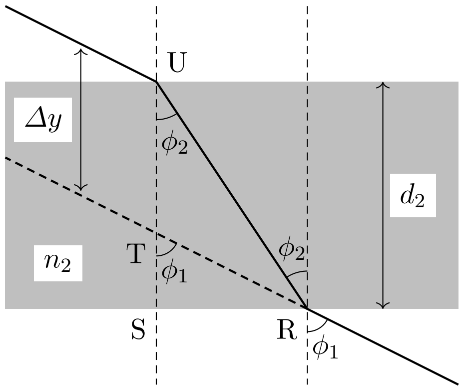
よって，

$$\boldsymbol{\phi_0 = \phi_1}$$



(b)

図のように点 S，T，U を定める。このとき，



$$\Delta y = \mathrm{UT}$$

また，

$$\mathrm{US} = d_2$$

であり，

$$\mathrm{ST} = \frac{\mathrm{SR}}{\tan\phi_1} = \frac{\mathrm{US} \times \tan\phi_2}{\tan\phi_1}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\Delta y &= \mathrm{UT}\\ &= \mathrm{US} - \mathrm{ST}\\ &= d_2\left(1 - \frac{\tan\phi_2}{\tan\phi_1}\right)\end{aligned}$$

ここで，屈折の法則より，

$$n_2 \sin\phi_2 = \sin\phi_1$$

$$\therefore \quad \sin\phi_2 = \frac{1}{n_2}\sin\phi_1$$

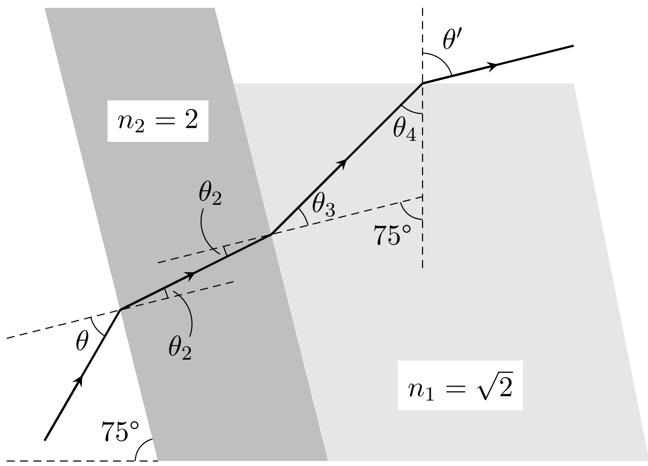
であるから，

$$\tan\phi_2 = \frac{\sin\phi_2}{\cos\phi_2} = \frac{\dfrac{1}{n_2}\sin\phi_1}{\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2\phi_1}{{n_2}^2}}} = \frac{\sin\phi_1}{\sqrt{{n_2}^2 - \sin^2\phi_1}}$$

以上より，

$$\boldsymbol{\Delta y} = d_2\left(1 - \frac{\tan\phi_2}{\tan\phi_1}\right)$$
$$\boldsymbol{= d_2\left(1 - \frac{\cos\phi_1}{\sqrt{{n_2}^2 - \sin^2\phi_1}}\right)}$$

問（3）



図のように角度を定めると，屈折の法則より，

$$1 \cdot \sin\theta = 2 \cdot \sin\theta_2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$2 \cdot \sin\theta_2 = \sqrt{2} \cdot \sin\theta_3 \quad \cdots\cdots ②$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin\theta_4 = 1 \cdot \sin\theta' \quad \cdots\cdots ③$$

（ただし，上記の角はすべて $0°$ 以上 $90°$ 以下）

①，②より，

$$\sin\theta = \sqrt{2} \cdot \sin\theta_3 \quad \cdots\cdots ④$$

また，三角形の性質より，

$$\theta_3 + \theta_4 = 75° \quad \cdots\cdots ⑤$$

液体表面で全反射する条件は，臨界角を i_0（$< 90°$）とすると，

$$\theta_4 \geqq i_0$$

ここで，④より，θ が大きくなると θ_3 も大きくなり，⑤より，θ_3 が大きくなると θ_4 は小さくなる。

求めるのは，全反射する条件を満たす，空気からガラス板への入射角 θ の最大値である。このとき液体から空気への入射角 θ_4 は，全反射する条件下で最小となるため，

$$\theta_4 = i_0 \quad \text{かつ} \quad \theta' = 90°$$

これを③に代入して，

$$\sin i_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad i_0 = \theta_4 = 45°$$

⑤より，

$$\theta_3 = 75° - \theta_4 = 30°$$

④より，

$$\sin\theta = \sqrt{2} \cdot \sin\theta_3 = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \theta = \mathbf{45°}$$

（岡田和也，岡部律心，山崎裕太郎，一丸友美）