2015 年度 東北大学 前期 数学

1 法線と座標軸の作る三角形

出題範囲	2 次曲線
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	難易度こそ控えめだが，様々なアプローチがある問題である。この問題を通じて類題でも多角的な視点をもてるようになると，試験でも見通しよく解答を書けるだろう。

解答

$\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ とすると l の方程式は $\alpha x+4\beta y=1 \Leftrightarrow y=-\dfrac{\alpha}{4\beta}(x-\alpha)+\beta$ となる。

よって，m の方程式は $y=\dfrac{4\beta}{\alpha}(x-\alpha)+\beta$ である。これの x 切片，y 切片はそれぞれ $\dfrac{3}{4}\alpha, -3\beta$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\alpha\cdot 3\beta=\frac{9}{8}\alpha\beta$$

となる。ここで，$\alpha^2+4\beta^2=1, \beta>0$ より $\beta=\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$ であるので，これを S に代入して

$$S=\frac{9}{16}\alpha\sqrt{1-\alpha^2} \quad (0<\alpha<1)$$

S を α で微分して

$$\frac{dS}{d\alpha}=\frac{9}{16}\cdot\frac{1-2\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

よって，次の増減表を得る。

α	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$\dfrac{dS}{d\alpha}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	$\dfrac{9}{32}$	$\searrow$	

よって，このとき S は最大値 $\dfrac{9}{32}$ をとり，そのときの P の座標は $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ である。

解説

最初に l の方程式を求めるが，楕円の接線の式は暗記してしまってもよいだろう。暗記する際は，一度自分で証明しておくと理解が深まる。証明の際は，円の接線の式を用いて，x，y 軸を楕円の短軸，長軸倍に拡大して整理するのが最も簡潔だろう。この解答では微分を用いて増減を調べるという，手間はかかるが一般に適用できる方法で答えを求めた。

別解 1

S を求めるところまでは **解答** と同様。

ここで，$\alpha^2+4\beta^2=1$ であることから，相加相乗平均の関係より

$$
\begin{aligned}
1=\alpha^2+4\beta^2 &\geqq 2\sqrt{\alpha^2\cdot 4\beta^2}\\
&=4\alpha\beta \quad (\alpha,\beta>0\ \text{より})
\end{aligned}
$$

等号成立は，$\alpha^2=4\beta^2=1-\alpha^2$ つまり $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき。よって，$\alpha\beta$ の最大値は $\dfrac{1}{4}$ である。

以上より，S は最大値 $\dfrac{9}{32}$ をとり，そのときの P の座標は $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ である。

別解 1 解説

楕円の方程式に相加相乗平均の関係式を用いた解法である。この S の式のように，$\alpha\beta$ の定数倍となっている場合はこの方法が有効なので，手段の 1 つとして覚えておくと役に立つだろう。

別解 2

S を求めるところまでは **解答** と同様。

ここで，$\alpha^2+4\beta^2=1$ であることから，$\alpha=\cos\theta,\beta=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ とおける。

$\alpha,\beta>0$ より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる。

これを S の式に代入すると

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{9}{16}\cos\theta\sin\theta\\
&=\frac{9}{32}\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

これは，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $S=\dfrac{9}{32}$ をとる。このとき，点 P の座標は $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ である。

別解 2 解説

楕円を三角関数を用いて媒介変数表示した解法である。**解答** では変数を 1 文字消去した際に根号が現れたが，このように媒介変数表示を導入すると，三角関数の多項式に帰着できる。S の式が煩雑だと多少処理が面倒になるが，こちらの考え方もやはりおさえておきたい。

（青木徹，辻啓吾，寺内一記）

2015 年度 東北大学 前期 数学

2　3 次関数と接線

出題範囲	微分
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	(1) は典型的な証明問題なので解ききりたい。(2) では接線の傾きの和と積が話題になっているときに，解と係数の関係を思い出せたかがポイントだろう。最後の無理数の評価は少し面倒であるが解ききりたい。

解答

(1)【証明】$y = x^3 - x$ より，$y' = 3x^2 - 1$

$y = x^3 - x$ 上の接点の座標を $(t, t^3 - t)$ とおくと接線の方程式は

$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t) \ \Leftrightarrow y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

点 P の座標を (a, b) $\quad (a^3 - a > b > -a)$ とおくと，[1]

$$a^3 - a > -a \Leftrightarrow a^3 > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

である。接線は点 P を通るので，

$$b = (3t^2 - 1)a - 2t^3$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 3at^2 + a + b = 0 \qquad \cdots\cdots\ ①$$

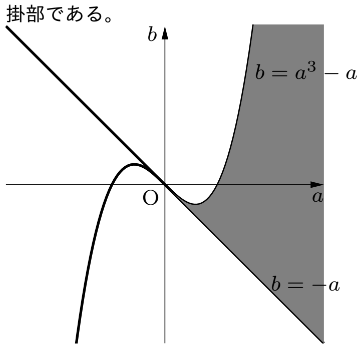
ここで，C は 3 次関数であり，3 次関数は接線と接点が 1 対 1 に対応するので[2]，点 P を通り C に接する直線が 3 本存在することは，① が t について異なる 3 実数解をもつことと同値であり，① が t について異なる 3 実数解をもつことは

$$\begin{cases} y = 2t^3 - 3at^2 + a + b \\ y = 0 \end{cases}$$

が異なる 3 点で共有点をもつことと同値である。

$f(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$ とおくと，$f'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t - a)$

[1] 点 P の存在領域は以下の網掛部である。



[2] 解説部分に証明を載せた。

よって，$f(t)$ の増減は $a>0$ より

t	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	(∞)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$a+b$	$\searrow$	$-a^3+a+b$	$\nearrow$	(∞)

$b>-a$ より，$a+b>0$

$a^3-a>b$ より，$-a^3+a+b<0$

よって，$f(t)$ は定義域全体で連続なので，増減表と中間値の定理から，$y=f(t)$ と $y=0$ は異なる 3 点で共有点をもつ。つまり，$f(t)=0$ は異なる 3 実数解をもつ。

よって，題意は示された。 (証明終)

(2) ① の異なる 3 実数解を α,β,γ とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3}{2}a & \cdots\cdots\text{②} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 & \cdots\cdots\text{③} \end{cases}$$

である。また，接線の傾きはそれぞれ $3\alpha^2-1, 3\beta^2-1, 3\gamma^2-1$ なので，問題文の条件より，

$$\begin{cases} 3\alpha^2-1+3\beta^2-1+3\gamma^2-1=0 & \cdots\cdots\text{④} \\ (3\alpha^2-1)(3\beta^2-1)(3\gamma^2-1)=0 & \cdots\cdots\text{⑤} \end{cases}$$

② と ③ より

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\frac{9}{4}a^2$$

なので，

$$\text{④} \Leftrightarrow 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}a^2=1 \quad \text{よって} \quad a=\frac{2}{3} \quad (a>0\text{ より})$$

また，⑤ は，$f(t)=0$ が $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ または $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ を解にもつことと同値であり，

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0 \Leftrightarrow b=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0 \Leftrightarrow b=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

となるので，$b=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ または $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ である。

ここで，$a^3-a>b>-a$ より，

$$-\frac{2}{3}<b<-\frac{10}{27} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

$$\left(\frac{10}{27}\right)^2=\frac{100}{729}<\frac{108}{729}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^2<\frac{324}{729}=\left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ より}$$

$$\frac{10}{27}<\frac{2\sqrt{3}}{9}<\frac{2}{3}$$

となるので，

$$-\frac{2}{3}<-\frac{2\sqrt{3}}{9}<-\frac{10}{27}<\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

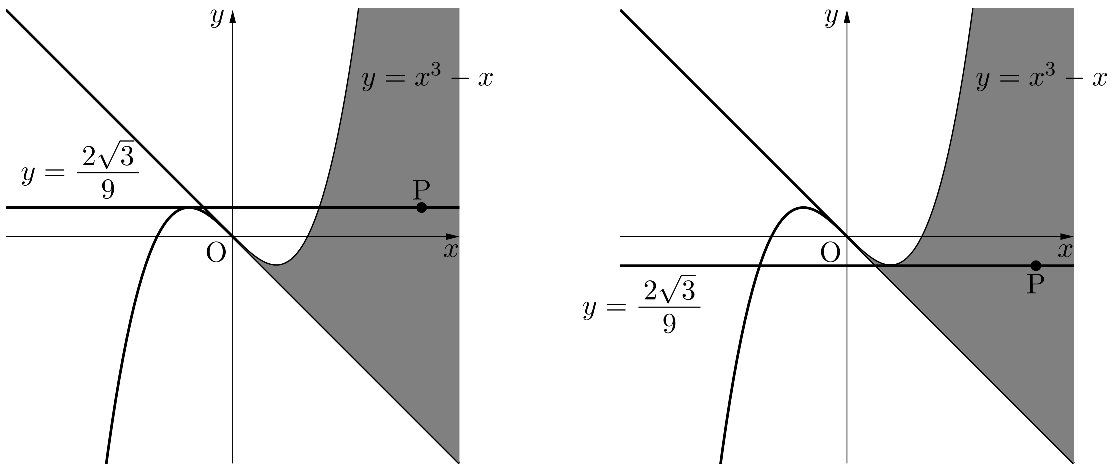
である。よって，⑥ より $b=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ となるので，求める点 P の座標は

$$\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$

解説

(1) 3 次関数に関する基本的な問題である。$f(t)$ が連続関数であることは忘れずに記述しよう。

(2) 接線の傾きが $f(t)=0$ の解を用いて表されることに気がつけば，解と係数の関係の使用に気がつけるだろう。また，$y=x^3-x$ のグラフを書けば $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，$-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ であることは明らかであるので答えを出した時，計算ミスがないことを確認しよう。



参考として，3 次関数において，接線と接点が 1 対 1 に対応すること，つまり，ある点における接線が 3 次関数上の他の点における接線にならないことを背理法で示す。

【証明】3 次関数を $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$ とおくと，$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

よって，点 $(p, g(p))$ における接線の方程式は

$$y = g'(p)x - pg'(p) + g(p)$$

この直線が $g(x)$ と点 $(t, g(t))$，$(s, g(s))$ $(s \neq t)$ で接するならば

$$\begin{cases} g'(t) = g'(s) & \cdots\cdots\cdots ⑦ \\ -tg'(t) + g(t) = -sg'(s) + g(s) & \cdots\cdots\cdots ⑧ \end{cases}$$

が成立する。

$$⑦ \Leftrightarrow 3at^2 + 2bt + c = 3as^2 + 2bs + c$$

$$\Leftrightarrow s = -\left(t + \frac{2b}{3a}\right) \quad (a \neq 0 \text{ より}) \qquad \cdots\cdots\cdots ⑨$$

$$⑧ \Leftrightarrow (t-s)g'(t) - (g(t) - g(s)) = 0 \quad (⑦ \text{ より } g'(t) = g'(s) \text{ であるから})$$

$$\Leftrightarrow (t-s)g'(t) - a(t^3 - s^3) - b(t^2 - s^2) - c(t - s) = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(t) - a(t^2 + ts + s^2) - b(t + s) - c = 0 \quad (t \neq s \text{ より})$$

$$\Leftrightarrow (3at^2 + 2bt + c) - a\left(t^2 + \frac{2b}{3a}t + \frac{4b^2}{9a^2}\right) - b\left(-\frac{2b}{3a}\right) - c = 0 \quad (⑨ \text{ を代入})$$

$$\Leftrightarrow 2a\left(t + \frac{b}{3a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{b}{3a} \quad (a \neq 0 \text{ より})$$

これを ⑨ に代入すると，$s = -\dfrac{b}{3a}$，つまり，$t = s$ となり，矛盾する。よって，3 次関数において，接線と接点が 1 対 1 に対応する。 (証明終)

（不死原大知，辻啓吾，寺内一記）

2015 年度 東北大学 前期 数学

3　実数解を持つ条件と確率

出題範囲	場合の数と確率
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	2 次方程式の解と係数の関係の典型問題に，サイコロの確率要素が加わった問題である。本年度の問題の中では確実に完答したい。全体的に計算量はほとんど無いと言っても良い。(3) では，余事象の関係に気がつけば簡単に解くことができる。

解答

(1) 2 次方程式 $(*)$ の判別式より，$(*)$ が実数解をもつ条件は，

$$D = {p_2}^2 - 16p_1p_3 \geqq 0$$

$${p_2}^2 \geqq 16p_1p_3 \geqq 16$$

$$p_2 \geqq 4$$

(i) $p_2 = 4$ のとき

$$16 \geqq 16p_1p_3$$

$$(p_1, p_3) = (1, 1)$$

(ii) $p_2 = 5$ のとき

$$p_1p_3 \leqq \frac{25}{16} < 2$$

$$(p_1, p_3) = (1, 1)$$

(iii) $p_2 = 6$ のとき

$$p_1p_3 \leqq \frac{9}{4} < 3$$

$$(p_1, p_3) = (1, 1)，(1, 2)，(2, 1)$$

以上より，条件を満たす $(p_1，p_2，p_3)$ の組合せは，$(p_1, p_2, p_3) = (1, 4, 1)$，$(1, 5, 1)$，$(1, 6, 1)$，$(2, 6, 1)$，$(1, 6, 2)$ の 5 通り。したがって，求める確率は $\dfrac{5}{216}$ である。

(2) 2 次方程式 $(*)$ が実数ではない複素数解を 2 つもつ条件は

$$D = {p_2}^2 - 16p_1p_3 < 0$$

$${p_2}^2 < 16p_1p_3 \qquad \cdots\cdots\cdot \text{①}$$

ここで，$(*)$ の 2 つの複素数解 α, β について，以下が成り立つ。

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{p_2}{2p_1} \\ \alpha\beta = \dfrac{p_3}{p_1} \end{cases}$$

題意より $\alpha\beta = 1$ なので，$p_1 = p_3$

① より

$${p_2}^2 < 16{p_1}^2 \Leftrightarrow p_2 < 4p_1 \quad (p_1 > 0,\ p_2 > 0 \text{ より})$$

(i) $p_1 = 1$ のとき

$p_2 < 4$ であるから，$p_2 = 1, 2, 3$

(ii) $p_1 \geqq 2$ のとき

$p_2 < 8$ であるから，$p_2 = 1, 2, \cdots, 6$

以上より，条件を満たす (p_1, p_2, p_3) の組み合わせは $3 + 5 \times 6 = 33$ 通り。

したがって，求める確率は $\dfrac{33}{216} = \dfrac{11}{72}$ である。

(3) $\alpha\beta < 1$ より，$p_3 < p_1$

(i) $p_1p_3 = 2$ のとき

① より，${p_2}^2 < 32 \quad p_2 = 1, 2, 3, 4, 5$

(ii) $p_1p_3 \geqq 3$ のとき

① より，${p_2}^2 < 48 \quad p_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

また，$p_1 < p_3$ のとき，

$p_1p_3 \leqq 2$ となる (p_1, p_3) は $(p_1, p_3) = (1, 2)$ の 1 通りである。

$p_1 < p_3$ となるのは ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通りなので，$p_1p_3 \geqq 3$ となる (p_1, p_3) は 14 通りある。

以上より，求める確率は $\dfrac{5 \times 1 + 6 \times 14}{216} = \dfrac{89}{216}$ である。

解説

(1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ を用いて実数解が存在する条件を表す問題である。

その条件と，p_1, p_2, p_3 がサイコロの目であるという条件を合わせて解を求める。

(2) $D<0$ となるとき，係数 a, b, c がすべて実数の 2 次方程式は，2 つの実数でない複素数解をもつ（重解をもたない）。重解をもたないのは，2 次方程式の解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ より，解が重解となるとき $\sqrt{b^2-4ac}=0$ なり，実数解となるためである。判別式 D から条件を出したら，あとは解と係数の関係を用いて条件を絞っていく。

(3) $\alpha\beta$ の条件と判別式の条件から，p_2 を絞り込んで解を求めていく。

別解

(3) $\alpha\beta=\dfrac{p_3}{p_1}$

$\alpha\beta<1$ の場合と $\alpha\beta>1$ の場合を考えると，α と β の対称性より，「方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率」と「方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち，かつ $\alpha\beta>1$ が成り立つ確率」は等しくなる。 $\cdots\cdots$ (A)

以下，(A) を示す。

【証明】

$$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$$

$x\fallingdotseq 0$ に注意して，$t=\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$2p_3t^2+p_2t+2p_1=0$$

この解 $\dfrac{1}{\alpha}$ と $\dfrac{1}{\beta}$ は，$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{p_1}{p_3}<1$ を満たす実数でない異なる複素数とすると，$\alpha\beta>1$ が成立する。

よって，(A) が成り立つ。 (証明終)

また，「方程式 $(*)$ が実数解をもつ，または方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ事象」の余事象が「方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち，かつ $\alpha\beta\fallingdotseq 1$ が成り立つ事象」であるので，求める確率は

$$\frac{1-\left(\dfrac{5}{216}+\dfrac{33}{216}\right)}{2}=\frac{89}{216}$$

別解解説

(3) 余事象を考えることにより，(1)，(2) の解答を最大限利用できる。ただ，解答で示した (A) は一般には成立しないので，証明を与えておく必要があるだろう。

（河合敬宏，松下祐樹，寺内一記）

2015年度 東北大学 前期 数学

4　定積分と不等式の証明

出題範囲	積分 (数学Ⅲ) ／極限
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	(1) が解ければ (2)，(3) もおのずとわかるだろう。積分の評価は，難関大学では時々出題されるので，しっかり演習を積んでおきたい。

解答

(1)【証明】a が正の実数であることより，$x>0$ において $\dfrac{1}{x^a}$ は単調減少である。よって，$2n\pi \leqq x \leqq 2(n+1)\pi$ において次の不等式が成立する。

$$\frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \frac{1}{x^a} \leqq \frac{1}{(2n\pi)^a}$$

また，$2n\pi \leqq x \leqq 2(n+1)\pi$ において $\sin x \geqq 0$ であるので，上式に $\sin x$ を掛けて

$$\frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \frac{\sin x}{x^a} \leqq \frac{\sin x}{(2n\pi)^a}$$

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a}dx \leqq B_n \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{(2n\pi)^a}dx$$

$$\frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a}\Big[-\cos x\Big]_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \leqq B_n \leqq \frac{1}{(2n\pi)^a}\Big[-\cos x\Big]_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}$$

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq B_n \leqq \frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(証明終)

(2)

$$A_n = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$$

$$= \frac{\pi}{2\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$$

よって

$$\frac{\pi(2n\pi)^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a} \leqq \frac{A_n}{B_n} \leqq \frac{\pi\{(2n+1)\pi\}^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(2n\pi)^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\{(2n+1)\pi\}^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}=\frac{\pi}{4}$ であるので，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\frac{\pi}{4}$$

(3) B_n と同様に C_n を不等式評価すると，$2n\pi\leqq x\leqq 2(n+1)\pi$ において $\sin^2 x\geqq 0$ であるから，

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{\{(2n+1)\pi\}^a}dx\leqq C_n\leqq\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{(2n\pi)^a}dx$$

$$\frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\leqq C_n\leqq\frac{1}{(2n\pi)^a}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}$$

$$\frac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq C_n\leqq\frac{\pi}{2(2n\pi)^a}$$

よって

$$\frac{(2n\pi)^a}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\leqq\frac{A_n}{C_n}\leqq\frac{\{(2n+1)\pi\}^a}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n\pi)^a}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}=\lim_{n\to\infty}\frac{\{(2n+1)\pi\}^a}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}=1$ であるので，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}=1$$

解説

(1) 証明すべき不等式の形を見ると，分母の次数は a である。$\dfrac{1}{x^a}$ を積分すると次数が変化してしまい，分母の次数が a ではなくなってしまう。よって，$\dfrac{1}{x^a}$ を不等式評価するという方針が立つだろう。

また，もう 1 つの積分評価の方法として $\sin x\leqq 1$ を利用するものがある。今回はうまくいかないが，このような評価を行うとよい場合もあるかもしれないので心に留めておいてほしい。

(2) A_n の計算は，三角形の面積を求めるだけであるので難なくできるはずだ。あとは (1) で示した不等式を用いてはさみうちの原理を用いれば答えが出る。

(3) (1)，(2) と同様の方針で進めると，うまく解くことができる。$\sin^2 x$ の積分は教科書レベルの演習を積んでいれば難なく計算できるだろう。

（青木徹，辻啓吾，寺内一記）

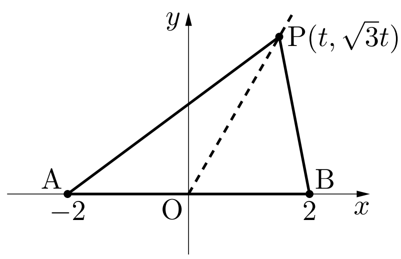
2015 年度 東北大学 前期 数学

5　三角形と四面体

出題範囲	平面図形／立体図形
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	(1) は，図を描きながら考えてみよう。(2) について，内積は直角が絡む問題と相性がいいので，ベクトルを用いる発想を身につけよう。(3) は，ここまでの設問が大きなヒントとなっているものの，決して簡単ではない設問である。垂心がちょうど頂点から △ABC におろした垂線の足となっているということを簡潔に説明するのは難しく，計算も少し複雑である。実際の試験では，(2) を終えて次の問題に移るのも手である。

解答

(1) 3 つの角それぞれについて鋭角になる条件を考える。



$\angle$PAB が鋭角 $\Leftrightarrow$ 点 P の x 座標が -2 より大きい

$t>0$ なので，これは常に成り立つ。

$\angle$PBA が鋭角 $\Leftrightarrow$ 点 P の x 座標が 2 より小さい

$\Leftrightarrow t<2$　　$\cdots\cdots$ ①

$\angle$APB が鋭角 $\Leftrightarrow$ 点 P が線分 AB を直径とする円の外側にある（円周角の定理より）

$\Leftrightarrow t^2+(\sqrt{3}t)^2>4$

$\Leftrightarrow t^2>1$　　$\cdots\cdots$ ②

以上 ①② と $t>0$ を合わせると，求める条件は

$1<t<2$

(2) 垂心を H とすると，これは点 P から直線 AB に下ろした垂線上にある。

よって，H の座標は (t, s) (ただし s は実数) とおける。

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ は直交するので

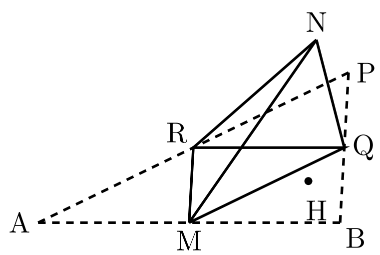
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t+2, s)\cdot\left(t-2, \sqrt{3}t\right)=t^2-4+\sqrt{3}ts=0$$

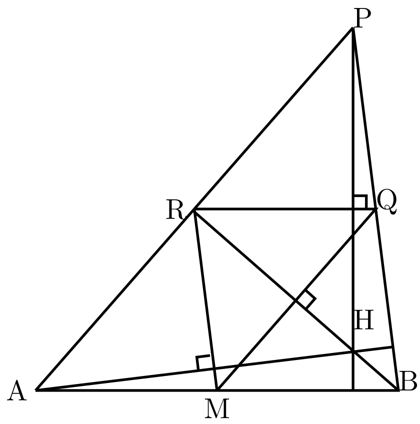
$t > 0$ より

$$s = -\frac{t^2-4}{\sqrt{3}t}$$

したがって，垂心 H の座標は $\left(t, -\dfrac{t^2-4}{\sqrt{3}t}\right)$

(3)





底面を $\triangle$MQR とし，原点を M とする。この底面に対して，垂直かつ原点 M を通るように z 軸を定める。さらに，ABP が重なる頂点を N とする。ただし，N の z 座標は正とする。

3 点 M,Q,R はそれぞれ辺 AB,BP,PA の中点なので，中点連結定理より，AB // RQ，BP // MR，AP // MQ である。よって，AH$\perp$MR，BH$\perp$MQ，PH$\perp$QR となる。

AH$\perp$MR より，$\triangle$ARM を直線 MR で折り曲げるとき，点 A を xy 平面に正射影したときの軌跡は直線 AH 上にある。同様に，BH$\perp$MQ，PH$\perp$QR なので，点 P，点 B を直線 RQ，直線 MQ で折り曲げたときの xy 平面に正射影した軌跡はそれぞれ直線 PH，直線 BH 上にある。

よって，頂点 N から $\triangle$MQR を含む平面に下ろした垂線の足は H に一致する。

したがって，N$\left(t, -\dfrac{t^2-4}{\sqrt{3}t}, u\right)$ (ただし，u は実数で $u > 0$) とおけて，

$\mathrm{NM} = \mathrm{AM} = 2$ であるから

$$\mathrm{NM} = \sqrt{t^2 + \left(-\frac{t^2-4}{\sqrt{3}t}\right)^2 + u^2} = 2$$

$$\begin{aligned} u^2 &= -\frac{4t^4 - 20t^2 + 16}{3t^2} \\ &= -\frac{4}{3t^2}\left(t^2-1\right)\left(t^2-4\right) > 0 \quad (1 < t < 2 \text{ より}) \end{aligned}$$

$u > 0$ より

$$u = 2\sqrt{-\frac{t^4 - 5t^2 + 4}{3t^2}} \quad (\because u > 0)$$

$\triangle\mathrm{MQR}$ の面積 S は，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積の $\dfrac{1}{4}$ なので[1]

[1] $\triangle\mathrm{MQR}$，$\triangle\mathrm{ABP}$ の相似比は 1:2 であることより。

$$S = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3}t\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

したがって，四面体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times S \times u \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}t \times 2\sqrt{-\frac{t^4 - 5t^2 + 4}{3t^2}} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{-t^4 + 5t^2 - 4} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} \end{aligned}$$

$1 < t < 2$ より，V の最大値は $t = \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ のとき $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{1}{2}$

解説

(1) 図を描いて，3 つの角それぞれについて図形的に考察すれば楽に条件式が立てられる。$\angle\mathrm{APB}$ については円周角の定理を活用しよう。

(2) 2 つのベクトルが垂直のときに内積が 0 であるということを使えばよい。t で割るときは，$t \fallingdotseq 0$ であることの確認を忘れずに。

(3) N から底面に下ろした垂線の足が垂心 H に一致する理由は以下のとおり。

線分 MR で折り曲げるとき点 A は直線 MR と一定の距離を保ちながら空間を移動する。すなわち，点 A から直線 MR に下ろした垂線の足を H' とすると，点 A は中心 H' で直線 MR に垂直な円周上を動くことになる。

よって，このすべての点から底面に下ろした垂線の足の軌跡は直線 MR に垂直で，点 B，点 P についても同

様のことがいえる。したがって，N から底面に下ろした垂線の足は垂心 H に一致するのである。

「頂点 N から△MQR を含む平面に下ろした垂線の足」という言い方をわざわざしているのは，垂心 H が △MQR の内部にあるとは限らないからである。また，xyz 空間には条件を満たすような点 N が $z>0$ の範囲と $z<0$ の範囲に 1 つずつ存在するので，解答のようにあらかじめ 1 つに絞っておくとよい。

別解

(1) $\cos\angle\mathrm{APB}>0$ かつ $\cos\angle\mathrm{PAB}>0$ かつ $\cos\angle\mathrm{PBA}>0$ となる t の条件を求める。

$$\cos\angle\mathrm{APB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|>0$ より $\cos\angle\mathrm{APB}>0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}>0$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(-2,0)-\left(t,\sqrt{3}t\right)=-\left(t+2,\sqrt{3}t\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(2,0)-\left(t,\sqrt{3}t\right)=-\left(t-2,\sqrt{3}t\right)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=\left(t+2,\sqrt{3}t\right)\cdot\left(t-2,\sqrt{3}t\right)\\&=t^2-4+3t^2\\&=4\left(t^2-1\right)>0\end{aligned}$$

$t>0$ より

$$t>1 \qquad \cdots\cdots ①$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}>0$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}>0$ となるような条件を求める。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,0)-(-2,0)=(4,0)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left(t+2,\sqrt{3}t\right)\cdot(4,0)\\&=4(t+2)>0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}&=\left(t-2,\sqrt{3}t\right)\cdot(-4,0)\\&=-4(t-2)>0\end{aligned}$$

これら 2 式と $t>0$ より

$$0<t<2 \qquad \cdots\cdots ②$$

以上 ①② より，求める条件は

$$1<t<2$$

別解解説

(1) 内積の正負で，2 辺のなす角が鋭角か鈍角かがわかる。計算量が多くなるが，機械的に処理できるので解法としては思いつきやすいだろう。

（沈有程，寺内一記，辻啓吾）

2015 年度 東北大学 前期 数学

6 素数の絡んだ証明

出題範囲	整数の性質
難易度	★★★☆☆
所要時間	25 分
傾向と対策	全体的に理解に時間がかかる問題である。何を証明すればいいのか分からなくなるかもしれないが，落ち着いて考えよう。(3) は p が素数であることを最大限に生かそう。

解答

(1)【証明】「n は k-連続和である」を (X) とする。

$$n = \sum_{i=1}^{k}(m+i-1)$$

$$= mk + \frac{k(k+1)}{2} - k$$

$$= mk + \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\frac{n}{k} = m + \frac{k-1}{2} \quad (k \geqq 2 > 0 \text{ より})$$

ゆえに

$$\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = m + \frac{k-1}{2} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= m$$

よって，(X) ならば (A) は成り立つ。[1]また，(B) についても，

[1] (X) より m は自然数なので，(A) の条件である「m は整数」を満たす。

$$n = mk + \frac{k(k-1)}{2}$$

$$2n = 2mk + k(k-1)$$

ゆえに

$$2n - k^2 = k(2m-1) > 0 \quad (m \text{ は自然数より})$$

したがって，(X) ならば (B) も成り立つ。

逆に，(A) かつ (B) が成り立つとき

$$\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = p$$

とおくと，(A) より p は整数であり，かつ (B) より $2n-k^2=k(2p-1)>0$ であるため $p>0$，すなわち p は自然数である。

よって，

$$n=\left(p+\frac{k-1}{2}\right)k$$
$$=pk+\frac{k(k-1)}{2}$$
$$=pk+\sum_{i=1}^{k}(p+i-1)$$

したがって，(A) かつ (B) が成り立つとき，(X) は成り立つ。

以上より，n が k-連続和 であることは (A)，(B) の両方が成り立つことと同値である。 (証明終)

(2) 【証明】$n=2^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 k が存在すると仮定すると，

$$2^f=\frac{k(2m+k-1)}{2}$$
$$2^{f+1}=k(2m+k-1)$$

となる。ここで，k が偶数のとき，$2m+k-1$ は 1 より大きい奇数となり，これは左辺の素因数が 2 しかないことに反する。

k が奇数のときも同様に，$k\geqq 2$ なので反する。[2]よって，条件を満たす k は存在しない。 (証明終)

[2] $k\geqq 2$ なので，$k=1$ になり得ず，式の右辺には 2 ではない素因数が含まれることになる。

(3) $n=p^f$ が k-連続和であるとき，自然数 m が存在して

$$2n=k(2m+k-1)$$

すなわち

$$2p^f=k(2m+k-1)$$

(i) k が偶数のとき，k は $2p^f$ の約数であることから，$k=2p^g$ とおける (g は 0 以上 f 以下の整数)。n が k-連続和 $\Leftrightarrow$(A) かつ (B) であるが，$m=\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ が自然数なので，(A) は成り立つ。
(B) について，

$$2n>k^2 \Leftrightarrow 2p^f>4p^{2g}$$
$$\Leftrightarrow p^{f-2g}>2$$

$f-2g \geqq 1$ であればよく，$g \leqq \dfrac{f-1}{2}$

よって，f が偶数のとき，g は 0 から $\dfrac{f-2}{2}$ まで，つまり $\dfrac{f}{2}$ 個ある。

f が奇数のとき，g は 0 から $\dfrac{f-1}{2}$ まで，つまり $\dfrac{f+1}{2}$ 個ある。

(ii) k が奇数のとき，$k \geqq 2$ であるから $k=p^g$ とおける (g は 1 以上 f 以下の自然数)

以下，k が偶数のときと同様にして，

$$\begin{aligned} 2n > k^2 &\Leftrightarrow 2p^f > p^{2g} \\ &\Leftrightarrow p^{f-2g} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$f-2g \geqq 0$ であればよく，$g \leqq \dfrac{f}{2}$

よって，f が偶数のとき，g は 1 から $\dfrac{f}{2}$ まで，つまり $\dfrac{f}{2}$ 個ある。

f が奇数のとき，g は 1 から $\dfrac{f-1}{2}$ まで，つまり $\dfrac{f-1}{2}$ 個ある。

以上より，$n=p^f$ のとき，n が k-連続和 となるような 2 以上の自然数 k は，f の偶奇に関わらず f 個存在する。

解説

k-連続和 であるとき m は自然数であるが，(A) の条件では「$\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ は整数」($n=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)$ を代入すると m と等しくなる) という違いに気をつけなければならない。その認識を疎かにしたまま証明を書くと，減点されかねないため注意が必要である。(1) において，(B) の条件により $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ が整数かつ 0 より大きいため，これは自然数である，と証明する。(1) を解いた時点ではこの「自然数なのか整数なのか」の違いを認識しているが，問題を解き進めるにつれて，この条件の違いを忘れてしまいかねない。証明問題においては，条件に丸印をつけるなり下線を引くなりして，その証明が本当に条件を満たしているのか何度か見直すようにしたい。

（河合敬宏，辻啓吾，寺内一記）