2015 年度 東北大学 前期 数学

1 漸化式の処理

出題範囲	数列
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	(1) の設問のように，漸化式の n に $n+1$ を代入した式から元の漸化式を引く方法は典型的である。ただし，両辺を割る際に割る数が 0 にならないことの確認を忘れずに。(2) は (1) の式をうまく利用しよう。少し見えにくい形をしているが，(1) でわざわざ変形を行ったのだからこれを使うはず。(3) では階差数列の一般項を求めるだけである。

解答

(1)

$$a_n^2 - 2a_na_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3\left(a_n + a_{n+1}\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

この式の n に $n+1$ を代入して

$$a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+2}^2 = 3\left(a_{n+1} + a_{n+2}\right) \qquad \cdots\cdots ②$$

を得る。②−① より

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 - 2a_{n+1}\left(a_{n+2} - a_n\right) = 3\left(a_{n+2} - a_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a_{n+2} + a_n\right)\left(a_{n+2} - a_n\right) - 2a_{n+1}\left(a_{n+2} - a_n\right) = 3\left(a_{n+2} - a_n\right)$$

ここで，$a_{n+2} > a_{n+1} > a_n$ より，$a_{n+2} - a_n > 0$ なので，両辺を $a_{n+2} - a_n$ で割って

$$a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} = 3$$

よって

$$a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} + 3$$

(2) (1) で求めた式を変形して

$$a_{n+2} - a_{n+1} - \left(a_{n+1} - a_n\right) = 3$$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ より

$$b_{n+1} - b_n = 3$$

また，与えられた漸化式に $n=1$ を代入して

$$a_1^2-2a_1a_2+a_2^2=3(a_1+a_2)$$

$$\Leftrightarrow 3^2-2\cdot 3a_2+a_2^2=3(3+a_2)$$

$$\Leftrightarrow a_2(a_2-9)=0$$

$a_2>a_1=3$ より，$a_2=9$

したがって，$b_1=a_2-a_1=9-3=6$

ゆえに数列 $\{b_n\}$ は，初項 6，公差 3 の等差数列なので

$$b_n=b_1+3(n-1)=3(n+1)$$

(3) $a_{n+1}-a_n=3(n+1)$ より，$n \geqq 2$ のもとで

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3(k+1)$$

$$=3+3\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}n(n+1)$$

$a_1=3$ より，これは $n=1$ でも成り立つ。

以上より，求める一般項は

$$a_n=\frac{3}{2}n(n+1)$$

解説

(1) a_n+a_{n+2} を a_{n+1} で表すので，①+② を考える人もいるかもしれないが，これはあまりにも見通しが悪い。式が 2 次の項を含んでいるので，最終的に両辺を割ることが想定されるが，もともと ① は 2 項間の関係を表した式であり，② は n に $n+1$ を代入しただけの式なので，和を取ってしまうと煩雑さが増すだけである。差を取れば 2 次の項の $a_{n+2}^2-a_n^2$ の因数分解ができ，これは 1 次の項との共通因数 $a_{n+2}-a_n$ をもつために見通しが立つ。

(2) いきなり $a_2=9$ としないように。$a_2>a_1=3$ などの細かい確認を忘れずに行おう。

(3) 一般的に，階差数列を用いて一般項を求めるときの注意事項として初項は分けて考えなければならない。そもそも階差数列の初項は a_1 と a_2 の差であるから，和の記号を用いた式はそもそも $n=1$ の時には意味を持たない。（これは $n=1$ のとき和の記号において $n-1=0$ となってしまうことからもわかる。）必ず $n=1$ の場合を別で考えるようにしよう。

（寺内一記，沈有程，不死原大知）

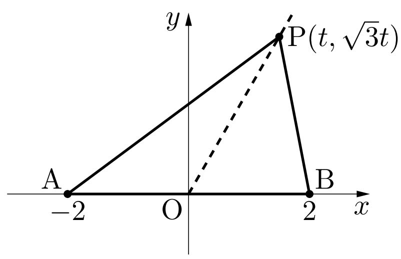
2015 年度 東北大学 前期 数学

2　三角形と四面体

出題範囲	平面図形／立体図形
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	(1) は図を描きながら考えてみるとよいだろう。(2) では，内積は直角が絡む問題と相性がいいことを利用して，ベクトルを用いる発想ができるようにしたい。(3) はここまでの設問が大きなヒントとなっているものの，決して簡単ではない設問である。垂心がちょうど頂点から △ABC におろした垂線の足となっていることを簡潔に説明するのは難しく，計算も少し複雑なので，実際の試験では (2) を終えて次の問題に移るのが手ではないだろうか。

解答

(1) 3 つの角それぞれについて鋭角になる条件を考える。



$\angle\mathrm{PAB}$ が鋭角 $\Leftrightarrow$ 点 P の x 座標が -2 より大きい

t>0 なのでこれは常に成り立つ。

$\angle\mathrm{PBA}$ が鋭角 $\Leftrightarrow$ 点 P の x 座標が 2 より小さい

$\Leftrightarrow t < 2$　$\cdots\cdots$ ①

$\angle\mathrm{APB}$ が鋭角 $\Leftrightarrow$ 円周角の定理より，点 P が線分 AB を直径とする円の外側にある

$\Leftrightarrow t^2 + (\sqrt{3}t)^2 > 4$

$t^2 > 1$　$\cdots\cdots$ ②

以上 ①② と $t > 0$ を合わせると，求める条件は

$1 < t < 2$

(2) 垂心を H とすると，これは点 P から直線 AB に下ろした垂線上にある。

よって，H の座標は (t, s) (ただし s は実数) とおける。

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ は直交するので

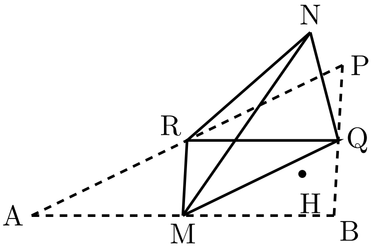
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = (t+2, s) \cdot \left(t-2, \sqrt{3}t\right) = t^2 - 4 + \sqrt{3}ts = 0$$

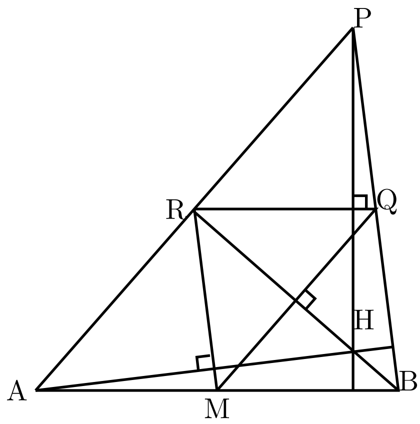
$t > 0$ より

$$s = -\frac{t^2-4}{\sqrt{3}t}$$

したがって，垂心 H の座標は $\left(t, -\dfrac{t^2-4}{\sqrt{3}t}\right)$

(3)





底面を $\triangle$MQR とし，原点を M とする。この底面に対して垂直かつ原点 M を通るように z 軸を定める。さらに，ABP が重なる頂点を N とする。ただし N の z 座標は正とする。3 点 M,Q,R はそれぞれ辺 AB,BP,PA の中点なので，中点連結定理より，AB$/\!/$RQ，BP$/\!/$MR，AP$/\!/$MQ である。よって，AH$\perp$MR，BH$\perp$MQ，PH$\perp$QRとなる。AH$\perp$MR より，$\triangle$ARM を直線 MR で折り曲げるとき，点 A を xy 平面に正射影したときの軌跡は直線 AH 上にある。同様に，BH$\perp$MQ,PH$\perp$QR なので，点 P，点 B を直線 RQ，直線 MQ で折り曲げたときの xy 平面に正射影した軌跡はそれぞれ直線 PH，直線 BH 上にある。よって，頂点 N から $\triangle$MQR を含む平面に下ろした垂線の足は H に一致する。

したがって，N$\left(t, -\dfrac{t^2-4}{\sqrt{3}t}, u\right)$（ただし，$u$ は実数で $u > 0$）とおけて，NM $=$ AM $= 2$ であるから

$$\mathrm{NM} = \sqrt{t^2 + \left(-\frac{t^2-4}{\sqrt{3}t}\right)^2 + u^2} = 2$$

$$u^2 = -\frac{4t^4 - 20t^2 + 16}{3t^2}$$

$$= -\frac{4}{3t^2}\left(t^2-1\right)\left(t^2-4\right) > 0 \quad (1 < t < 2 \text{ より})$$

$u > 0$ より

$$u = 2\sqrt{-\frac{t^4 - 5t^2 + 4}{3t^2}}$$

$\triangle$MQR の面積 S は，$\triangle$ABP の面積の $\dfrac{1}{4}$ なので[1]

[1] $\triangle$MQR，$\triangle$ABP の相似比は 1:2 であることより。

$$S = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3}t\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

したがって，四面体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times S \times u \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}t \times 2\sqrt{-\frac{t^4 - 5t^2 + 4}{3t^2}} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{-t^4 + 5t^2 - 4} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} \end{aligned}$$

$1 < t < 2$ より，V の最大値は $t = \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ のとき $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{1}{2}$

解説

(1) 図を描いて，3 つの角それぞれについて図形的に考察すれば楽に条件式が立てられる。$\angle$APB については円周角の定理を活用しよう。

(2) ここは 2 つのベクトルが垂直の時に内積が 0 であるということを使えばよい。t で割るときには $t \neq 0$ であることの確認を忘れずに。

(3) N から底面に下ろした垂線の足が垂心 H に一致する理由は次のとおり。線分 MR で折り曲げるとき点 A は直線 MR と一定の距離を保ちながら空間を移動する。すなわち，点 A から直線 MR に下ろした垂線の足を H$'$ とすると，点 A は中心 H$'$ で直線 MR に垂直な円周上を動くことになる。よって，このすべての点から底面に下ろした垂線の足の軌跡は直線 MR に垂直で，点 B，点 P についても同様のことがいえる。したがって，N から底面に下ろした垂線の足は垂心 H に一致するのである。

「頂点 N から$\triangle$MQR を含む平面に下ろした垂線の足」という言い方をわざわざしているのは，垂心 H が $\triangle$MQR の内部にあるとは限らないからである。また，xyz 空間には条件を満たすような点 N が $z > 0$ の範囲と $z < 0$ の範囲に 1 つずつ存在するので，解答のようにあらかじめ 1 つに絞っておくとよい。

別解

(1) $\cos\angle\mathrm{APB} > 0$ かつ $\cos\angle\mathrm{PAB} > 0$ かつ $\cos\angle\mathrm{PBA} > 0$ となる t の条件を求める。

$$\cos\angle\mathrm{APB} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right| > 0$ より $\cos\angle\mathrm{APB} > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} > 0$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (-2, 0) - \left(t, \sqrt{3}t\right) = -\left(t+2, \sqrt{3}t\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (2, 0) - \left(t, \sqrt{3}t\right) = -\left(t-2, \sqrt{3}t\right)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} &= \left(t+2, \sqrt{3}t\right)\cdot\left(t-2, \sqrt{3}t\right)\\ &= t^2 - 4 + 3t^2\\ &= 4\left(t^2-1\right) > 0\end{aligned}$$

$t > 0$ より

$$t > 1 \qquad \cdots\cdots\ ①$$

同様に $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} > 0$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}} > 0$ となるような条件を求める。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, 0) - (-2, 0) = (4, 0)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \left(t+2, \sqrt{3}t\right)\cdot(4, 0)\\ &= 4\left(t+2\right) > 0\\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}} &= \left(t-2, \sqrt{3}t\right)\cdot(-4, 0)\\ &= -4\left(t-2\right) > 0\end{aligned}$$

これら 2 式と $t > 0$ より

$$0 < t < 2 \qquad \cdots\cdots\ ②$$

以上 ①② より，求める条件は

$$1 < t < 2$$

別解解説

(1) 内積の正負で，2 辺のなす角が鋭角か鈍角かがわかる。計算量が多くなるが，機械的に処理できるので解法としては思いつきやすいだろう。

（沈有程，寺内一記，辻啓吾）

2015 年度 東北大学 前期 数学

3　確率と 2 次方程式

出題範囲	数と式／場合の数と確率
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	(1) は解法が明確に定まるうえ，条件を満たす組の個数も少ないのでかなり楽な問題である。(2) は解と係数の関係に持ち込むことされできれば難易度は (1) とさほど変わらない。絶対に完答を狙いたい問題である。

解答

(1) 方程式

$$2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

は，$2p_1 > 0$ より 2 次の係数は 0 にならない。

x に関する二次方程式 ① の判別式を考えて，実数解が存在する条件は

$$p_2^2 - 4 \cdot 2p_1 \cdot 2p_3 \geqq 0 \Leftrightarrow p_2^2 \geqq 16p_1p_3$$

$p_2 \leqq 6$ なので $p_2^2 \leqq 36$ であるから，$36 \geqq 16p_1p_3 \ \Leftrightarrow \ p_1p_3 \leqq \dfrac{9}{4}$ である。

p_1, p_3 は自然数なので，$p_1p_3 = 1$ または 2。

(i) $p_1p_3 = 1$ のとき

p_1，p_3 は自然数なので $(p_1, p_3) = (1, 1)$

このとき，$p_2^2 \geqq 16$ なので $p_2 = 4$，5，6

(ii) $p_1p_3 = 2$ のとき

p_1，p_3 は自然数なので $(p_1, p_3) = (1, 2)$，$(2, 1)$

このとき，$p_2^2 \geqq 16 \cdot 2 = 32$ なので $p_2 = 6$

以上より，求める確率は

$$\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{6^3} = \frac{5}{216}$$

(2) ① において $p_1 \fallingdotseq 0$ であるから，解と係数の関係より

$$\alpha\beta = \frac{2p_3}{2p_1} = 1 \Leftrightarrow p_1 = p_3$$

この条件のもとで，$(*)$ の判別式を考えて，実数でない複素数解が存在する条件は

$$p_2^2 - 4 \cdot 2p_1 \cdot 2p_3 < 0 \Leftrightarrow p_2^2 < 16p_1^2 \quad (p_1 = p_3 \text{より})$$

$$\Leftrightarrow p_2 < 4p_1 \quad (p_1, p_2 > 0 \text{より})$$

(i) $p_1 = p_3 = 1$ のとき

$p_2 < 4$ なので $p_2 = 1$，2，3

(ii) $p_1 = p_3 \geqq 2$ のとき

$p_2 < 4 \cdot 2 = 8$ であれば全ての p_1 に対し条件を満たす。

よって $p_2 = 1$，2，3，4，5，6

以上より求める確率は

$$\frac{1 \cdot 3 + 5 \cdot 6}{6^3} = \frac{11}{72}$$

解説

(1) 文字の範囲の絞り方がポイントとなる。解答では p_1p_3 の値で場合分けを行ったが，$p_2 \geqq 4$ であることを用いて p_2 によって場合分けを行ってもよい。

(2) 解と係数の関係は，$(*)$ が 2 次方程式である場合にのみ用いることができる。今回の場合，$(*)$ が 2 次方程式であることは明らかであるが，一般には 2 次の項の係数が 0 になってしまう場合を除外する必要がある。今回はその場合が存在しないことをはじめに確認しておいた。また，p_1 としては 6 つの値が考えられるが，$p_1 \geqq 2$ のときは p_2 のとり得る値の個数が同じであるので，場合分けが 2 つでよいことに気づきたい。

（寺内一記，沈有程，不死原大知）

2015 年度 東北大学 前期 数学

4 グラフの形状を利用する最小問題

出題範囲	微分
難易度	★★★★☆
所要時間	25 分
傾向と対策	(1) に関してはやることが明確なので迷わずに正解までたどり着きたい。ここでつまづくと後の設問にかなり響いてしまう。(2) も解くのは難しくはない。なぜ原点を通る直線を求めるのかわからなくても，とりあえず解くことは可能だろう。(3) は (2) で求めた解をいかにうまく説明して利用できるかを問われている問題。2 乗した上で，さらに式が直線の傾きを表していることに気づかねばならず，難しい設問である。

解答

(1) $f'(t) = -12t^2 + a + 3$ であるので，$f'(t) = 0$ を t について解くと，$a > 0$ より

$$t = \pm\sqrt{\frac{a+3}{12}}$$

(i) $\sqrt{\dfrac{a+3}{12}} < 1 \iff 0 < a < 9$ のとき

$f(t)$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における増減は以下のようになる。

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$M(a)$	$\searrow$	$a-1$

したがって

$$\begin{aligned} M(a) &= f\left(\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right) \\ &= -4\left(\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right)^3 + (a+3)\sqrt{\frac{a+3}{12}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(ii) $\sqrt{\dfrac{a+3}{12}} \geqq 1 \iff a \geqq 9$ のとき

$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で $f(t)$ は単調に増加するので

$$M(a) = f(1) = a - 1$$

以上より

$$M(a) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}} & (0 < a < 9) \\ a - 1 & (a \geqq 9) \end{cases}$$

(2) (1) より

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{27}(x+3)^3 & (0 < x < 9) \\ (x-1)^2 & (x \geqq 9) \end{cases}$$

よって

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{9}(x+3)^2 & (0 < x < 9) \\ 2(x-1) & (x \geqq 9) \end{cases}$$

$(s, g(s))$ を通る接線の方程式は $y - g(s) = g'(s)(x - s)$ であり，これが原点を通るとき

$$0 - g(s) = g'(s) \cdot (0 - s) \quad \Leftrightarrow \quad g(s) = s \cdot g'(s) \qquad \cdots\cdots\ ①$$

(i) $0 < s < 9$ のとき

① より

$$\frac{1}{27}(s+3)^3 = s \cdot \frac{1}{9}(s+3)^2$$

$s + 3 \fallingdotseq 0$ より

$$s + 3 = 3s$$

よって

$$s = \frac{3}{2}$$

これは，$0 < s < 9$ を満たす。

(ii) $s \geqq 9$ のとき

① より

$$(s-1)^2 = s \cdot 2(s-1)$$

$s-1 \fallingdotseq 0$ より

$$s-1=2s$$

よって

$$s=-1$$

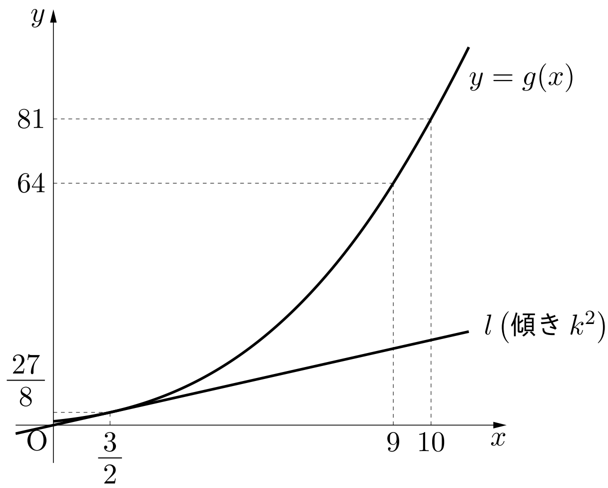
これは $s \geqq 9$ に反し，不適。

(i)(ii) より，求める実数 s とそのときの傾きは

$$s=\frac{3}{2}, \quad \text{傾きは}\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}+3\right)^2=\frac{9}{4}$$

(3) $k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ より $k^2=\dfrac{\{M(a)\}^2}{a}=\dfrac{g(a)-0}{a-0}$

よって，k^2 は原点と $g(x)$ 上の点 $(a, g(a))$ を結ぶ直線 (l とする) の傾きを表す。



a が正の実数を動くとき，$M(a)>0$ なので，$k>0$ であり，k^2 が最小となるとき k も最小となる。グラフから，l が $g(x)$ に接するとき，傾き k^2 は最小となる。

このときの傾きは (2) より $\dfrac{9}{4}$ であるから，k の最小値は

$$\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

解説

(1) $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で関数 $f(t)$ の増減を調べればよいので，$f'(t)=0$ の正の解がこの範囲にあるかどうかで場合分けを行えばよい。場合分けでそれぞれ得られた 2 つの関数に対し，その境界 $a=9$ での値が一致していることを確かめておくと 1 つの検算になるだろう。

(2) (1) での場合分けをそのまま用いて，場合分けをしながら値を求めればよい。

(3) $k > 0$ であるので k^2 の最小値を求めればよい。(2) を最大限活かすなら，k^2 が直線の傾きを表しているとみて，接線となるときが最も小さいことを用いるのがいいだろう。

（寺内一記，沈有程，不死原大知）