2016 年度 北海道大学 前期 物理

1 物体の分離，鉛直面内での円運動

出題範囲	運動量保存則，エネルギー保存則，円運動
難易度	★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	二体問題，円運動を扱った大問。問 1 で基本的なモデルを使い，問 2 で問 1 の解答を用いつつ円運動を交えた実践的なモデルへと移行する。ただ，使う式は運動量保存則，エネルギー保存則，運動方程式（円運動）ぐらいのもので，難しくはない。しっかりとどの式を使えばいいのかを念頭に置きつつ解こう。

解答

問 1　(1)　$-m_1v$　　(2)　m_1v　　(3)　$V_0+\dfrac{m_1}{m_2}v$

(4)　$\dfrac{m_1}{2m_2}(m_1+m_2)v^2$

問 2　(5)　$\dfrac{1}{2}Mv^2+R(1-\cos\theta)Mg$　　(6)　$M\dfrac{v^2}{R}+Mg\cos\theta$

(7)　$\sqrt{2gR}$　　(8)　$\dfrac{3}{2}Mg$　　(9)　$\sqrt{1+\cos\theta}$

(10)　$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(11)　$3-\sqrt{6}$　　(12)　$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解説

問 1

球 1 が受けた力積は，

$$m_1(V_0-v)-m_1V_0=\underbrace{-m_1v}_{(1)}\ \text{〔N·s〕}$$

である。すると，作用反作用の法則から，球 2 は向きが逆で大きさが同じ力積を受けることになるので，

$$\underbrace{m_1v}_{(2)}\ \text{〔kg·m/s〕}$$

つまり，分離後の球 2 の速度を V〔m/s〕として，運動量と力積の関係より，

$$m_2V-m_2V_0=m_1v$$

$$\therefore \quad V = \underset{(3)}{\underline{V_0 + \frac{m_1}{m_2}v}} \quad \text{〔m/s〕}$$

となることがわかる。

　また，一方で，エネルギーの総和は，

$$\frac{1}{2}m_1(V_0 - v)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(V_0 + \frac{m_1}{m_2}v\right)^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2){V_0}^2 = \underset{(4)}{\underline{\frac{m_1}{2m_2}(m_1 + m_2)v^2}} \quad \text{〔J〕}$$

だけ増加する。

問 2

　位置 θ で速度 v〔m/s〕の運動をしている物体の力学的エネルギーは，

$$\underset{(5)}{\underline{\frac{1}{2}Mv^2 + R(1 - \cos\theta)Mg}} \quad \text{〔J〕}$$

であり，運動方程式を考えると，張力 T〔N〕は，

$$M\frac{v^2}{R} = T - Mg\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad T = \underset{(6)}{\underline{M\frac{v^2}{R} + Mg\cos\theta}} \quad \text{〔N〕}$$

となる。この球が点 B で止まることから，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}M{V_0}^2 = MgR$$

$$\Leftrightarrow \quad V_0 = \underset{(7)}{\underline{\sqrt{2gR}}} \quad \text{〔m/s〕} \qquad (\because V_0 > 0)$$

となる。また，$\theta = \frac{\pi}{3}$〔rad〕のときの糸の張力は，力学的エネルギー保存則から，

$$MgR = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}MgR$$

$$\Leftrightarrow \quad v^2 = gR$$

　また，(6) の答えから，

$$T = \underset{(8)}{\underline{\frac{3}{2}Mg}} \quad \text{〔N〕}$$

となる。点 B に達したときに球が分離した，このときの上に飛んでいく球の速さを v'〔m/s〕とおくと，運動量保存則から，

$$0 = -\frac{M}{2}V_0 + \frac{M}{2}v'$$

$$\therefore \quad v' = V_0$$

すなわち，質量 $\dfrac{M}{2}$〔kg〕の球が速さ V_0〔m/s〕で点 B から上に飛んでいくことがわかる。したがって求める速さを v_θ〔m/s〕とおくと，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}\frac{M}{2}{V_0}^2 + \frac{M}{2}gR = \frac{1}{2}\frac{M}{2}{v_\theta}^2 + \frac{M}{2}gR(1-\cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad v_\theta = \sqrt{{V_0}^2 + 2gR\cos\theta}$$

$$= \sqrt{{V_0}^2 + {V_0}^2\cos\theta}$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{\sqrt{1+\cos\theta}}}_{(9)}\ V_0 \quad \text{〔m/s〕}$$

また，球が円周上から離れるのは，張力 T が 0 になったときであり，

$$T = \frac{M}{2}\frac{{v_\theta}^2}{R} + \frac{M}{2}g\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+\cos\theta){V_0}^2 + \frac{{V_0}^2}{2}\cos\theta = 0 \qquad (\because \ {V_0}^2 = 2gR)$$

$\Leftrightarrow \quad \cos\theta = -\dfrac{2}{3}$ このとき，θ は π〔rad〕以下であることから，

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

よって，

$$\tan\theta = \underbrace{\boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}}{2}}}_{(10)}$$

ここで，点 C に達する条件は，点 C における糸の張力が 0 以上であることである。このときの球の質量を M'〔kg〕，点 B，点 C における球の速さをそれぞれ v_{B}，v_{C}〔m/s〕とすると，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}M'{v_{\mathrm{B}}}^2 + M'gR = \frac{1}{2}M'{v_{\mathrm{C}}}^2 + 2M'gR$$

$$\Leftrightarrow \quad {v_{\mathrm{C}}}^2 = {v_{\mathrm{B}}}^2 - 2gR \qquad \cdots\cdots①$$

つまり，

$$\frac{M}{2}\frac{{v_{\mathrm{C}}}^2}{R} + \frac{M}{2}g\cos\pi \geqq 0$$

$\Leftrightarrow \quad {v_{\mathrm{B}}}^2 \geqq 3gR = \dfrac{3}{2}{V_0}^2 \qquad (\because$ ①を代入)

$$\therefore \quad v_{\mathrm{B}} \geqq \underbrace{\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}}_{(12)}\ V_0 \text{〔m/s〕}$$

点 B で上向き速度が $\dfrac{\sqrt{6}}{2}V_0$〔m/s〕以上になるような分裂の仕方を考える。発射される質量を xM〔kg〕とおき，鉛直上向きを正として運動量保存則より，

$$0 = (1-x)Mv_\mathrm{B} - xMV_0$$

$$\therefore \quad v_\mathrm{B} = \frac{x}{1-x}V_0 \qquad (\because\ x > 0)$$

よって，

$$\frac{xM}{(1-x)M}V_0 \geqq \frac{\sqrt{6}}{2}V_0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geqq \underbrace{\mathbf{3-\sqrt{6}}}_{(11)}$$

となる。

（別解）

分裂の考察は，すでに問 1 で行った。それを用いて(11)の答えを導こう。

問 1 と(11)の状況を比較すると，

$$V_0 \to 0,\ V_0 - v \to -V_0,\ V = V_0 + \frac{m_1}{m_2}v \to v_\mathrm{B},\ m_1 \to xM,\ m_2 \to (1-x)M$$

となる。すなわち，$v \to V_0$ である。

これらを問 1 (3) の式に代入して，

$$v_\mathrm{B} = 0 + \frac{m_1}{m_2}V_0 = \frac{xM}{(1-x)M}V_0$$

よって，

$$\frac{xM}{(1-x)M}V_0 \geqq \frac{\sqrt{6}}{2}V_0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geqq 3-\sqrt{6}$$

となる。

（大泉雄司，仲里佑利奈，岡田和也，山崎裕太郎）

2016 年度 北海道大学 前期 物理

2　波の屈折と反射，虹の形成

出題範囲	屈折の法則，光
難易度	★★★★☆
所要時間	20 分
傾向と対策	光の屈折の問題。問 1 では，ホイヘンスの原理から屈折の法則を導き，ほかに，光に関する基礎知識の確認を行っている。知識問題は覚えていないと解けないので，必ず教科書で確認しておくこと。問 2 では，虹のメカニズムを光の屈折の知識を用いて説明する問題。水滴の中で 1 回反射する場合と，2 回反射する場合の 2 つを考えている。いずれも数学の幾何の問題があり，図を用いると楽になる。あまり見ない類の問題だが，その分説明はよくされているはずなので問題文をよく読むこと。

解答

問 1（1） $y_1 + y_2$　**（2）** 波源　**（3）** $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$

（4） 3.0×10^8　**（5）** 赤　**（6）** 小さく

問 2（7） $4\theta_2 - 2\theta_1$　**（8）** $60°$

（a） θ_1 の変化に対して θ_r の変化が小さい極大値付近では，反射光が集中して強くなる

（9） 紫　**（10）** $180° + 2\theta_1 - 6\theta_2$　**（11）** 赤

※注

解答する際は角度は°（度）をつけないはずだが，(3) を考慮すると，「度」の意味を含んでいるので，解答一覧や解説では θ_1，θ_2 は単なる数値ではなく，「度」を含むものとして扱った。

解説

問 1

波の伝わり方の 2 つの原理は，重ね合わせの原理

$$y = \underbrace{y_1 + y_2}_{(1)}\ 〔\mathrm{m}〕$$

および，ホイヘンスの原理

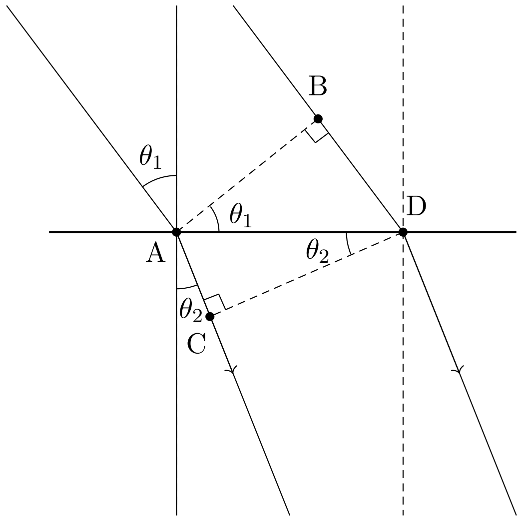
「1 つの波面上の各点からは，その各点を $\underbrace{\text{波源}}_{(2)}$ として，波の進む方向に新たな球面波を生じる」

である。

ここで，屈折の式を導いてみる。次のような図を考えて，

$$\sin\theta_1 = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} = \frac{v_1\Delta t}{\mathrm{AD}}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} = \frac{v_2\Delta t}{\mathrm{AD}}$$



したがって，

$$\underset{(3)}{\boldsymbol{\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}}}$$

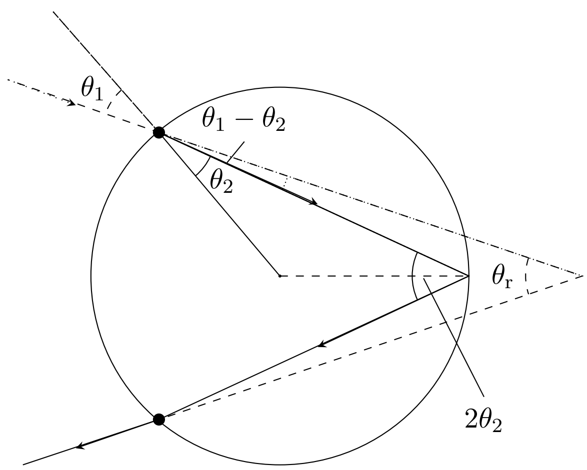
が成り立つ。

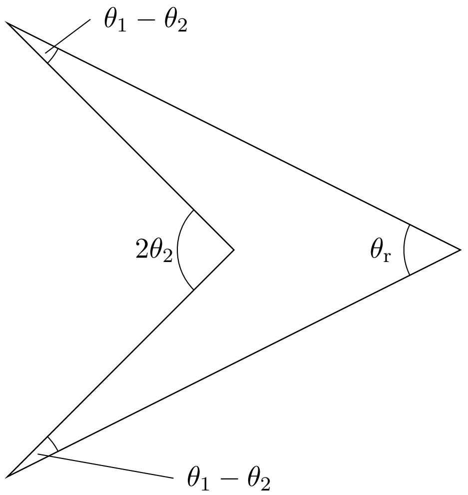
次に，光について考えることにする。真空中における光の速さは，波長に関わらず約 $\underset{(4)}{\boldsymbol{3.0\times10^8}}$ m/s で一定である。また，可視光の中で最も波長が長いのは **赤**$_{(5)}$ 色の光である。

物質中の光は速さが真空中よりも小さくなり，その速さは光の波長が短くなるほど **小さく**$_{(6)}$ なる。

問 2

問題中の図から，





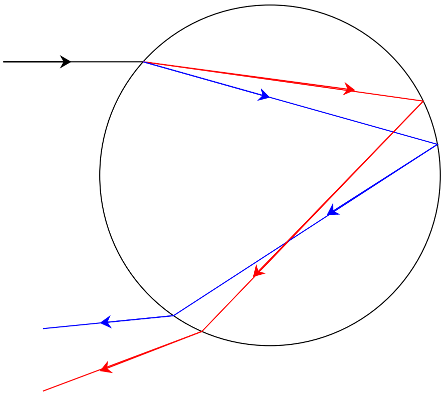
$$2\theta_2 = \theta_\mathrm{r} + 2(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta_\mathrm{r} = \underset{(7)}{\boldsymbol{4\theta_2 - 2\theta_1}}$$

θ_r を θ_1 の関数として表したグラフが図 3 となる。

光が最も集中しているのは極値をとるときであり，図から $\theta_1 \fallingdotseq$ **60** (8) 度 である。

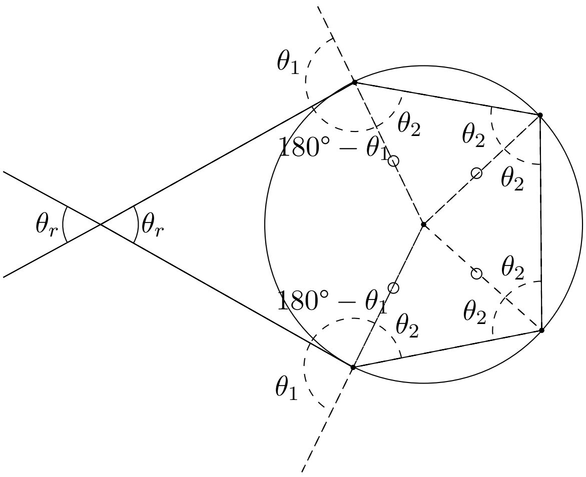
これは **θ_1 の変化に対して θ_r の変化が小さい極大値付近では，反射光が集中して強くなる** (a) からである。

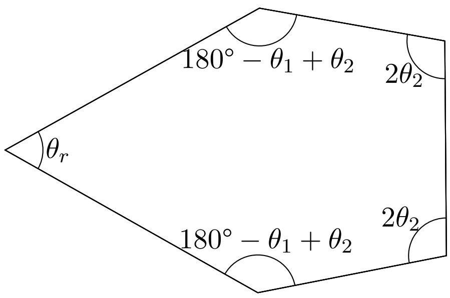


上図より，虹の色において，屈折率の小さい赤色の光は上の方の水滴によって，屈折率の大きい青色の光は下の方の水滴によって反射されるものを私たちは見ている。

よって，反射過程で一番下に見えるのは波長が短く，屈折角も大きい **紫** (9) 色である。

別の反射過程を考えて，





水滴中では，光は 2 回反射する。反射角は等しいことと，二等辺三角形の底角は等しいことを用いて，図より，

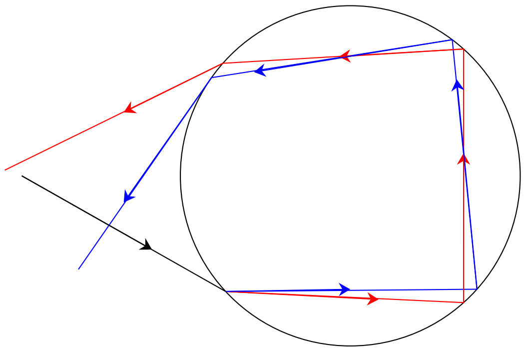
$$3 \times 180^\circ = \theta_{\mathrm{r}} + 2(180^\circ - \theta_1 + \theta_2) + 4\theta_2$$

$$\Leftrightarrow \theta_{\mathrm{r}} = 180^\circ + 2\theta_1 - 6\theta_2$$

$$= \underset{(10)}{\mathbf{180^\circ + 2\theta_1 - 6\theta_2}}$$

で表される。

この過程によって生じる虹では，最も波長が長く，屈折角の小さい **赤** (11) 色の光が一番下に見える。



（大泉雄司，仲里佑利奈，岡田和也，菊地祥太）

2016 年度 北海道大学 前期 物理

3 簡易リニアモーターの発電と充電

出題範囲	ローレンツ力，電磁誘導
難易度	★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	電磁誘導の問題。問題文にもあるとおり，発電と充電が問 1，問 2 の題材になっている。問 1 で留意したいのは，導体棒の速度と磁場の向きのなす角度を考慮することを忘れて，ローレンツ力の大きさを間違えないようにすること。ここを間違えてしまうと，問 1 すべてに響いてしまう。問 2 は，コンデンサーに充電する問題で，立てた式から電流が減衰することを導けるようにしよう。

解答

問 1 (1) $eB\sqrt{gh}$　**(2)** $2hB\sqrt{gh}$　**(3)** $ma_{\rm t} = \dfrac{mg}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}hBI_{\rm t}$

(4) $\dfrac{\sqrt{2}v_{\rm t}Bh}{R}$　**(5)** $\dfrac{mgR}{2\sqrt{2}B^2h^2}$　**(6)** $\dfrac{m^2g^2R}{4B^2h^2}$

問 2 (7) 0　**(8)** $2hv_{\rm t}B = RI_{\rm t} + \dfrac{q_{\rm t}}{C}$　**(9)** $ma_{\rm t} = -2hBI_{\rm t}$

(10) $-\dfrac{4h^2v_0B^2}{mR}$　**(ア)** (い)　**(イ)** (あ)

(ウ) (え)

解説

問 1

まずは導体棒の速さを考える。力学的エネルギー保存則から，

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2gh} \qquad (\because v > 0)$$

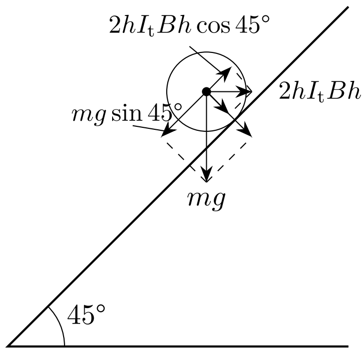
したがって，導体棒の内部の自由電子にはたらくローレンツ力の大きさは，

$$F = e\sqrt{2gh}B\sin 135°$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{eB\sqrt{gh}}}_{(1)} \text{〔N〕}$$

よって，導体内には $B\sqrt{gh}$〔N/C〕だけの電場がはたらいており，したがって，導体棒には $\underset{(2)}{\mathbf{2hB\sqrt{gh}}}$〔V〕の起電力が存在する。

回路を閉じて導体棒を落下させることを考えると，導体棒の運動方程式は，



$$ma_t = mg\sin 45° - 2hBI_t\cos 45°$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\boldsymbol{ma_t = \frac{mg}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}hBI_t}}_{(3)}$$

また，誘導起電力は v_t を用いると $\dfrac{v_tB\times 2h}{\sqrt{2}}$ と表される。キルヒホッフの法則より，

$$RI_t - \frac{2hv_tB}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad I_t = \underbrace{\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}v_tBh}{R}}}_{(4)} \text{〔A〕}$$

となる。以上より，

$$ma_t = \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{2(Bh)^2v_t}{R}$$

となる。ここで，十分に時間が経過して加速度が 0 になったとき，

$$\frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{2(Bh)^2v_t}{R} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_t = \underbrace{\boldsymbol{\frac{mgR}{2\sqrt{2}B^2h^2}}}_{(5)} \text{〔m/s〕}$$

となり，これを終端速度という。このときの抵抗での消費電力は，

$$RI^2 = R\left(\frac{\sqrt{2}Bh}{R}\times\frac{mgR}{2\sqrt{2}B^2h^2}\right)^2$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{\frac{m^2g^2R}{4B^2h^2}}}_{(6)} \text{〔W〕}$$

（別解）

このときに抵抗で消費されるエネルギー（＝抵抗での消費電力）は，棒から失われる力学的エネルギーに等しい。また，単位時間あたりで，棒の速さは不変（棒は終端速度に到達しているから）で，高さは $\dfrac{v_t}{\sqrt{2}}$〔m〕だけ低

下する。したがって，

$$\begin{aligned}RI^2 &= mg\frac{v_\mathrm{t}}{\sqrt{2}}\\ &= mg\frac{mgR}{2\sqrt{2}B^2h^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{m^2g^2R}{4B^2h^2}〔\mathrm{W}〕\end{aligned}$$

である。

問 2

最初は回路が閉じておらず，電流も流れないので，導体棒にも力ははたらかない。よって，

$$F = \underset{(7)}{\mathbf{0}}〔\mathrm{N}〕$$

続いて，導体棒が原点を通過したときに回路が閉じられる。この後について，キルヒホッフの法則を考えると，

$$\underbrace{2hv_\mathrm{t}B = RI_\mathrm{t} + \frac{q_\mathrm{t}}{C}}_{(8)}$$

が成立する。

また，導体棒にはたらく力はローレンツ力のみなので，運動方程式は，

$$\underbrace{ma_\mathrm{t} = -2hBI_\mathrm{t}}_{(9)}$$

となる。すると，スイッチを閉じた直後は (8) より，蓄えられている電荷は 0 なので，

$$2hv_0B = RI_0$$

$$\Leftrightarrow \quad I_0 = \frac{2hv_0B}{R}$$

(9) より，求める加速度を a_0〔$\mathrm{m/s^2}$〕とおくと，

$$ma_0 = -2hB \times \frac{2hv_0B}{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_0 = \underbrace{-\frac{4h^2v_0B^2}{mR}}_{(10)}〔\mathrm{m/s^2}〕$$

スイッチを閉じた直後は，加速度が負なので，v_t は $\underbrace{\textbf{(い)：減少する}}_{(ア)}$。また，スイッチ S を閉じた直後に回路に流れる電流 I_0 は $I_0 \neq 0$ であるから，q_t は $\underbrace{\textbf{(あ)：増加する}}_{(イ)}$。このときの電流の変化のグラフについて考える。$v_\mathrm{t} = v_\mathrm{f} =$ (定数) のとき，$a_\mathrm{t} = 0$ であり，これは (9) の式より $I_\mathrm{t} = 0$ を意味する。I は指数関数的に減少し，最終的に 0 になるので，グラフは $\underbrace{\textbf{(え)}}_{(ウ)}$ である。

※補足

I の具体的な式を出してみる。(9) から，

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{t}} &= -\frac{m}{2hB}\frac{dv_{\mathrm{t}}}{dt} \\
&= -\frac{m}{2hB}\frac{d}{dt}\frac{1}{2hB}\left(RI_{\mathrm{t}} + \frac{1}{C}q_{\mathrm{t}}\right) \\
&= -\frac{m}{4h^2B^2}\left(R\frac{dI_{\mathrm{t}}}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq_{\mathrm{t}}}{dt}\right) \\
&= -\frac{m}{4h^2B^2}\left(R\frac{dI_{\mathrm{t}}}{dt} + \frac{1}{C}I_{\mathrm{t}}\right) \\
\Leftrightarrow \quad I_{\mathrm{t}} &= -\frac{mR}{\frac{m}{C} + 4h^2B^2}\frac{dI_{\mathrm{t}}}{dt}
\end{aligned}
$$

この I_{t} についての微分方程式を解くと，

$$
\frac{1}{I_{\mathrm{t}}}dI_{\mathrm{t}} = -\frac{\frac{m}{C} + 4h^2B^2}{mR}dt
$$

$$
\therefore \quad \int_{I_0}^{I_{\mathrm{t}}} \frac{1}{I_{\mathrm{t}}}dI_{\mathrm{t}} = \int_0^t -\frac{\frac{m}{C} + 4h^2B^2}{mR}dt
$$

$$
\Leftrightarrow \quad \log I_{\mathrm{t}} - \log I_0 = -\frac{\frac{m}{C} + 4h^2B^2}{mR}t
$$

$$
\Leftrightarrow \quad I_{\mathrm{t}} = I_0 e^{-\alpha t} \qquad \left(\alpha = \frac{\frac{m}{C} + 4h^2B^2}{mR}\right)
$$

となる。すなわち，$t \to \infty$ のとき，$I_{\mathrm{t}} \to 0$ となる。

（ 大泉雄司，仲里佑利奈，岡田和也，山崎裕太郎 ）