2016 年度 北海道大学 前期 数学

1　複素数平面上の点と円

出題範囲	複素数平面
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	(1) は $z = x + yi$ とせずとも z と $\bar{z}$ のみを用いて解くこともできる。計算が多少煩雑になるが落ち着いて処理したい。(2) は 2 次関数の問題として処理できる。場合分けが存在することを見落とさずにしっかりと得点したい。

解答

(1) $z = x + yi$ (i は虚数単位) とする。また，z は複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円上にあるので，$x^2 + y^2 = 4$，$|z| = 2$ である。

$\bar{z} = x - yi$，$z + \bar{z} = 2x$ に注意して計算すると

$$\begin{aligned}|w|^2 &= (z^2 - 2az + 1)(\bar{z}^2 - 2a\bar{z} + 1)\\ &= |z|^4 + 4a^2|z|^2 - 2a|z|^2(z + \bar{z}) + z^2 + \bar{z}^2 - 2a(z + \bar{z}) + 1\\ &= 17 + 16a^2 - 20ax + 2x^2 - 2y^2\\ &= 4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9\end{aligned}$$

(2) (1) で得られた式を変形して

$$\begin{aligned}|w|^2 &= 4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9\\ &= 4\left(x - \frac{5a}{2}\right)^2 - 9a^2 + 9\end{aligned}$$

ここで 3 通りの場合分けが生じる。[1]

(i) $\left|\dfrac{5a}{2}\right| \leqq 2$ のとき，すなわち $-\dfrac{4}{5} \leqq a \leqq \dfrac{4}{5}$ のとき

$x = \dfrac{5a}{2}$ となる x が存在する。

よって，$|w|$ の最小値は $x = \dfrac{5a}{2}$ のとき

$$|w| = \sqrt{-9a^2 + 9} = 3\sqrt{-a^2 + 1}$$

(ii) $\dfrac{5a}{2} > 2$ のとき，すなわち $a > \dfrac{4}{5}$ のとき

[1] $x^2 + y^2 = 4$，すなわち $-2 \leqq x \leqq 2$ という条件があるためこのような場合分けが生じる。

常に $x < \dfrac{5a}{2}$ が成立するので，$|w|$ の最小値は $x = 2$ のとき

$$|w| = \sqrt{16a^2 - 40a + 25} = |4a - 5|$$[2]

[2] $16a^2-40a+25=(4a-5)^2$ であり，a の値によっては $4a-5$ が負となるので絶対値記号を付けて根号を外す。

(iii) $\dfrac{5a}{2} < -2$ のとき，すなわち $a < -\dfrac{4}{5}$ のとき，常に $x > \dfrac{5a}{2}$ が成立するので，$|w|$ の最小値は $x = -2$ のとき

$$|w| = \sqrt{16a^2 + 40a + 25} = |4a + 5|$$[3]

[3] $16a^2+40a+25=(4a+5)^2$

(i)(ii)(iii) より $|w|$ の最小値は次のようになる。

$$|w| = \begin{cases} |4a+5| & \left(a < -\dfrac{4}{5}\text{のとき}\right) \\ 3\sqrt{-a^2+1} & \left(-\dfrac{4}{5} \leqq a \leqq \dfrac{4}{5}\text{のとき}\right) \\ |4a-5| & \left(a > \dfrac{4}{5}\text{のとき}\right) \end{cases}$$

解説

(1) 直接 $z = x + yi$ として $(z^2 - 2az + 1)^2$ を計算すると，計算量がとんでもないものになる。問題文の条件である z が点 0 を中心とする半径 2 の円周上に位置すること，すなわち $|z| = 2$ であることに着目して，$|w|^2 = w\bar{w}$ を利用して計算が簡単になるようにした。

(2) 問題文の条件 $|z| = 2$ を忘れてはいけない。$|w|$ が x の式で表されているので，$-2 \leqq x \leqq 2$ である。a の絶対値が大きくなりすぎると $x = \dfrac{5a}{2}$ を満たす x が存在しなくなるので，場合分けが必要になる。

（河合敬宏，沈有程）

2016 年度 北海道大学 前期 数学

2　$e^{ax}\sin bx$ の形の積分

出題範囲	積分 (数学Ⅲ)
難易度	★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	(1) は基本問題であるが，計算が多少複雑である。符号などを間違えないように気をつけたい。(2) は微分の問題であるが，解説のように積分式を直に積分する手法が最も計算量が少なくてすむ。このような手法にも慣れておくことを勧める。

解答

(1)

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2a}\int_{-a}^{a} dt + \int_{-a}^{a} f(t)\sin t\, dt$$
$$= e^{-x} + \int_{-a}^{a} f(t)\sin t\, dt$$

ここで，$A = \displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\sin t\, dt$　$\cdots\cdots$ ① とおく。[1]

すると $f(x)$ は以下のように表される。

$$f(x) = e^{-x} + A \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで，

$$\int e^{-t}\sin t\, dt = -e^{-t}\sin t + \int e^{-t}\cos t\, dt + C\ (C\ \text{は積分定数})$$
$$= -e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t - \int e^{-t}\sin t\, dt + C$$

であるので

$$\int e^{-t}\sin t\, dt = -\frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t) + C$$

となる。[2]よって，② を ① に代入すると，

[1] 定積分なので定数に置き換える。

[2] $e^t\sin t$ の形の積分方法である。解説には別の方法も掲載したので合わせておさえておきたい。

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-a}^{a} f(t)\sin t\,dt \\
&= \int_{-a}^{a} (e^{-t}+A)\sin t\,dt \\
&= \left[-\frac{e^{-t}}{2}(\cos t+\sin t) - A\cos t\right]_{-a}^{a} \\
&= -\frac{e^{-a}}{2}(\cos a+\sin a) + \frac{e^{a}}{2}(\cos a-\sin a) \\
&= -\frac{e^{a}+e^{-a}}{2}\sin a + \frac{e^{a}-e^{-a}}{2}\cos a
\end{aligned}
$$

以上より，

$$
f(x) = e^{-x} - \frac{e^{a}+e^{-a}}{2}\sin a + \frac{e^{a}-e^{-a}}{2}\cos a
$$

(2) (1) より

$$
\begin{aligned}
g(a) &= A \\
&= -\frac{e^{a}+e^{-a}}{2}\sin a + \frac{e^{a}-e^{-a}}{2}\cos a
\end{aligned}
$$

両辺を a で微分して

$$
\begin{aligned}
g'(a) &= -\frac{e^{a}-e^{-a}}{2}\sin a + \frac{e^{a}+e^{-a}}{2}\cos a \\
&\quad - \frac{e^{a}+e^{-a}}{2}\cos a - \frac{e^{a}-e^{-a}}{2}\sin a \\
&= -(e^{a}-e^{-a})\sin a
\end{aligned}
$$

ここで，$0 < a \leqq 2\pi$ において $e^{a}-e^{-a} > 0$ であるので増減表は以下のようになる。

a	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$g'(a)$	(0)	$-$	0	$+$	0
$g(a)$	(0)	$\searrow$	$\dfrac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2}$

よって最小値は $a=\pi$ のとき，$g(\pi) = \dfrac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}$ である。

解説

(1) 関数 $f(x)$ が問われているが，$f(x)$ に定積分項があり，被積分関数の中に未知の関数が含まれている。この場合は，解答のように定積分項全体が定数になることに注目し，1 つの文字で表してしまえばよい。

また，関数 $e^{ax}\sin bx$ の積分は解答のようにしてもできるが，2 つの部分積分の式を連立させることで，$e^{ax}\cos bx$ の積分も同時に求まる。部分積分を微分の形で表現すると，

$$(e^{ax}\sin bx)' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx \qquad \cdots\cdots\ ③$$

$$(e^{ax}\cos bx)' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx \qquad \cdots\cdots\ ④$$

ここから $e^{ax}\sin bx$，$e^{ax}\cos bx$ について解く。

③ $\times a -$ ④ $\times b$ より

$$b\,(e^{ax}\sin bx)' + a\,(e^{ax}\cos bx)' = \left(a^2+b^2\right)e^{ax}\sin bx$$

$$e^{ax}\sin bx = \frac{a}{a^2+b^2}\,(e^{ax}\sin bx)' + \frac{a}{a^2+b^2}\,(e^{ax}\cos bx)'$$

以上より，C を積分定数として

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin bx\,dx &= \int\left\{\frac{a}{a^2+b^2}\,(e^{ax}\sin bx)' - \frac{b}{a^2+b^2}\,(e^{ax}\cos bx)'\right\}dx\\ &= \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx + C\\ \int e^{ax}\cos bx\,dx &= \int\left\{\frac{b}{a^2+b^2}\,(e^{ax}\sin bx)' + \frac{a}{a^2+b^2}\,(e^{ax}\cos bx)'\right\}dx\\ &= \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx + C\end{aligned}$$

である。$a=-1$，$b=1$ を代入すれば解答と同じ結果が得られる。

(2) $g(a)$ の微分については，解答のように愚直に計算するのではなく，次のように解くことができる。

$$F(t) = \int_0^x f(t)\sin t\,dt$$

とおくと

$$F'(x) = f(x)\sin x$$

である。

$$g(a) = \int_{-a}^{a} f(t)\sin t\,dt = F(a) - F(-a)$$

であるから

$$g'(a) = F'(a) - (-1)F'(-a) = f(a)\sin a + f(-a)\sin(-a)$$

となる。

（河合敬宏，辻啓吾）

2016 年度 北海道大学 前期 数学

3 条件付き確率

出題範囲	場合の数と確率
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	ひきだし A には金銀銅，ひきだし B には金銀が存在しうるということに注意しながら計算を進めていく。メダルの色と配置がどのようになっているかを間違えやすいので，図を描きながら整理したい。

解答

(1) 以下，各メダルを区別して考える。ひきだし A に入っているメダルの色の全パターン数は $3^3 = 27$ 通りであり，それぞれ同様に確からしい。

このうち，メダルの色が 2 種類であるとき，その 2 つの色の選び方は ${}_3C_2 = 3$ 通り。メダルの色がちょうど 2 種類となるのは，すべて同じ色になる場合を除いて，$3 \times (2^3 - 2) = 18$ 通りある。

よって，求める確率は

$$\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

(2) ひきだし A，B を合わせたメダルの色の全パターン数は，$3^3 \times 2^2 = 108$ 通りあり，それぞれ同様に確からしい。

このうち，メダルの色が金と銀の 2 種類となるのは，すべて同じ色になる場合を除いて，$2^5 - 2 = 30$ 通りある。

金と銅，または銀と銅の 2 種類となるとき，ひきだし B のメダルはすべて金，またはすべて銀である。このとき，ひきだし A のメダルの色の選び方はひきだし B とすべて同じ色になる場合を除いて，$2^3 - 1 = 7$ 通りある。

よって，求める確率は

$$\frac{30 + 2 \times 7}{108} = \frac{11}{27}$$

(3) 金メダルを g，銀メダルを s，銅メダルを c と書くことにする。

事象 C を「ひきだし A，B に合わせてちょうど 3 枚の金メダルが入っている」，事象 D を「ひきだし A のメダルの色が 2 種類である」と定める。事象 C が起こるのは，

(i) A ; gss　B ; gg　3 通り

(ii) A；gcc　B；gg　3 通り

(iii) A；gsc　B；gg　$3! = 6$ 通り

(iv) A；ggs　B；gs　$3 \times 2 = 6$ 通り

(v) A；ggc　B；gs　$3 \times 2 = 6$ 通り

(vi) A；ggg　B；ss　1 通り

よって $P(C) = \dfrac{3+3+6+6+6+1}{108} = \dfrac{25}{108}$

このうち，事象 $C \cap D$ が起こるのは，(i)(ii)(iii)(iv) のときで，

$$P(C \cap D) = \frac{3+3+6+6}{108} = \frac{18}{108}$$

以上より，求める条件つき確率は

$$P_c(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{18}{25}$$

解説

(1) 基本的な問題であるので，確実に正解したい。

(2) 色の選び方によって確率が変わってくるので，場合分けが必要なことに注意したい。重複して数えたり，数え忘れたりしないよう気をつけよう。

(3) 条件つき確率の問題である。基本通り考えれば特に問題はないが，(2) と同様に数え間違いに注意しよう。

（河合敬宏，沈有程）

2016 年度 北海道大学 前期 数学

4　3 次方程式の解と数列

出題範囲	高次方程式／数列
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	(1) は堅実に微分して極大値，極小値を求めてもよいが，限られた試験時間を考えると，解答に記したような議論が展開できると時間の短縮となる。(2) は $a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n$ という形が方程式に酷似していることに気がつくとよい。(3) は (2) を利用した数学的帰納法であるが，a_1，a_2，a_3 のすべてについて具体的な値を出す必要があり，ここでの計算をうまく処理したい。

解答

(1) $f(x)=x^3+x^2-2x-1$ とする。

ここで，$f(-2)=-1$，$f(-1)=1$，$f(0)=-1$，$f(2)=7$ となる。$f(x)$ は連続であるから[1]，中間値の定理より，方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ は区間 $(-2,-1)$，$(-1,0)$，$(0,2)$ においてそれぞれ 1 つずつ解をもつ。

以上より，方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ は 3 つの異なる 0 でない解をもつ。

(2) s，t，u は方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ の解であるので

$s^3+s^2-2s-1=0$，$t^3+t^2-2t-1=0$，$u^3+u^2-2u-1=0$ である。

$$\begin{aligned} a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n{}^{[2]} &= \frac{s^{n-1}\left(s^3+s^2-2s-1\right)}{(s-t)(s-u)} \\ &+\frac{t^{n-1}\left(t^3+t^2-2t-1\right)}{(t-u)(t-s)} \\ &+\frac{u^{n-1}\left(u^3+u^2-2u-1\right)}{(u-s)(u-t)} \\ &=0 \end{aligned}$$

(3) 「a_n が整数であること」$\cdots(*)$ がすべての n に対して成立することを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$，2，3 のとき

[1] $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

であるから，十分大きな x について $f(x)>0$，十分小さな x について $f(x)<0$ が成立するということを踏まえて適当に数字をとる。

[2] 分子を s,t,u ごとにまとめていることに注意。

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{(s-t)(s-u)} + \frac{1}{(t-u)(t-s)} + \frac{1}{(u-s)(u-t)} \\
&= \frac{-(t-u)-(u-s)-(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{s}{(s-t)(s-u)} + \frac{t}{(t-u)(t-s)} + \frac{u}{(u-s)(u-t)} \\
&= \frac{-s(t-u)-t(u-s)-u(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{s^2}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^2}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^2}{(u-s)(u-t)} \\
&= \frac{-s^2(t-u)-t^2(u-s)-u^2(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\
&= \frac{-(t-u)s^2+(t-u)(t+u)s-tu(t-u)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\
&= -\frac{(t-u)(s-t)(s-u)}{(s-t)(t-u)(u-s)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ゆえに a_1，a_2，a_3 は整数である。

(ii) $k \geqq 1$ に対し，$n = k$，$k+1$，$k+2$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。

このとき，$a_{k+3}+a_{k+2}-2a_{k+1}-a_k = 0 \Leftrightarrow a_{k+3} = -a_{k+2}+2a_{k+1}+a_k$

より a_{k+3} も整数となる。

よって $n = k+3$ でも $(*)$ は成り立つ。

(i)(ii) より，すべての n について $(*)$ が成り立つ。

以上より，すべての n に対して a_n は整数である。

解説

(1) 中間値の定理を使うのが楽でよい。中間値の定理を使う区間をどう選ぶかに悩んだときは，グラフをかいて見当をつけるとよい。

(2) s，t，u が $x^3+x^2-2x-1=0$ の解であることを利用する。a_n の各項の分子に注目することがポイントである。

(3) 漸化式を a_{n+3} について解くと，a_{n+2}，a_{n+1}，a_n の係数がすべて整数であることに注目すれば，数学的帰納

法を用いるのが得策だと気がつくだろう。a_1，a_2，a_3 の計算は，s，t，u の入れ替え対称性を考えてうまく処理したい。

（青木徹，河合敬宏）

2016 年度 北海道大学 前期 数学

5 空間図形と図形の性質

出題範囲	空間図形
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	(1) はベクトルの内積を用いて答えるのが最も楽である。線分 PQ，PR の距離の最小値から求めても良いが，計算が煩雑になるのでお勧めできない。(2) は球の性質が分かっていれば容易に PQ = PR の式が立てられるであろう。計算がやや煩雑となるが，丁寧に処理したい。(3) は放物線の焦点と準線の定義を覚えておけば容易である。このように，細かい定義を疎かにしないようにしたい。

解答

(1) 問題文より，実数 u，v を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,0,2)+u(0,1,1)=(0,u,u+2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+v\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(1,0,0)+v(0,0,1)=(1,0,v)$$

とおける。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-s,u-t,u+2-a)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1-s,-t,v-a)$ となる。

これらのベクトルがそれぞれ l，m の方向ベクトル $(0,1,1)$，$(0,0,1)$ と直交することが必要条件である。

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(0,1,1)=2u-t+2-a=0 \Leftrightarrow u=\frac{t+a-2}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot(0,0,1)=v-a=0 \Leftrightarrow v=a$$

以上より，$\mathrm{Q}\left(0,\dfrac{t+a-2}{2},\dfrac{t+a+2}{2}\right)$，$\mathrm{R}(1,0,a)$

(2) 条件のような球面が存在するには，PQ = PR となればよい。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2=(-s)^2+\left(\frac{-t+a-2}{2}\right)^2+\left(\frac{t-a+2}{2}\right)^2$$

$$=s^2+\frac{t^2}{2}+(-a+2)t+\frac{(-a+2)^2}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|^2=(-s+1)^2+(-t)^2=s^2-2s+1+t^2$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|^2$ であるので

$$s^2 + \frac{t^2}{2} + (-a+2)t + \frac{(-a+2)^2}{2} = s^2 - 2s + 1 + t^2$$

$$\Leftrightarrow 4s = t^2 + 2(a-2)t - a^2 + 4a - 2$$

(3) (2) で求められた式を変形すると

$$4s = t^2 + 2(a-2)t - a^2 + 4a - 2$$

$$= (t+a-2)^2 - 2a^2 + 8a - 6$$

$$\Leftrightarrow (t+a-2)^2 = 4\left(s + \frac{1}{2}a^2 - 2a + \frac{3}{2}\right)$$

この軌跡は確かに放物線であり，その焦点は $\left(-\frac{1}{2}a^2 + 2a - \frac{1}{2}, -a+2\right)$

準線は $s = -\frac{1}{2}a^2 + 2a - \frac{5}{2}$ である。[1]

[1] 放物線の焦点と準線の定義から導かれる。

解説

(1) 「直交する」と設問で述べられたときは，直交する 2 つのベクトルの内積が 0 になることを利用する場合が多い。内積の計算は成分表示を用いると楽である。

(2) 点 P を中心とし，l と m がともに接するような球面が存在するとき，PQ と PR はともに球の半径となるので，$\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$ が成り立ち，そこから条件式が導き出せる。

(3) $(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0)$ は放物線 $y^2 = 4px$ を x 軸の正の向きに x_0，y 軸の正の向きに y_0 だけ平行移動した放物線になる。このとき，頂点の座標は (x_0, y_0)，焦点の座標は $(p+x_0, y_0)$，準線の方程式は $x = -p + x_0$ である。

（青木徹，河合敬宏，沈有程）