

2015 年度 北海道大学 前期 物理

1 小球の衝突と放物線運動

出題範囲	運動量保存則，放物線運動
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	問 1 は球の衝突の問題。反発係数の式と運動量保存から球の速度を導く。基本問題なので間違えないようにしよう。問 2 は放物線運動とはねかえりの融合問題。地面と球が衝突するときに，横方向の速度は変化しないことに注意。後は誘導のとおりに計算すればよい。

解答

- 問 1 (1) $\sqrt{2gh}$ (2) $\frac{1+e_s}{3}\sqrt{2gh}$ (3) $\frac{|1-2e_s|}{3}\sqrt{2gh}$
- (4) $\frac{1}{2}mgh$ (5) mgh
- 問 2 (6) $2\sqrt{\frac{h}{g}}$ (7) h (8) $4e_w$
- (9) $\frac{3}{4}$ (10) $4e_w\sqrt{\frac{h}{g}}$ (11) $4(e_w)^n\sqrt{\frac{h}{g}}$
- (12) $2\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{1+e_w-2(e_w)^{n+1}}{1-e_w}$ (13) 7

解説

問 1

衝突の問題である。

衝突直前の球 B の速度を v_B [m/s] とおいて， $y = 2h$ を位置エネルギーの基準として，エネルギー保存の法則から，

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh$$

$$\therefore |v_B| = \underbrace{\sqrt{2gh}}_{(1)} \text{ [m/s]}$$

となる（求めるのは速度の大きさであることに注意）。

衝突後の球 A，球 B の速度を v'_A [m/s]， v'_B [m/s] とおいて，運動量保存，反発係数の式から，

$$m\sqrt{2gh} = mv'_B + 2mv'_A$$

$$e_s(0 - \sqrt{2gh}) = v'_B - v'_A$$

以上の2式を連立して解くと、ここで求めているのは速度の大きさであることに注意して、

$$|v_A| = \frac{1 + e_s}{3} \sqrt{2gh} \quad [\text{m/s}] \quad (2)$$

$$|v'_B| = \frac{|1 - 2e_s|}{3} \sqrt{2gh} \quad [\text{m/s}] \quad (3)$$

となる。

ここで、この衝突の前後でのエネルギーの総和の変化を考える。

衝突後のエネルギーの総和は、

$$\frac{1}{2} \cdot 2m \left(\frac{1}{2} \sqrt{2gh} \right)^2 = \frac{1}{2} mgh \quad [\text{J}] \quad (4)$$

衝突前は、

$$mgh \quad [\text{J}] \quad (5)$$

であり、エネルギーは減少していることがわかる。

問2

球 A が右向きに $\frac{\sqrt{gh}}{2}$ [m/s] の大きさの速度で運動することを考える。球 A が床に衝突する時刻 t [s] は、

$$-2h = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore t = 2\sqrt{\frac{h}{g}} \quad [\text{s}] \quad (6)$$

であり、 x 軸方向に関して球 A は等速直線運動をしているので、求める x 座標は、

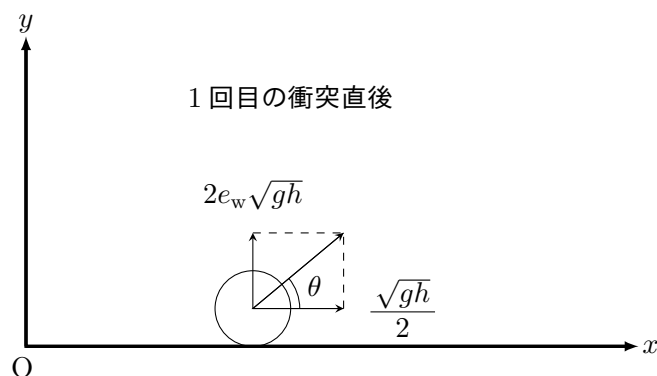
$$\frac{\sqrt{gh}}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} = h \quad [\text{m}] \quad (7)$$

となる。

1 回目の衝突直後のはねかえりを考えると、はねかえり後の x 軸方向の速さは、 x 軸方向に力がはたらかないので、 $\frac{\sqrt{gh}}{2}$ [m/s]。 y 軸方向の速さは、落下時の速さ gt [m/s] にはねかえり係数 e_w をかけて、

$$e_w \cdot gt = e_w \cdot g \cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} = 2e_w\sqrt{gh} \quad [\text{m/s}]$$

である。



したがって,

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{2e_w\sqrt{gh}}{\frac{\sqrt{gh}}{2}} \\ &= \underline{\underline{4e_w}}_{(8)}\end{aligned}$$

球 A がついたての上を通過することを考える。

1 回目の衝突から、球 A がついたてと同じ x 軸上にくるのにかかる時間は,

$$\frac{2h-h}{\frac{\sqrt{gh}}{2}} = 2\sqrt{\frac{h}{g}} \text{ [s]}$$

このときの y 座標は,

$$\begin{aligned}y &= 2e_w\sqrt{gh} \cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} - \frac{1}{2}g\left(2\sqrt{\frac{h}{g}}\right)^2 \\ &= 4he_w - 2h\end{aligned}$$

これが h よりも大きければよい。したがって,

$$\begin{aligned}4he_w - 2h &> h \\ \Leftrightarrow e_w &> \underline{\underline{\frac{3}{4}}}_{(9)}\end{aligned}$$

また、1 回目の衝突から 2 回目の衝突にかかる時間 Δt_1 [s] は、運動量と力積の関係を考えて、力積 $mg\Delta t_1$ [N・s] は運動量の変化 $2me_w\sqrt{gh} - (-2me_w\sqrt{gh})$ [kg・m/s] に等しいから、

$$\begin{aligned}mg\Delta t_1 &= 2me_w\sqrt{gh} \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \Delta t_1 &= \underline{\underline{4e_w\sqrt{\frac{h}{g}}}}_{(10)} \text{ [s]}\end{aligned}$$

となる。ここで、 i 回目と $i+1$ 回目の衝突の間の時間を Δt_i [s] とおき、 i 回目の衝突直後の球 A の垂直方向の速さを v_i [m/s] とおく。このときに成り立つ式は、はねかえり係数の式と運動量と力積の関係式から、

$$v_i \cdot e_w = v_{i+1} \text{ [m/s]}$$

かつ、

$$mg\Delta t_i = mv_i - (-mv_i) \Leftrightarrow \Delta t_i = \frac{2v_i}{g}$$

上の式から、

$$\begin{aligned} v_n &= (e_w)^{n-1} v_1 \\ &= 2(e_w)^n \sqrt{gh} \text{ [m/s]} \\ \Delta t_n &= \frac{2v_n}{g} \\ &= \underbrace{4(e_w)^n \sqrt{\frac{h}{g}}}_{(11)} \text{ [s]} \end{aligned}$$

したがって、 $n+1$ 回目に衝突する時刻は、

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \left(4(e_w)^i \sqrt{\frac{h}{g}} \right) + 2\sqrt{\frac{h}{g}} \\ &= 4\sqrt{\frac{h}{g}} \left(\sum_{i=1}^n (e_w)^i \right) + 2\sqrt{\frac{h}{g}} \\ &= 4\sqrt{\frac{h}{g}} \frac{e_w - (e_w)^{n+1}}{1 - e_w} + 2\sqrt{\frac{h}{g}} \\ &= \underbrace{2\sqrt{\frac{h}{g}} \frac{1 + e_w - 2(e_w)^{n+1}}{1 - e_w}}_{(12)} \text{ [s]} \end{aligned}$$

ここで、 n が十分に大きいとき、(12)の式は、

$$2\sqrt{\frac{h}{g}} \frac{1 + e_w}{1 - e_w}$$

となり、

$$e_w > \frac{3}{4}$$

したがって，球 A の x 座標について，

$$\frac{\sqrt{gh}}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} \frac{1 + e_w - 2(e_w)^{n+1}}{1 - e_w} > \frac{\sqrt{gh}}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= \textcolor{violet}{7}_{(13)} \times h \text{ [m]}$$

となる。

（大泉雄司，仲里佑利奈，山崎裕太郎，岡田和也）

2015 年度 北海道大学 前期 物理

2 電流が一樣磁場から受ける力，偶力のモーメント，つり合いの安定性

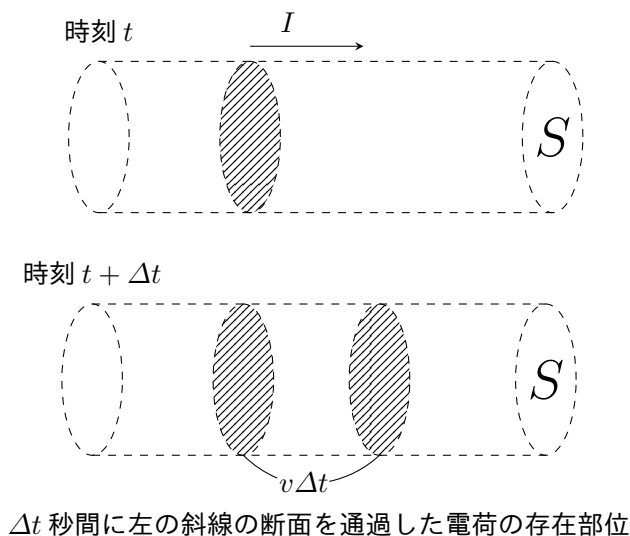
出題範囲	磁場中のコイルの回転
難易度	★★☆☆☆
所要時間	10 分
傾向と対策	コイルにはたらく偶力を調べる問題。最初の電流をミクロな視点から見る問題は，教科書にも載っている基礎知識なので確認しておくこと。コイルにはたらく力の向きさえ間違えなければ，後は問題なく解けるはず。

解答

- | | | |
|------------------------|----------------------|-------------------|
| (1) $qnvS$ | (2) aIB | (a) (力) |
| (3) $IBab \cos\theta $ | (i) 解説中に記載 | (4) $\frac{1}{4}$ |
| (5) $\frac{\pi}{2}$ | (6) $\frac{3\pi}{2}$ | (b) (イ) |
| (c) (イ) | (d) (ウ) | (e) (ア) |

解説

まず，電流をミクロな視点から見てみると，物質中の電子がある速度で移動しているものと考えられる。電子の平均速度を v [m/s]，単位体積中の粒子数を n [/m³]，荷電粒子の電気量を q [C]，断面積を S [m²] とする。



このとき、単位時間あたりに物質のある断面を通過する電子数は、 $S \cdot v \cdot n$ [1/s] であり、その電気量は、 $Svn \cdot q$ [C/s] である。したがって、電流の大きさは $qnvS$ [A] となる。

続いて、電流と磁場によって、コイルにはたらく力を考える。AA' に存在する電子にはたらくローレンツ力の総和は、

$$qvB \cdot aS \cdot n = a \cdot qvnS \cdot B$$

$$= aIB \quad \text{[N]} \quad (2)$$

であり、向きは (力) : $-z$ 方向。

また、DD' にはこれと向きが逆で、同じ大きさの力のはたらく。したがって、コイルにはたらく力のモーメントの大きさは、

$$2 \cdot \frac{b}{2} |\cos \theta| \cdot aIB = IBab |\cos \theta| \quad \text{[N} \cdot \text{m]} \quad (3)$$

ここで、 $\theta = 0$ [rad], $l = 2(a + b)$ [m] が一定であるときの偶力のモーメントの大きさは、

$$IBab = IBa \left(\frac{l}{2} - a \right) \quad \text{[N} \cdot \text{m]}$$

という式で表される。

この関係をグラフにすると右のようになる。

よって、偶力のモーメントの大きさが最大となるのは、

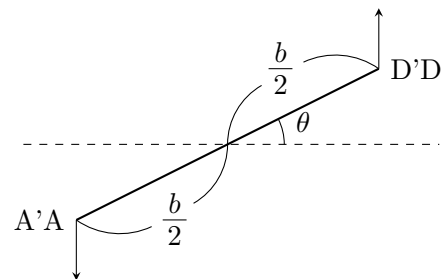
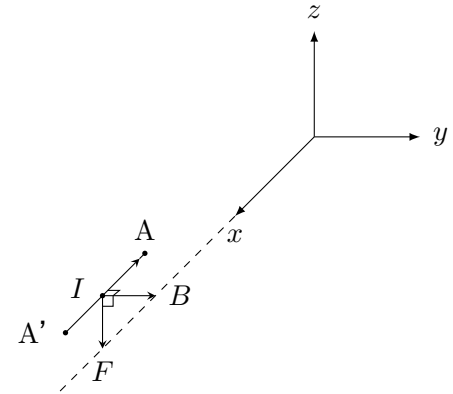
$$a = \frac{l}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{l} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

のときである。ここで、ある a について角度を変化させてモーメントを考える。モーメントが 0 になるのは、2 つの力が同一直線上に並んだときである。したがって、

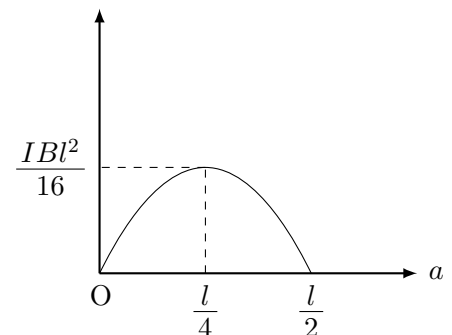
$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{[rad]}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2} \quad \text{[rad]} \quad (5) \quad (6)$$

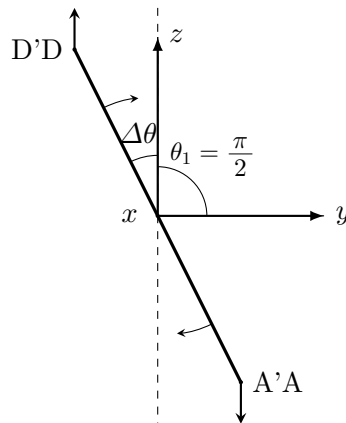
ここで、角度が θ_1 [rad] の近くなったときのコイルの挙動を考える。 $\theta = \theta_1 + \Delta\theta$ [rad] のとき、コイルの角度 θ は次ページの図より、(イ) : θ_1 に近づこうとする。



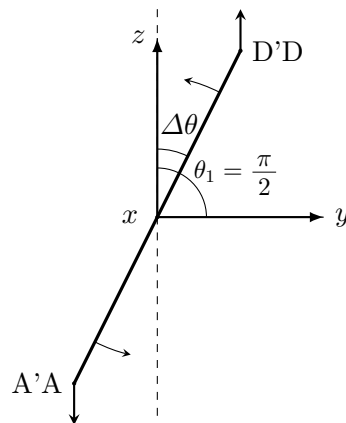
(i)

偶力のモーメントの大きさ



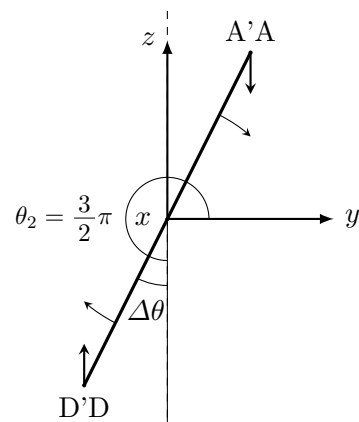
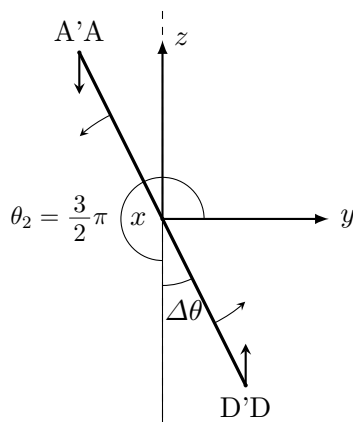


$\theta = \theta_1 - \Delta\theta [\text{rad}]$ のとき、コイルの角度 θ は次図より、(イ) : θ_1 に近づこうとする。(c)



また、同じことを θ_2 について考えてみると次の図のようになり、いずれにしても $\theta = \theta_2$ から遠ざかるように力がはたらいっている。したがって、コイルの角度 θ は (ウ) : θ_2 から離れようとする。(d)

以上から、コイルは角度が (ア) : θ_1 のときに安定する。(e)



(大泉雄司, 仲里佑利奈, 岡田和也, 山崎裕太郎)

2015 年度 北海道大学 前期 物理

3 理想気体の状態変化

出題範囲	気体の状態変化，マイヤーの関係
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	気体変化の問題。問 1 は定量的な問いで，定積，定圧変化について聞かれ，最終的にマイヤーの関係を導き出している。一方，問 2 は定性的な問いで，断熱変化，等温変化などについて聞かれ，仕事の大きさについてグラフから読み取ることになる。このような気体変化の問題を解くときは，状態を p - V 図を用いてまとめておくとうわかりやすく便利である。

解答

問 1 (1) $\frac{6p_0V_0}{R}$ (2) $\frac{2}{3}C_V$ (3) $\frac{1}{6}C_p$

(4) $\frac{R}{6}$ (5) $W_{BC} - (Q_{AB} + Q_{BC})$

(あ) 熱力学第一法則より， $\Delta U_{AC} = W_{BC} - (Q_{AB} + Q_{BC})$

この式に代入して，

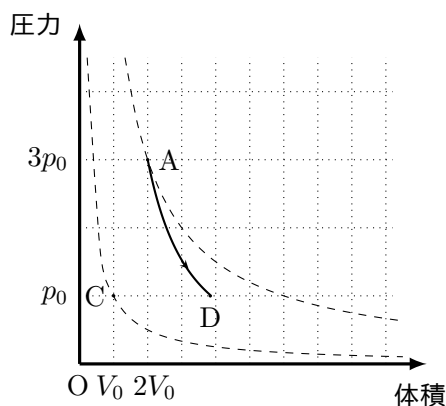
$$C_V \left(\frac{1}{6} T_A - T_A \right) = \frac{1}{6} RT_A - \left(\frac{2}{3} C_V T_A \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{6} C_V T_A = \frac{1}{6} RT_A - \frac{2}{3} C_V T_A - \frac{1}{6} C_p T_A$$

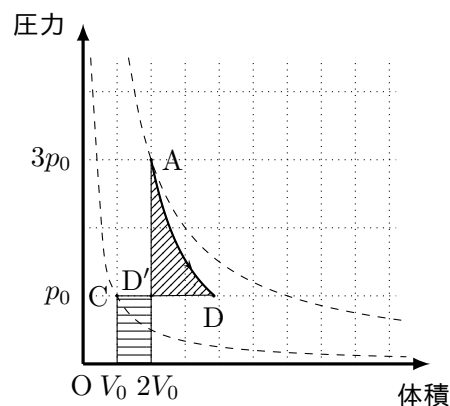
よって， $C_p - C_V = R$ が成立する。

問 2 (i)

(ii)



(a) (イ)



(b) (ウ)

(c) (イ)

解説

問 1

気体の変化 $A \rightarrow B$ を考える。状態 B の温度を T_B [K] として、気体の状態方程式より、

$$A : 3p_0 \times 2V_0 = RT_A$$

$$B : p_0 \times 2V_0 = RT_B$$

よって、

$$T_A = \frac{6p_0V_0}{R} \quad [\text{K}]$$

~~~~~<sub>(1)</sub>

また、これは定圧変化なので、放出した熱量は、

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= -C_V \Delta T_{AB} \\ &= -C_V (T_B - T_A) \\ &= -C_V \left( \frac{1}{3} T_A - T_A \right) \\ &= \frac{2}{3} C_V \times T_A [\text{J}] \end{aligned}$$

~~~~~<sub>(2)</sub>

続いて、気体の変化 $B \rightarrow C$ を考える。気体の状態方程式より、

$$C : p_0 \times V_0 = RT_C$$

また、これは等積変化なので、放出した熱量と、された仕事は、

$$\begin{aligned} Q_{BC} &= -C_p \Delta T_{BC} \\ &= -C_p (T_C - T_B) \\ &= -C_p \left(\frac{1}{6} T_A - \frac{1}{3} T_A \right) \\ &= \frac{1}{6} C_p \times T_A [\text{J}] \end{aligned}$$

~~~~~<sub>(3)</sub>

$$\begin{aligned} W_{BC} &= p_0 V_0 \\ &= \frac{R}{6} \times T_A [\text{J}] \end{aligned}$$

~~~~~<sub>(4)</sub>

となる。

ここで、熱力学第一法則より、

$$\Delta U_{AC} = \underbrace{W_{BC} - (Q_{AB} + Q_{BC})}_{(5)}$$

この式に代入して,

$$C_V \left(\frac{1}{6} T_A - T_A \right) = \frac{1}{6} R T_A - \left(\frac{2}{3} C_V T_A + \frac{1}{6} C_p T_A \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{6} C_V T_A = \frac{1}{6} R T_A - \frac{2}{3} C_V T_A - \frac{1}{6} C_p T_A$$

よって,

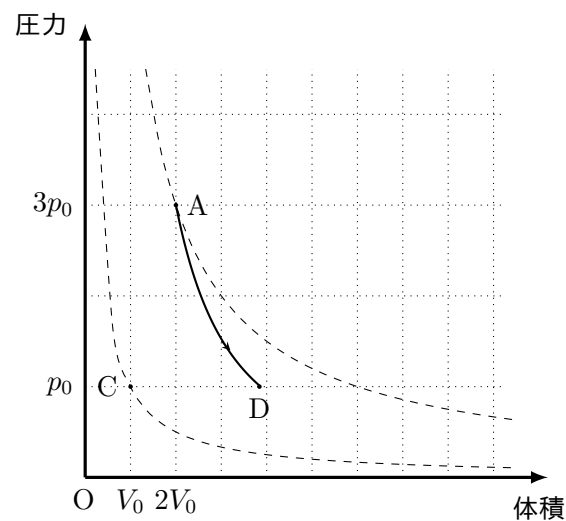
$$C_p - C_V = R$$

が成立する。

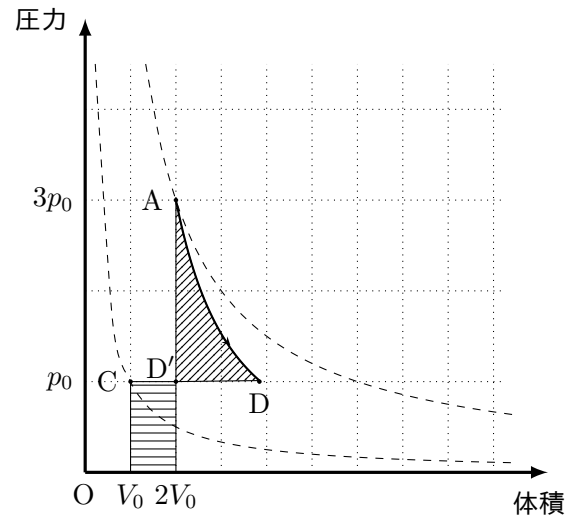
問 2

状態 A から気体を断熱膨張させることを考える。断熱変化で気体を膨張させると、等温変化に比べて圧力はより小さくなるので、グラフは等温変化よりも勾配は急で変化する。よって、グラフはこのようになる。

…… (i)

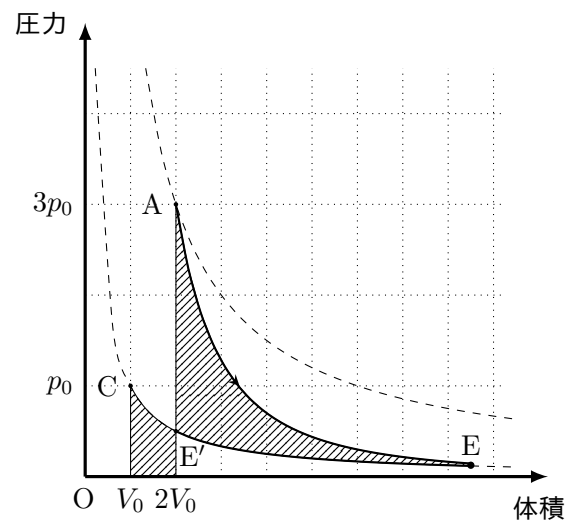


また、状態 D から状態 D', そして状態 C まで等圧変化させたとき、外部にした仕事と外部からされた仕事を考えると次のようになる。…… (ii)



続いて、状態 C と等温になるまで断熱変化させて、等温変化で状態 C まで変化させることを考える。

これをグラフにして、上と同じように外部にした仕事と外部からされた仕事を図示すると、以下のようなになる。



したがって、

$$W_{AEE'} > W_{ADD'}$$

よって、答えは (イ) : 大きい _(a)。

また、

$$W_{E'C} < W_{D'C}$$

よって、答えは (ウ) : 小さい _(b)。

最後に、外部に取り出された仕事を各々 W_{AEC} , W_{ADC} とおくと、

$$W_{\text{AEC}} = W_{\text{AEE}'} - W_{\text{E}'\text{C}}$$

$$W_{\text{ADC}} = W_{\text{ADD}'} - W_{\text{D}'\text{C}}$$

が成立する。

これらを比較して、以上の結果から、

$$W_{\text{AEC}} > W_{\text{ADC}}$$

となることがわかる。

よって、答えは (イ) : 大きい _(c) 。

(大泉雄司, 仲里佑利奈)