2015年度 北海道大学 前期 数学

1　微分と最大・最小

出題範囲	微分 (数学Ⅲ)
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	計算が煩雑というわけでもなければ，発想が必要というわけでもないので，落ち着いて解けば完答できるだろう。ただし，増減表で $f'(t)$ の符号に注意が必要である。

解答

(1) C_1 について

$$y' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

点 $(t, (t-1)e^t)$ における C_1 の接線の方程式は

$$y - (t-1)e^t = te^t(x-t)$$

$$\Leftrightarrow y = te^t x - (t^2 - t + 1)e^t$$

これを C_2 に代入して

$$te^t x - (t^2 - t + 1)e^t = \frac{1}{2e}x^2 + a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2e}x^2 - te^t x + a + (t^2 - t + 1)e^t = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

C_1 と l は接するので，① の判別式を D とすると $D = 0$ である。つまり

$$t^2e^{2t} - \frac{2}{e}\{a + (t^2 - t + 1)\,e^t\} = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}t^2e^{2t+1} - (t^2 - t + 1)e^t$$

(2)

$$a = f(t) = \frac{1}{2}t^2e^{2t+1} - (t^2 - t + 1)e^t$$

とおく。

$$f'(t) = te^{2t+1} + t^2e^{2t+1} - (2t-1)e^t - (t^2 - t + 1)e^t$$

$$= e^t\{t(t+1)e^{t+1} - t(t+1)\}$$

$$= t(t+1)e^t(e^{t+1} - 1)$$

$f'(t)=0$ となるのは $t=-1,\ 0$ であり，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

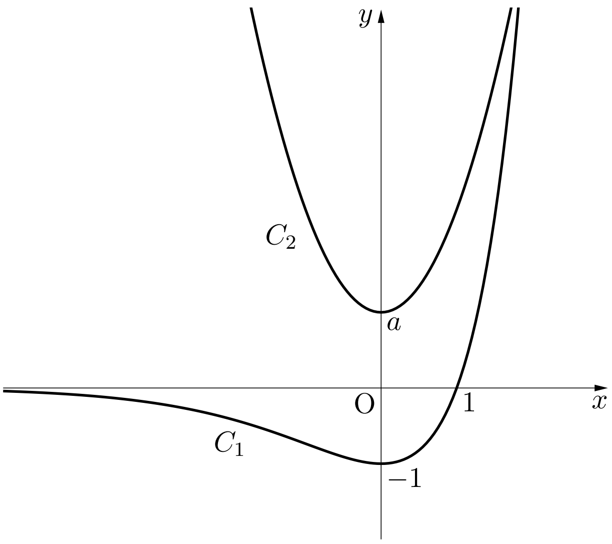
増減表より，$t=0$ のとき極小値 $a=-1$

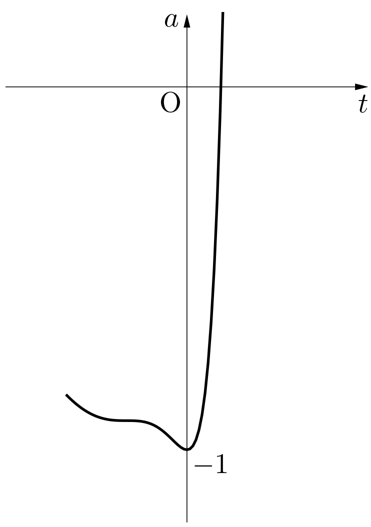
解説

(1) まずは接線の方程式を求める。その後 C_2 と接するという条件より，接線と C_2 を連立して y を消去し，判別式 $D=0$ を解くことで a を t で表している。

(2) 極小値を求めるために微分して増減表をかく。$t=-1$ の前後では符号は変化しないことに注意が必要である。

また，この問題の C_1，C_2 は左下の図，a と t の関係は右下の図のようになる。





（大久保佳徳，河合敬宏，辻啓吾）

2015 年度 北海道大学 前期 数学

2　数列と漸化式

出題範囲	数列
難易度	★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	必要条件から範囲を絞るという方法を思いつけば完答も狙える問題である。少なくとも (1) は解きたいが，公比が 1 でないという記述を忘れないようにしたい。

解答

(1)

$$a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1}$$

両辺を p^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

$b_n = \dfrac{a_n}{p^n}$ より

$$b_{n+1} = b_n + \left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

p，q は正の実数であるので，$-\dfrac{q}{p} \neq 1$ であり，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{q}{p}\right)^{k+1} \\ &= \frac{a_1}{p} + \frac{q^2}{p^2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)} \\ &= \frac{q^2}{p(p+q)} \left\{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ。

(2) $q = 1$ とすると

$$b_n = \frac{1}{p(p+1)} \left\{1 - \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \ a_n = p^n b_n = \frac{1}{p+1} \left\{p^{n-1} - (-1)^{n-1}\right\}$$

よって，$a_{n+1} \geqq a_n$ となるとき

$$p^n - (-1)^n \geqq p^{n-1} - (-1)^{n-1}$$

$$p^{n-1}(p-1) \geqq 2(-1)^n \qquad \cdots\cdots\cdot ①$$

① がすべての自然数 n について成り立つためには，$n = 2$ において成り立つことが必要。$n = 2$ のとき

$$p(p-1) \geqq 2$$

$$(p-2)(p+1) \geqq 0$$

すなわち $p \geqq 2$ であることが必要である。

逆に，$p \geqq 2$ のとき

$$p^{n-1}(p-1) \geqq 2^{n-1} \geqq 2(-1)^n$$

となり，① は成り立つ。

ゆえに求める p の範囲は

$$p \geqq 2$$

解説

(1) 漸化式は約 10 種類ほどの解法パターンがあり，漸化式を見たら瞬時にどの解法を用いればよいかわかるまで演習するのが望ましい。本問の場合，問題文の誘導がなくとも，両辺を p^{n+1} で割るという発想は必ず思いついてほしい。b_n の一般項を求める際は，先に階差数列の公比が 1 ではないことを必ず確認しよう。

(2) $p^{n-1}(p-1) \geqq 2(-1)^n$ という式を導くまでは簡単な式変形をするだけなので全員にできてほしい。この式の右辺は 2 か -2 しかとれないため，$p \geqq 2$ でこの不等式が成り立つことは容易にわかるであろう。しかし，$p < 2$ でもこの不等式が成り立つ可能性がある。このようなときは必要条件から絞るとよい。つまり，すべての自然数 n で成り立つ必要がある $\Rightarrow$ ある具体的な自然数 n で成り立つ，ということである。今回の場合は，解答のように，$n = 2$ について調べればうまくいく。

さて，解答に記す必要は無いが，なぜ $n = 2$ で調べたかについての説明を付記しておく。まず，不等式 ① がすべての自然数 n で成り立つことを示すには，右辺がより大きい値，すなわち 2 となる場合のみを考えればよい。このとき，① の右辺が正なので，左辺も正となる。よって，$p - 1 > 0$，すなわち $p > 1$ である。したがって，このとき $p^{n-1}(p-1)$ は n について単調増加であるから，最小の n について不等式が成立することを述べれば，他のすべての n についても ① が成り立つ。このように考えれば，$n = 2$ の場合について調べればよいことがわかる。

（大久保佳徳，河合敬宏，沈有程）

2015 年度 北海道大学 前期 数学

3 空間ベクトルと平面

出題範囲	空間ベクトル
難易度	★★☆☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	計算の煩雑な問題であるが，難しい発想は必要なく，定石通りに解くことができる。

解答

(1) 点 C は α 上にあるので，実数 p, q を用いて

$$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} = (p-q, p+q, p+q)$$

とおける。$\vec{a} \perp \vec{c}$ より，$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ であるから

$$(p-q) + (p+q) + (p+q) = 0$$

$$\Leftrightarrow q = -3p$$

$|\vec{c}|^2 = 1$ より

$$(p-q)^2 + (p+q)^2 + (p+q)^2 = 1$$

$q = -3p$ を代入して

$$16p^2 + 4p^2 + 4p^2 = 1$$

$$p^2 = \frac{1}{24}$$

$$\Leftrightarrow (p, q) = \left(\pm\frac{1}{2\sqrt{6}}, \mp\frac{3}{2\sqrt{6}}\right) \quad （複号同順）$$

点 C の x 座標 $p-q$ が正なので

$$(p, q) = \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, -\frac{3}{2\sqrt{6}}\right)$$

ゆえに

$$\mathrm{C}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

(2)

$$s\vec{a}+t\vec{c}=\left(s+\frac{2}{\sqrt{6}}t, s-\frac{1}{\sqrt{6}}t, s-\frac{1}{\sqrt{6}}t\right)$$

各成分を比較して

$$\begin{cases} s+\dfrac{2}{\sqrt{6}}t=-1 \\ s-\dfrac{1}{\sqrt{6}}t=1 \end{cases}$$

これを解いて

$$s=\frac{1}{3},\ t=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &=k\vec{a}+l\vec{c}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &=\left(k+\frac{2}{\sqrt{6}}l-x, k-\frac{1}{\sqrt{6}}l-y, k-\frac{1}{\sqrt{6}}l-z\right)\end{aligned}$$

$\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ より

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\left(k+\frac{2}{\sqrt{6}}l-x\right)+\left(k-\frac{1}{\sqrt{6}}l-y\right)+\left(k-\frac{1}{\sqrt{6}}l-z\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3k=x+y+z$$

$\vec{b}\perp\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ より

$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}=-\left(k+\frac{2}{\sqrt{6}}l-x\right)+\left(k-\frac{1}{\sqrt{6}}l-y\right)+\left(k-\frac{1}{\sqrt{6}}l-z\right)=0$$

$$\Leftrightarrow k-\frac{4}{\sqrt{6}}l=-x+y+z$$

これらを解いて

$$k=\frac{1}{3}(x+y+z),\ l=\frac{\sqrt{6}}{6}(2x-y-z)$$

解説

(1) ベクトルの典型的な問題である。まずは点 C が平面 α 上にあることから，α 上の平行でない 2 つのベクトルを用いて $\vec{c}$ を表す。その後，垂直条件，ベクトルの大きさの条件を用いて変数の値を求める。

(2) 成分を比較するだけである。

(3) まずは $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ の成分表示をして，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直という条件式を立てればよい。ただし，本問では $\vec{a} \perp \vec{c}$ という設定であるため，以下の 別解 のように，成分表示を行わずに $\overrightarrow{\mathrm{PH}} = k\vec{a} + l\vec{c} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ としたまま解くことも可能である。

ベクトルの問題の解法はある程度決まっていて，それを網羅してしまえば，毎回安定して高得点が期待できる。演習が足りないと自覚のある人は，ベクトルの典型的な解法を網羅できるように問題演習をこなしてほしい。

別解

$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = k\vec{a} + l\vec{c} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \perp \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \perp \vec{b}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \vec{a} &= \left(k\vec{a} + l\vec{c} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) \cdot \vec{a} \\ &= k\left|\vec{a}\right|^2 + l\vec{a} \cdot \vec{c} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{a} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \vec{c} &= \left(k\vec{a} + l\vec{c} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) \cdot \vec{c} \\ &= k\vec{a} \cdot \vec{c} + l\left|\vec{c}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{c} \\ &= 0\end{aligned}$$

ここで，$\vec{a} \perp \vec{c}$ より $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$，また $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3}$，$\left|\vec{c}\right| = 1$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \vec{a} &= 3k - (x, y, z) \cdot (1, 1, 1) \\ &= 3k - (x + y + z) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \vec{c} &= l - (x, y, z) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ &= l - \frac{1}{\sqrt{6}}(2x - y - z) \\ &= 0\end{aligned}$$

以上より

$$k = \frac{1}{3}(x + y + z),\ l = \frac{1}{\sqrt{6}}(2x - y - z)$$

別解解説

解答 とは違い，$\vec{a}, \vec{c}$ が垂直であることを利用して解いている。この方法では，k と l に関する式を別々に取り出すことができることに注意しよう。

（大久保佳徳，河合敬宏，沈有程）

2015 年度 北海道大学 前期 数学

4 条件付き確率

出題範囲	場合の数と確率
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	5 問のうちで最も簡単な問題である。この問題は玉の数も試行回数も具体的な数字が与えられていて，試行内容も単純であるので，必ず満点を狙おう。

解答

試行内容を簡略化すると

・取り出した 2 個の玉が同色なら白玉を 1 つ増やす。

・取り出した 2 個の玉が色違いなら赤玉を 1 つ増やす。

となる。

(1) 取り出した 2 個の玉が色違いであればいいので

$$\frac{2\cdot 2}{{}_4C_2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(2) 2 回の試行のうち 1 回が同色，1 回が色違いであればよい。順序は問わないので

$$\frac{2\cdot 2}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_5C_2}+\frac{{}_2C_2+{}_2C_2}{{}_4C_2}\cdot\frac{2\cdot 3}{{}_5C_2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{15}$$

(3) X_1 かつ X_2 となるのは「1 回目が色違い，2 回目が同色」となるときなので，その確率は

$$\frac{2\cdot 2}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

よって，これを (2) と合わせると，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}}=\frac{4}{7}$$

解説

まずは試行内容を簡略化することが，問題を解くうえで一番重要なことである。簡略化してしまえば，(1) は色違いであればよいこと，(2) は同色と色違いが 1 回ずつであればよいことがすぐにわかる。(3) の条件付き確率は，(2) を用いればすぐにわかる。

（大久保佳徳，河合敬宏，沈有程）

2015 年度 北海道大学 前期 数学

5 微積分の応用

出題範囲	微分 (数学Ⅲ) ／積分 (数学Ⅲ)
難易度	★★★☆☆
所要時間	20 分
傾向と対策	部分積分や，定積分で定義された関数の積分を正しく扱えれば解けない問題ではない。(2) で 1 つの条件式を導いたあとに，うまく問題文の条件を利用できるかどうかが，完答できるかどうかの分かれ目となるだろう。

解答

(1)【証明】

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cdot\sin^n\theta\,d\theta \\ &= \Big[-\cos\theta\cdot\sin^n\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\cdot\sin^{n-1}\theta\cos\theta\,d\theta \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(1-\sin^2\theta)\,d\theta \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}d\theta - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}d\theta\end{aligned}$$

移項して

$$(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}d\theta = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}d\theta = \frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}d\theta$$

(証明終)

(2)

$$f(x) = x\int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)\,d\theta - \int_0^x \theta(a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)\,d\theta$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left\{\int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)d\theta + x(a\sin^{n+1}x - \sin^{n-1}x)\right\} - x(a\sin^{n+1}x - \sin^{n-1}x) \\ &= \int_0^x (a\sin^{n+1}\theta - \sin^{n-1}\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

(1) を利用すると

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^{n+1}\theta\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\,d\theta$$
$$= \left(\frac{n}{n+1}a - 1\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\,d\theta$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において $\sin\theta > 0$ なので，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\,d\theta > 0$ である。よって，求める条件は

$$\frac{n}{n+1}a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{n+1}{n}$$

ここで，問題文の条件より

$$a = \frac{n+1}{n} > \frac{3}{2}$$
$$2n + 2 > 3n \ \Leftrightarrow\ n < 2$$

n は自然数なので $n = 1$ であり，このとき $a = 2$

(3)

$$f(x) = \int_0^x (x-\theta)(2\sin^2\theta - 1)\,d\theta$$
$$= \int_0^x (\theta - x)\cos 2\theta\,d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{2}(\theta - x)\sin 2\theta\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \sin 2\theta\,d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}$$

ゆえに

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\cos\pi - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

解説

(1) 部分積分を用いて変形していくと左辺と同じ形が現れるので，移項することで答えが求まるという典型問題である。

(2) $a = \frac{n+1}{n}$ を求める部分までは (1) を利用する。2 変数に対して 1 つの式では値が定まらないが，問題文の初めに $a > \frac{3}{2}$ という条件があることを見落とさないようにしよう。基本的に，問題文には解答に使わない条件が書かれていることはないので，問題を解いていて詰まってしまったときは，まだ使ってない条件がないかどうか確認するクセをつけるとよいだろう。

(3) 部分積分を利用して解けばよい。(2) ができていれば楽に解けるだろう。

（大久保佳徳，沈有程，佐藤賢志郎）