2015 年度 北海道大学 前期 数学

1 直線と放物線

出題範囲	図形と方程式
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	(1)，(2) はそれぞれ接線の方程式を求め，判別式を考えるだけの問題である。ここでは取りこぼしの無いようにしたい。(3) も PQ，RS の傾きが一致しているので計算量は多くない。難なく完答してほしい問題である。

解答

(1) 接線 l の傾きは $\dfrac{a^2-4a^2}{a-(-2a)}=-a$

C_1 について，$y'=2x$ より，l と C_1 の接点を $\left(t,t^2\right)$ とすると

$$2t=-a$$

$$\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}a$$

したがって l の方程式は

$$y-t^2=-a\,(x-t)$$

$$y-\frac{1}{4}a^2=-a\left(x+\frac{1}{2}a\right)$$

$$\Leftrightarrow y=-ax-\frac{1}{4}a^2$$

(2) x の 2 次方程式

$$-\,(x-1)^2=-ax-\frac{1}{4}a^2$$

$$x^2-(a+2)\,x-\frac{1}{4}a^2+1=0 \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

が異なる 2 つの実数解を持つような a の範囲を求めればよい。① の判別式 D を考えて

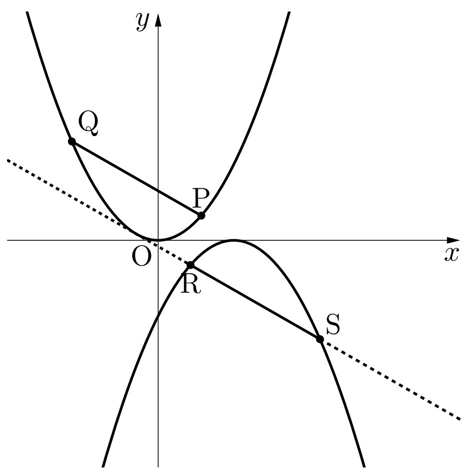
$$D=(a+2)^2-4\left(-\frac{1}{4}a^2+1\right)$$

$$=2a^2+4a>0$$

$$a\,(a+2)>0$$

よって，$a<-2,\ 0<a$

(3) R，S の x 座標をそれぞれ $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とすると，α, β は (2) で求めた範囲のもとで①の 2 実数解であるから，解と係数の関係より



$$\begin{cases} \alpha+\beta = a+2 \\ \alpha\beta = -\dfrac{1}{4}a^2+1 \end{cases}$$

よって

$$(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$$
$$= 2a^2+4a$$

PQ と RS の傾きは等しいので，これらの長さが等しくなる条件は，x 座標の差が等しくなることで，

$$\beta - \alpha = |a-(-2a)| = 3\,|a|$$

すなわち

$$(\beta-\alpha)^2 = 9a^2$$

となればよいから

$$2a^2+4a = 9a^2$$

$$a\,(7a-4) = 0$$

$a \fallingdotseq 0$ より

$$a = \frac{4}{7}$$

解説

PQ と RS の傾きが等しいとき，線分両端の x 座標の差が等しければその長さは一致する。傾き m の直線上にある線分について，両端の x 座標の差が k の場合はその線分の長さは $k\sqrt{1+m^2}$ であるから，傾き m が等しいとき k が等しければ長さは一致するためである。これに気づくことができれば少ない計算量で答えにたどりつくことができる。

（寺内一記，辻啓吾）

2015 年度 北海道大学 前期 数学

2　数列と漸化式

出題範囲	数列
難　易　度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	(2) の場合分けにさえ気をつければ，十分完答の狙える問題である。このように，例外的な場合が存在しないかどうか，確認を怠らないようにすべきである。

解答

(1)

$$a_{n+1}=\frac{1}{p}a_n-(-1)^{n+1}$$

両辺に p^{n+1} をかけて，

$$p^{n+1}a_{n+1}=p^na_n-(-p)^{n+1}$$

$b_n=p^na_n$ とすると

$$b_{n+1}=b_n-(-p)^{n+1}$$

(2) (i) $-p\fallingdotseq 1$ のとき

$n\geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}-(-p)^{k+1}\\&=pa_1-\frac{p^2\{1-(-p)^{n-1}\}}{1-(-p)}\\&=p-\frac{p^2\{1-(-p)^{n-1}\}}{1+p}\\&=\frac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}\end{aligned}$$

$b_1=pa_1=p$ なので，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって

$$p^na_n=\frac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}$$

$$a_n=\frac{1}{1+p}\left(\frac{1}{p^{n-1}}+p(-1)^{n-1}\right)$$

(ii) $-p=1$ のとき

$$b_{n+1}=b_n-1$$

であるので

$$b_n=b_1+(n-1)(-1)=-1-n+1=-n$$

したがって

$$a_n=\frac{b_n}{p^n}=-\frac{n}{(-1)^n}=-n(-1)^n$$

解説

(1) 問題で指示された通りの置き換えを実行するために，与式の両辺に p^{n+1} を掛ける。

(2) (1) で漸化式は得られたので，あとは一般項を求めるだけである。$-p=1$ の場合は，等比数列の和の公式が使えないので場合分けが必要だ。

（大久保佳徳，河合敬宏，沈有程）

2015 年度 北海道大学 前期 数学

3　ベクトルに関する証明

出題範囲	ベクトル
難易度	★★★☆☆
所要時間	30 分
傾向と対策	与えられた条件を図示するときには，場合分けが伴う。自分で正確な図が描けたか，また図をかくときに場合分けが必要なことに気づけたかどうかがポイントである。

解答

(1)【証明】$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

となる。　　(証明終)

(2)【証明】$\angle\mathrm{POB}=\beta,\angle\mathrm{QOA}=\gamma$ とおくと，$0<\alpha<\frac{pi}{2}$，$\angle\mathrm{POA}=\frac{\pi}{2}$ より，$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$

(i) $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$ のとき

$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より

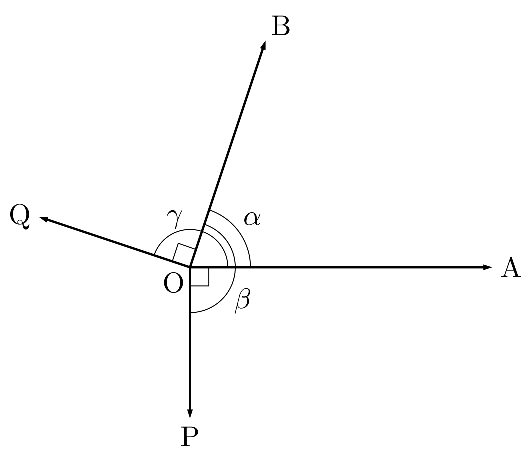
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\beta<0$$

したがって (1) より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}<0$

これと $\angle\mathrm{QOB}=\frac{\pi}{2}$ より，$\gamma=\frac{\pi}{2}+\alpha$

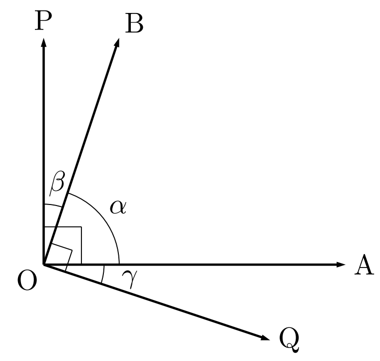
よって

$$\angle\mathrm{POQ}=2\pi-(\beta+\gamma-\alpha)$$
$$=\pi-\alpha$$



(ii) $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ のとき

$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \cos\beta > 0$$

したがって (1) より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} > 0$

これと $\angle\mathrm{QOB} = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$

よって

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{POQ} &= \beta + \gamma - \alpha \\ &= \pi - \alpha\end{aligned}$$

したがって (i)(ii) のいずれの場合でも $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi - \alpha$ であることが示された。 (証明終)

(3)【証明】(2) の考察から常に $\beta = \gamma$ が成り立つので，(1) で得られた式と合わせて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \cos\beta = \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| \cos\gamma$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$$

よって

$$\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}$$

(証明終)

解説

(1) 与えられた条件式と垂直である条件を用いれば，あとは整理するだけである。2 つのベクトルが垂直ならば内積は 0 となることは反射的に思いつけるようにしたい。

(2) P，Q の位置により場合分けが必要である。図を描けば $\beta = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ のとき $\gamma = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$，$\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ のとき $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ であることは容易に想像がつくが，図を描いただけでは正しく説明したことにはならない。そこで，(1) から得た式より，$\cos\beta$ と $\cos\gamma$ の正負が一致することを利用した。

(3) 最終目標がベクトルの絶対値の関係式であり，さらにそれらのベクトルは (1) から内積の関係式を得ている。したがって，この式を変形していくことは自然な発想である。

別解

幾何的考察を必要としない解答を紹介する。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,0)$ とおく。$a>0$ としても一般性を失わない。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,p)$ とおける。

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,b_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(q_1,q_2)$ とおく。三点 O，A，B は一直線上にないので $b_2\neq 0$ である。

(1) より，$a>0$ に注意して，条件は

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\end{cases}\iff\begin{cases}b_1q_1+b_2q_2=0\\ pb_2=aq_1\end{cases}\iff\begin{cases}q_1=\dfrac{p}{a}b_2\\ q_2=-\dfrac{p}{a}b_1\end{cases}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$a>0$ より

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}=\frac{ab_1}{|a|\sqrt{b_1^2+b_2^2}}=\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を $\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\\&=\frac{pq_2}{|p|\sqrt{q_1^2+q_2^2}}\\&=-\frac{\dfrac{p^2}{a}b_1}{|p|\sqrt{\dfrac{p^2}{a^2}b_2^2+\dfrac{p^2}{a^2}b_1^2}}\quad(\text{① より})\\&=-\frac{\dfrac{p^2}{a}b_1}{|p|\left|\dfrac{p}{a}\right|\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\\&=-\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\quad\left(a>0\text{ より，}|p|\left|\frac{p}{a}\right|=\frac{|p|^2}{a}=\frac{p^2}{a}\right)\end{aligned}$$

よって，$\cos\theta=-\cos\alpha$ であり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqq\theta\leqq\pi$ なので

$$\theta=\pi-\alpha$$

(3)

$$\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|} = \sqrt{\frac{q_1^2+q_2^2}{b_1^2+b_2^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{p}{a}b_2\right)^2+\left(\frac{-p}{a}b_1\right)^2}{b_1^2+b_2^2}}$$

$$= \left|\frac{p}{a}\right|$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}$$

別解解説

各ベクトルを成分表示して，与えられた条件を数式化すれば，解答のような場合分けは必要なくなる。絶対値をとるときに，中身が正かどうかの確認を忘れないようにしよう。

（寺内一記，不死原大知）

2015 年度 北海道大学 前期 数学

4　カードの並べ方と確率

出題範囲	場合の数と確率
難易度	★★☆☆☆
所要時間	10 分
傾向と対策	カードの並べ方から確率を求める問題である。何を区別し，何を区別しないのかをしっかり考える必要がある。

解答

(1) 番号 7 のカード 4 枚を 1 セットにして考える。このとき，条件を満たすカードの並べ方は

$$\left(7\text{ 以外のカード } 48 \text{ 枚と } 7 \text{ のカードのセット } 1 \text{ つによる計 } 49 \text{ 枚のカードの並べ方}\right)$$

$$\times\left(7\text{ のカードの } 4 \text{ 枚の枠を順に埋める入れ方}\right)$$

$$=49! \times 4!\ (\text{通り})$$

カード 52 枚の並べ方は 52! 通りあるので，求める確率は

$$\frac{49! \times 4!}{52!} = \frac{1}{5525}$$

(2) 7 のカード 2 枚のセットを X とする。X が 2 つとそれ以外のカード 48 枚，計 50 枚があるとして，条件を満たすカードの並べ方を考える。最初に 2 つの X を区別せずに並べる位置を決め，次に X が並んだ場所における 7 のカード 4 枚の並び順を決めると考えると，求める確率は

$$\left\{\left(\text{X } 2 \text{ つを含む } 50 \text{ 枚のカードの並べ方}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\text{X が並んだ場所における } 7 \text{ のカード } 4 \text{ 枚の並び順}\right)\right\} \div \left(\text{カード } 52 \text{ 枚の並べ方}\right)$$

$$-\left((1)\text{ で求めた } 7 \text{ のカードが } 4 \text{ 枚連続して並ぶ確率}\right)$$

$$=\frac{\frac{50!}{2!}\times 4!}{52!} - \frac{49! \times 4!}{52!} = \frac{24}{5525}$$

解説

本問のように，特定の部分をひとまとまりとして順列を考えたあと，その部分の内部の順列を考える問題は頻出である。確率や順列は比較的完答が容易な問題が多いので，必ず得点できるようにしたい。

(2) では，7 のカード 2 枚のセット 2 つを区別しない，つまりセットが入れ替わったものを数えないようにする

ことで，それぞれのセットにどの 7 を入れて並べるかを考えずに，7 のカード 4 枚の並べ方を別個で考えればよいようにしている。順列を考える問題では，並べるものを区別するかどうかで計算に大きな差が出るのでうまく工夫しよう。

（河合敬宏，沈有程，松岡駿）