平成 30 年度　大学入学共通テスト試行調査 数学 IIB【解答】

問題番号	解答番号	正解	配点	問題番号	解答番号	正解	配点
第 1 問	ア，イ	1, 0	1	第 3 問	アイウ	200	1
	ウ，エ	0, 4	2		エ	5	1
	オ	2	3		オカキ	025	2
	カ	2	1		クケ	24	2
	キ，ク	1, 3	2		コサ	20	2
	ケ，コ，サ，シ，ス，セ	-, 2, 3, 2, 6, 2	3		シスセソ	0013	3
	ソ	2	2		タ	4	3
	タ	7	3		チ	4	3
	チ	1	1		ツ	4	3
	ツ	5	1	第 4 問	ア	4	1
	テ	2	2		イ，ウ，エ	2, 3, 4	2
	ト	1	3		オ	6	1
	ナ	2	3		カ，キ	3, 8	2
	ニ	2,3,4,5	3		ク，ケ，コ	2, 3, 4	2
第 2 問	ア	0	1		サ，シ	3, 0	2
	イ	2	1		スセ，ソ	-4, 1	3
	ウ，エ	1, 3	2		タ，チ，ツ	3, 4, 1	3
	オカキ	575	3		テ，ト，ナ，ニ，ヌ	2, 3, 2, 4, 8	4
	ク，ケ，コ，サ	9,4,7,2	2	第 5 問	ア，イ	1, 2	1
	シスセ	500	2		ウ，エ	1, 2	1
	ソ	4	3		オ，カ	2, 3	2
	タ，チ	3, 3	2		キ，ク，ケ，コ	2, 3, 2, 3	3
	ツテ	18	3		サ，シ	1, 2	2
	ト	1	2		スセ，ソ	-1, 3	3
	ナ	0	3		タ	1	4
	ニ	1, 4, 5	3		チツ	90	2
	ヌ	3	3		テ	1	2

（注）第 1 問，第 2 問は必答。第 3 問〜第 5 問のうちから 2 問選択。計 4 問を解答。

平成 30 年度 大学入学共通テスト試行調査

数学Ⅱ・B

Foresight 現役東大生の個別学習指導
オンライン家庭教師

■ 出題分析

配点	試験時間	大問数	センターとの難易度比較
100 点	60 分	4 題	同程度
センターとの分量比較			
減少 **同程度** 増加	設問数，問題量としては減少したが，文章量が増加。		

＜トピックス＞

- ➢ 確率・統計が大問 3 に移動し，数列が大問 4，ベクトルが大問 5 へ。選択問題であることは今のところ変わらず。
- ➢ 特に大問 2 で出題範囲に変更が多かった。現在の受験生には苦手な分野が多く，学習を深めることが必要になる。
- ➢ 他の単元でも，現行センター試験に比べて問い方に工夫がみられるが，問題の新奇性は乏しい。

■ 全体分析

「思考力を重視する問題構成」を標榜する通り，応用的な問題がいくつか見られるのが鬼門と思われる。数学 II・B は範囲の難易度が特に高いこともあり，現行センター試験ではどの問いもほぼ型にはまった出題で対策がしやすい分野だったが，新テストでは出題範囲や出題順序の改変に加えて，かなり手が出しにくい問題が増え，全体的にやりにくい試験になったといえる。高得点を目指すためにはかなりの理解と処理能力が必要とされるため，学習戦略はしっかりと立て直す必要があるだろう。

■ 大問別分析

※ 難易度は 5 段階表示で，フォーサイトの見解によるものです

問題	出題分野・テーマ	センター試験との相違点・コメント	難易度※
1〔1〕	三角関数	グラフを選択するなどの少々奇抜な問題が出題はされているものの，全体としては現行のセンター試験より少し易しい程度であった。	やや易
1〔2〕	べき乗関数の微積分	現行センター試験では大問 2 で 30 点出題されていた範囲。同じく目新しさはなく，以前よりかなり平易になったといえる。	やや易
1〔3〕	指数・対数	対数目盛に関する応用問題で，これまでにない柔軟な思考力が問われる題材を扱っている。センター試験などではめったに見られない極めて正答率の低い問題が見られたが，全体的な得点のしやすさとしては標準的である。	標準
2〔1〕	軌跡と領域（線形計画法）	現行センター試験ではほぼ問われなかった分野の出題。リード文の細工は表面的で，内容自体は期待される理解度を大幅に超えるものではなかったが，もとが難解な単元であるだけに正答率が伸び悩んだのにも頷ける。	やや易
2〔2〕	軌跡と領域（軌跡）	前の設問に引き続き，旧センター試験ではほとんど姿を見せなかった単元である。試行調査では出来が悪かったが，この単元にしては比較的ひねりは少なかったといえる。新テストではこの分野の対策が必須となるだろうから，大問 2 の両分野の対策が望まれる。	標準
4	数列	現行センター試験の大問 3 にあたる。一見ごく一般的な漸化式の問題に見えるが，解答に必要となる計算力と技術力が大幅に上昇した。	やや難

5	ベクトル	空間ベクトルという点では現行センター試験第 4 問の範囲に一致するが，かなり目新しい題材をもとに出題された。初見の問題に躊躇なく立ち向かう力と，難しいとされる数学 IIB で度量に見合う処理力を身につけることが肝要となるだろう。	標準

■　合格への学習アドバイス

現行センター試験に比べてかなり外見の変わった試験になっている。以下に目立った変更点と予想される変化を 3 点述べるが，試験の対策自体でいえば，数学の出来不出来にかかわらずただ 60 分間の立ち回りを重視すべし，の一言に尽きる。

まず，数学 IA とも共通する特徴であるが，現行のセンター試験に比べて正答率の低い問題がより頻繁にみられるようになっている。特に 1〔3〕の最終問題，4 の最終問題などは，問題別正答率が 1-2%程度となる惨状であり，実際のところ自分が正解を狙うべき学力層にいるのかを考えなければならない。目新しい問題も増え，相当の実力および努力なしには完解を目指すことが困難になったこの試験では，それでも得意教科たる数学で点数を稼ごうという気概のある受験生を除いては，まず時間内の得点効率が最大の勝負の分かれ目といえるだろう。易問と難問がよく分離されたいびつな構成の試験であるために，奇抜で把握しがたい問題には敢えて手を出さず，得点できる問題をまんべんなく狙うような上手な戦略を身につけるのが訓練の目標となりえる。

また，大問 2 に数学 II に含まれる「図形と方程式―軌跡と領域」が出題されたのも，センター試験と比較したときに目立つ特徴である。最近は学習指導要領から除かれたことのない重要単元ではあるが，かなり難解であるだけに多くの数学を苦手とする受験生がうやむやにして切り抜けようとする分野となっており，試行テストの段階では問題のレベルに比べてかなり正答率が低い結果となっている。逆に言えば，この単元は試行テストの段階ではそこまで応用的な問題が出題されているわけではなく，標準的な理解と演習によって他の問題よりも簡単に他受験生をリードすることも可能だろう。この分野に関しては，従来の過去問対策では特に演習が不足してしまうから，市販の参考書なども含めて，万全の備えをもって試験に臨むことが期待される。

一方で，数学 IA や他の教科に比べて，既に話題が尽きている感があるのも事実である。すなわち，2〔1〕や 4 のように，ほとんどの受験生に手が出せない難問ではありながらも，上位大学の理系の二次試験では使い古されているようなテーマも少なくないことから，今回の改革の方針が数学 IIB という教科と親和性が低く，作問者が苦心していることが伺える。数学が難しいと言われている大学を目指す受験生は，むしろ日々の二次試験向けの演習によってかなりのリードがあるはずだから，より一層数学に真面目に取り組む必要が出てきたのではないだろうか。逆に，現行センター試験に比べてパターン認識的な問題は減少しているものの，平易な問題の平易さはむしろセンター試験に比べて増しているから，数学でのリードを目指す必要がない受験生は，高校数学のごく基本的な部分をしっかりと理解してしまえば，自分の目標をわきまえて上手な立ち回りの練習をするのが，無茶なパターン認識よりよほどためになるだろう。

三十六計逃げるに如かずという。解けるべき問題をしっかり解けるように，また解けない問題はそれと見定めて手を出さないように，効率的な得点のため練習することが合格の近道である。

平成 30 年度 大学入学共通テスト試行調査　数学ⅡB

第 1 問

〔1〕

出題範囲	三角関数
難易度	★★☆☆☆
所要時間	得意：4 分　　ふつう：5 分　　苦手：7 分
傾向と対策	三角関数の基本的な知識と，それを用いた定点からの長さの計算問題。これは基本的な問題であるので，できれば時間をかけずに解き終わりたい。苦戦してしまった場合は，教科書に戻って，基本的な知識から復習する必要があるだろう。

(1) $\boxed{ア}$ $\boxed{イ}$ $\boxed{ウ}$ $\boxed{エ}$ **正解は①，⓪，⓪，④**

点 P の座標は $(\cos\theta, \sin\theta)$。

点 Q の座標は $\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right) = (\sin\theta, -\cos\theta)$ 。

(2) $\boxed{オ}$ **正解は②**

AQ の長さ l は

$$l^2 = (\sin\theta - 0)^2 + (-\cos\theta + 1)^2$$
$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\cos\theta + 1$$
$$= 2 - 2\cos\theta$$
$$= 2(1 - \cos\theta)$$
$$= 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

である。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$より $\sin\frac{\theta}{2} \geqq 0$ なので

$$l = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

と表せ，そのグラフは②のようになる。

〔2〕

出 題 範 囲	三次関数
難　易　度	★★☆☆☆
所 要 時 間	10 分
傾向と対策	前半は極値をとる x の値から導関数を求め，積分して元の関数を得る問題。後半はその与えられたグラフと x 軸の位置関係を考え，積分値がどのようになるかを考える問題。それほど計算量は多くないが，グラフを正確に考えることができる必要がある。

(1) $\boxed{\text{カ}}$ 正解は 2

$f(x)$ は 3 次関数なので，その導関数 $f'(x)$ は 2 次関数となる。

$\boxed{\text{キ}}$ $\boxed{\text{ク}}$ 正解は $(x+1)(x-3)$

$f(x)$ は $x=-1$ で極小値，$x=3$で極大値をとるので，導関数 $f'(x)$ は $(x+1)(x-3)$ で割り切れる。

(2) $\boxed{\text{ケ}}$ $\boxed{\text{コ}}$ $\boxed{\text{サ}}$ $\boxed{\text{シ}}$ $\boxed{\text{ス}}$ $\boxed{\text{セ}}$ 正解は $\frac{-2}{3}x^3+2x^2+6x+2$

(1)より $f'(x)=a(x+1)(x-3)$ と置くことができる。

これを展開して不定積分する。積分定数を C とすると，

$$f(x)=\frac{a}{3}x^3-ax^2-3ax+C$$

と書ける。これが点 $(0,2)$ と点 $\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$ を通ることより，以下の 2 式を得ることができる。

$$C=2$$

$$\frac{-a}{3}-a+3a+C=\frac{-4}{3}$$

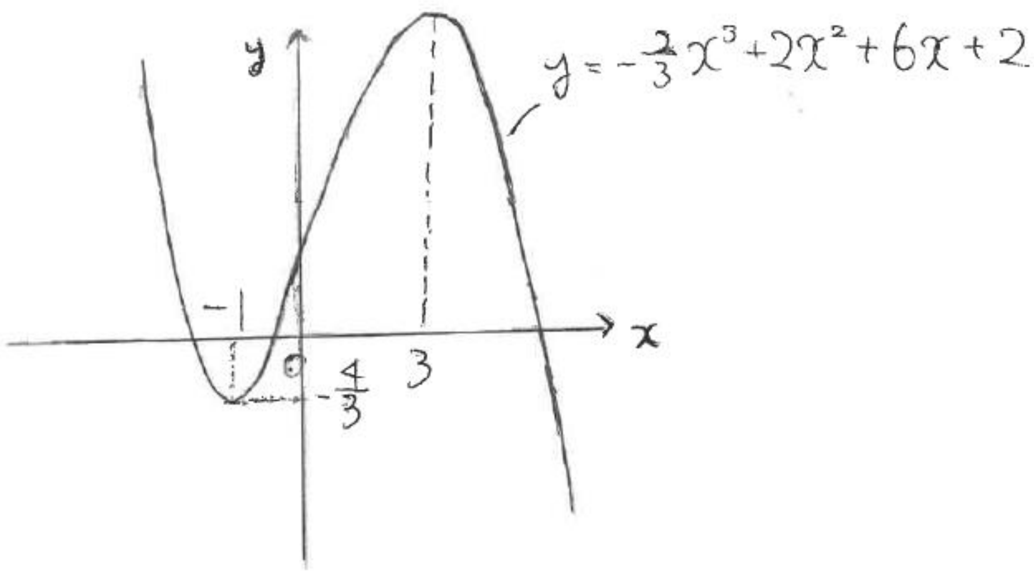
これより $a=-2, C=2$ である。よって，

$$f(x)=\frac{-2}{3}x^3+2x^2+6x+2$$

となる。

(3) $\boxed{\text{ソ}}$ 正解は 2

問題文にある通る点と，$f(x)$ の 3 次の係数が負であることより $f(x)$ のグラフは以下のようになる。



よって，$f(x)$ は x 軸の負の部分と 2 点で交わるので，負の解は 2 個である。

$\boxed{\text{タ}}$　正解は⑦

また，面積が S であらわされる領域では $f(x) \leqq 0$ であり，面積が T であらわされる領域では $f(x) \geqq 0$ であるので，

$$\int_a^c f(x)\,dx = -\int_a^b -f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$= -S + T$$

となる。

〔3〕

出題範囲	対数
難易度	★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	「対数物差し」という目新しい題材をあつかった問題。慌ててしまうと，問題の意味を理解するのが困難になってしまうので，落ち着いて問題文をよく読んでほしい。目新しい題材ではあるが，問題は対数の基本的な性質を理解していれば解くことができる。教科書に書いてあるような基本的な性質などをしっかりと抑えている必要があるであろう。

(1) チ　ツ　**正解は①，⑤**

$\log_{10} 2 = 0.3010$ のとき，$10^{0.3010} = 2$ となる。このとき，

$$10 = (10^{0.3010})^{\frac{1}{0.3010}} = 2^{\frac{1}{0.3010}}$$

となる。

(2)(ⅰ) テ　**正解は②**

$$\log_{10} 4 = 2\log_{10} 2$$

であるから，

$$\log_{10} 4 - \log_{10} 3 < \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{10} 4 - \log_{10} 3}{4-3} < \frac{\log_{10} 2 - \log_{10} 1}{2-1}$$

となる。よって 3 の目盛りと 4 の目盛の間隔は 1 の目盛りと 2 の目盛の間隔より小さくなる。

(ⅱ) ト　**正解は①**

与えられた条件より

$$\log_{10} a - \log_{10} 2 = \log_{10} b$$

という関係が成り立つので，

$$\log_{10} \frac{a}{2} = \log_{10} b$$

$$\therefore a = 2b$$

となる。

（iii）$\boxed{\text{ナ}}$　正解は②

与えられた条件より

$$c\log_{10}2=\log_{10}d$$

という関係が成り立つので，

$$2^c=d$$

となる。

（iv）$\boxed{\text{ニ}}$　正解は②，③，④，⑤

⓪：足し算を行うことはできない。

①：引き算を行うこともできない。

②：対数ものさし A の 4 の目盛りに対数ものさし B の 1 の目盛りを合わせて，対数ものさし B が 13 の目盛の時の対数ものさし A の値を読み取ればよい。

③：対数ものさし A の 9 の目盛りに対数ものさし B の 1 の目盛りを合わせて，対数ものさし A が 63 の目盛の時の対数ものさし B の値を読み取ればよい。

④：対数ものさし A の 1 の目盛りに対数ものさし C の 0 の目盛りを合わせて，対数ものさし C が 4 の目盛の時の対数ものさし A の値を読み取ればよい。

⑤：対数ものさし A の 1 の目盛りに対数ものさし C の 0 の目盛りを合わせて，対数ものさし A が 64 の目盛の時の対数ものさし C の値を読み取ればよい。

平成 30 年度 大学入学共通テスト試行調査　数学ⅡB

第 2 問

〔1〕

出題範囲	線型計画法
難易度	★★☆☆☆
所要時間	得意：4 分　　ふつう：6 分　　苦手：9 分
傾向と対策	食品を題材とした線形計画法の問題。難易度は標準的であり，一度このような問題を見たことがあれば解法を思いつくことはできたのではないだろうか。焦らず，落ち着いてグラフを描画することができれば，求める値を導くことができるはずである。

(1)(ｉ) ア イ **正解は⓪，②**

問題文に与えられた条件よりエネルギー量についての条件は，

$$200x+300y \leqq 1500$$

であり，脂質についての条件は，

$$4x+2y \leqq 16$$

である。

(ⅱ) ウ エ **正解は①，③**

それぞれの (x,y) の値を上の式に代入して，条件を満たしているかを確認するのみである。

(ⅲ) オ カ キ ク ケ コ サ **正解は 575，$\left(\frac{9}{4},\frac{7}{2}\right)$**

食べる量の合計は $100x+100y$ であるから，$100x+100y$ が最大となる時を求める。二つの条件式の両方を満たすような (x,y) の中で

$$100x+100y=k$$

としたときの k の値の最大値を求める。また，そのときの (x,y) の値を求める。これはグラフにすると以下のようにな

るので，求める最大値は

$$k = 575$$

また，そのときの (x, y) の値は $\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{2}\right)$ である。

シ　ス　セ　ソ　**正解は 500，4**

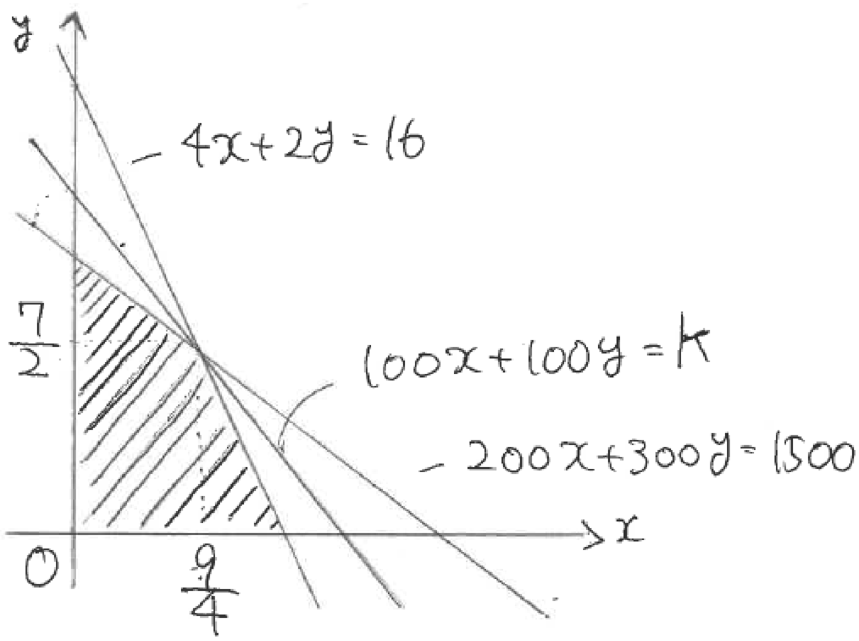
x，y が整数の時，各 x の値に対して，下のグラフの範囲内で$100x + 100y$ が最大となる y の値を考えると，

$$(x, y) = (0,5), (1,4), (2,3), (3,2)$$

の時であり，このとき

$$100x + 100y = 500$$

である。



(2)　タ　チ　ツ　テ　**正解は 3, 3, 18**

(1)と同じように条件を考えると，以下の二つの条件の下で，

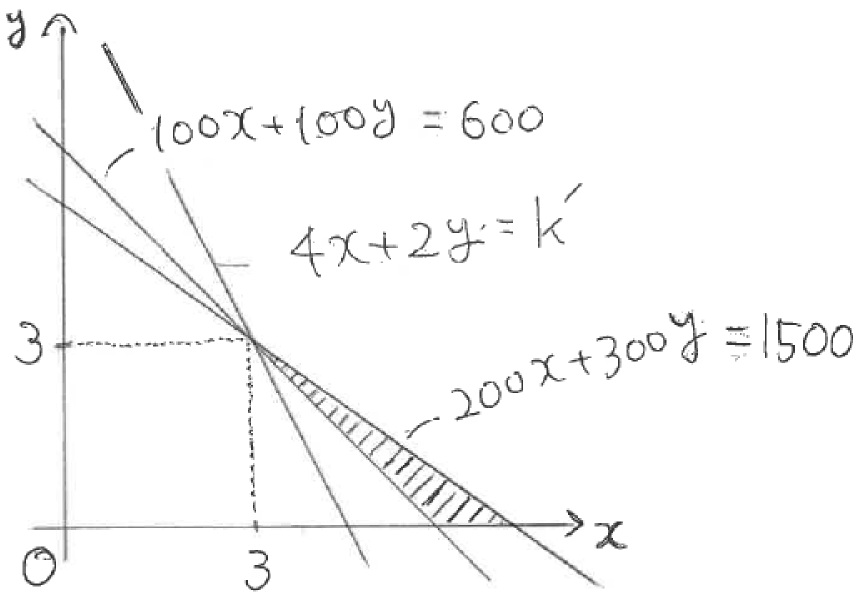
$$4x + 2y = k'$$

の最小値を求める。また，その時の(x, y)の値を求める。

$$100x + 100y \geqq 600$$

$$200x + 300y \leqq 1500$$

これをグラフにすると以下のようになるので最小値は 18。また，その時の (x, y) の値は $(3,3)$ である。



〔2〕

出題範囲	軌跡と領域
難易度	★★★☆☆
所要時間	得意：6 分　　ふつう：8 分　　苦手：10 分
傾向と対策	(1)はある定点と放物線とを動く点の中点の軌跡を求める問題。点 A の座標が段々と文字に入れ替わっていくにつれ，問題の難易度が上がった。(iii)は直感的に解くこともできるであろうが，きちんと論証すると少し手間がかかってしまうかもしれない。(2)はオリンピックの円が軌跡となる場合の元の点の軌跡を考える問題。中央の円のみに着目すればよい。

(1)(i) $\boxed{\text{ト}}$　**正解は①**

点 P は $y=x^2$ 上にある点なので，$\mathrm{P}(t,t^2)$ と置くことができる。すると点 A の座標が $(0,-2)$ であることから，点 M (x,y) の座標は $\left(\frac{t}{2},\frac{t^2-2}{2}\right)$ と書ける。つまり，

$$x=\frac{t}{2},\quad y=\frac{t^2-2}{2}$$

と書けるので，これからパラメータ t を消去すると，

$$y=2x^2-1$$

となる。

(ii) $\boxed{\text{ナ}}$　**正解は⓪**

点 A の座標が $(p,-2)$ であるとき，同様に考えると，

$$x=\frac{t+p}{2},\quad y=\frac{t^2-2}{2}$$

となり，これから同様にパラメータ t を消去すると，

$$y=2\left(x-\frac{p}{2}\right)^2-1$$

となるので，これは(i)の軌跡を x 軸方向に $\frac{1}{2}p$ だけ平行移動したものとなる。

(iii) $\boxed{\text{ニ}}$　**正解は①，④，⑤**

点 A の座標が (p,q) であるとき，同様に考えると，

$$x = \frac{t+p}{2},\quad y = \frac{t^2+q}{2}$$

となり，これから同様にパラメータ t を消去すると，

$$y = \frac{1}{2}(2x-p)^2 + \frac{1}{2}q$$

となる。これと $y = x^2$ を連立した時の x の実数解の個数が求める共有点の個数となる。

$$x^2 = \frac{1}{2}(2x-p)^2 + \frac{1}{2}q$$

$$2x^2 - 4px + p^2 + q = 0$$

ここで上の式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = 4p^2 - 2(p^2+q)$$

$$= 2(p^2 - q)$$

となる。

特に，$q = 0$のとき

$$\frac{D}{4} = 2p^2$$

となるので，共有点の個数は $p = 0$ のときのみ 1 個，その他の時は 2 個となる。

また，判別式より $q < p^2$ のとき共有点は 2 個，$q = p^2$ のとき共有点は 1 個，$q > p^2$ のとき共有点は 0 個となる。

(2) $\boxed{\text{ヌ}}$ **正解は③**

中心を点 O とする半径 2 の円が中点の軌跡であるので，もとの円 C は中心が点 O の半径 4 の円である。よって，その方程式は

$$x^2 + y^2 = 16$$

となる。

平成 30 年度 大学入学共通テスト試行調査　数学ⅡB

第 4 問

出題範囲	数列
難易度	★★★★☆
所要時間	得意：16 分　　ふつう：20 分　　苦手：24 分
傾向と対策	(1),(2)までは解法の方針が示してあり，割と取り組みやすい数列の標準的な問題であったように思われる。(3)で(2)において求めた方針とは別の解法で同じ問題をとかせようとするのは目新しいと感じられる。この解法は普段から問題演習で慣れていないととっさに思いつくのは難しかったのではないだろうか。(4)はそのどちらの方針でもよいので，一般項を求める問題。(5)はより複雑になった数列の一般項を求める問題。これを一つ目の解法で行うのは計算量的に困難であるので，二つ目の方針に則って，落ち着いて計算したい。

(1)(ｉ) $\boxed{\text{ア}}$　**正解は 4**

問題文にあるように変形したものを展開すると，

$$a_{n+1} = 3a_n - 2k$$

となり，これと与えられた漸化式を比較すると，

$$2k = 8$$

$$k = 4$$

となる。

(ⅱ) $\boxed{\text{イ}}$ $\boxed{\text{ウ}}$ $\boxed{\text{エ}}$　**正解は $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$**

$$a_{n+1} - 4 = 3(a_n - 4)$$

より，

$$a_n - 4 = 3^{n-1}(a_1 - 4)$$

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$$

となる。

(2)(ｉ) $\boxed{\text{オ}}$　**正解は 6**

$$p_1 = b_2 - b_1$$

であり，

$$b_2 = 3b_1 - 8 + 6$$

$$= 10$$

なので，

$$p_1 = 10 - 4$$

$$= 6$$

となる。

（ⅱ） $\boxed{カ}$ $\boxed{キ}$ **正解は** $p_{n+1} = 3p_n - 8$

問題文中のように階差数列を考えると，

$$p_{n+1} = b_{n+2} - b_{n+1}$$

なので，

$$p_{n+1} = \{3b_{n+1} - 8(n+1) + 6\} - (3b_n - 8n + 6)$$

$$= 3(b_{n+1} - b_n) - 8(n+1) - 8n$$

$$= 3p_n - 8$$

となる。

（ⅲ） $\boxed{ク}$ $\boxed{ケ}$ $\boxed{コ}$ **正解は** $p_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$

これは(1)のa_nとおなじ漸化式であるので，同様に解いて，

$$p_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$$

となる。

(3)（ⅰ） $\boxed{サ}$ $\boxed{シ}$ **正解は③，⓪**

$$b_{n+1} = 3b_n - 8n + 6$$

を定数 s，t を用いて，

$$b_{n+1}+s(n+1)+t=3(b_n+sn+t)$$

と置くことができる。ここで，

$$q_n=b_n+sn+t$$

と置くと，

$$q_{n+1}=3q_n$$

とすることができる。

（ii） ス セ ソ 正解は $s=-4$，$t=1$

元の漸化式と，s，t を用いて表した漸化式において，n の係数と定数項を比較することによって，以下の 2 式を得ることができる。

$$2s=-8,\quad -s+2t=6$$

これを解いて，

$$s=-4,\quad t=1$$

を得る。

(4) タ チ ツ **正解は** $b_n=3^{n-1}+4n-1$

まず(2)の解法で求める。p_n の一般項は，

$$p_n=2\cdot 3^{n-1}+4$$

であるから，

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=p_n\\&=2\cdot 3^{n-1}+4\end{aligned}$$

であるので，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)$$

$$= 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(2 \cdot 3^{k-1} + 4)$$

$$= 4 + 2 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} + 4(n - 1)$$

$$= 3^{n-1} + 4n - 1$$

となる。

別解として，(3)の方法でも求めてみる。q_n の一般項は，

$$q_n = 3^{n-1}q_1$$

であり，

$$q_1 = b_1 - 4 + 1$$

$$= 1$$

であるから，

$$q_n = 3^{n-1}$$

となる。よってb_nの一般項は，

$$b_n = 3^{n-1} + 4n - 1$$

となる。

(5) $\boxed{テ}$ $\boxed{ト}$ $\boxed{ナ}$ $\boxed{ニ}$ $\boxed{ヌ}$ **正解は** $c_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 2n^2 + 4n + 8$

等比数列にする方法で求める。階差数列をとる方法はここでは非常に面倒である。

$$c_{n+1} = 3c_n - 4n^2 - 4n - 10$$

という数列を，定数 α，β，γ を用いて，以下のように書き換える。

$$c_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = 3(c_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma)$$

これと元の漸化式との係数を比較すると，以下の関係が成り立つ。

$$2\alpha = -4,\quad -2\alpha + 2\beta = -4,\quad -\alpha - \beta + 2\gamma = -10$$

これより，それぞれの係数を求めると，以下のようになる。

$$\alpha = -2,\ \beta = -4,\ \gamma = -8$$

ここで，$r_n = c_n - 2n^2 - 4n - 8$ とすると，

$$r_{n+1} = 3r_n$$

となり，

$$r_1 = c_1 - 4 - 4 - 10$$

$$= 2$$

であることとあわせて，

$$r_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

であるので，

$$c_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 2n^2 + 4n + 8$$

となる。

平成 30 年度 大学入学共通テスト試行調査　数学 II B

第 5 問

出題範囲	ベクトル
難易度	★★★☆☆
所要時間	得意：12 分　　ふつう：15 分　　苦手：18 分
傾向と対策	主に内積の性質を利用して角度を求める問題。第 4 問に引き続き方針を二つ示し，それぞれべつの解法を用いるという点が目新しい。だが，冷静に解いていけばそれほど困る問題はないはずであるので，様々な解法に常日頃から慣れておく必要があるであろう。

(1)(i) $\boxed{ア}$ $\boxed{イ}$ $\boxed{ウ}$ $\boxed{エ}$ 　**正解は $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$**

線分 AB の中点が M であるので，

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

である。また，線分 CD の中点が N なので，

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})$$

である。また，六つの面がすべて正三角形であることより，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2}$$

である。

(ii) $\boxed{オ}$ $\boxed{カ}$ 　**正解は $\frac{2}{3}$**

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CN} = \vec{a} \cdot \left(\frac{-1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right)$$

$$= 0$$

である。また，

$$\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM}$$

とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}}=\vec{a}\cdot\left(\frac{k}{2}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)$$

$$=\frac{k}{2}+\frac{k}{4}-\frac{1}{2}$$

であり，これが上で示した通り 0 に等しいことから，

$$\frac{k}{2}+\frac{k}{4}-\frac{1}{2}=0$$

これを解いて

$$k=\frac{2}{3}$$

である。

(iii) $\boxed{キ}$ $\boxed{ク}$ $\boxed{ケ}$ $\boxed{コ}$ **正解は** $\vec{d}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$

方針１について，線分 CD の中点が N なので，

$$\vec{d}=\vec{c}+2\overrightarrow{\mathrm{CN}}$$

と表すことができ，(1)より

$$\overrightarrow{\mathrm{CN}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$$

であるから，

$$\vec{d}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$$

$$\vec{d}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$$

となる。

$\boxed{サ}$ $\boxed{シ}$ **正解は** $\frac{1}{2}$

方針２について，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$$

であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2=\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}\left|\vec{d}\right|^2+\frac{1}{2}(\vec{c}\cdot\vec{d})$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta$$

となる。

(iv) $\boxed{\text{ス}}$ $\boxed{\text{セ}}$ $\boxed{\text{ソ}}$ **正解は** $\frac{-1}{3}$

方針１を用いる場合：

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)$$

$$=\frac{-1}{3}$$

であることと,

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=\cos\theta$$

より,

$$\cos\theta=\frac{-1}{3}$$

となる。

方針２を用いる場合：

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|^2=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{1}{2}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

$$=\frac{3}{4}$$

であることと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

であることより,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$\cos\theta=\frac{-1}{3}$$

となる。

(2) (i) $\boxed{\text{タ}}$ **正解は①**

(1)(ⅳ)の方針２のように考えると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|^2 = \frac{1}{2}(1+\cos\beta)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}$$

と表せることより，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos\beta)$$

したがって

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta) = 1$$

という関係式が成り立つ。

(ⅱ) $\boxed{\text{チ}}$ $\boxed{\text{ツ}}$ **正解は** $\alpha = 90°$

$\alpha = \beta$ のとき，

$$(1+\cos\alpha)^2 = 1$$

$$\cos\alpha = 0$$

$$\alpha = 90°$$

である。

$\boxed{\text{テ}}$ **正解は①**

このとき，点 N と点 M は一致し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

$$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$$

$$\vec{d} = \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$$

と表せ，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の和が 1 になることより，点 D は平面 ABC 上にある。