# 2020 年度 センター試験 本試験 数学ⅡB 【解答】

| 問題番号 | 解答番号 | 正解 | 配点 | 問題番号 | 解答番号 | 正解 | 配点 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 問 | ア，イ，ウ | 3，2，3 | 2 | 第 3 問 | ク，ケ，コ | 2，1，1 | 2 |
| | エ | 3 | 2 | | サ，シ，ス，セ | 1，6，1，2 | 2 |
| | オ，カ，キ，ク | 2，3，5，3 | 3 | | ソ，タ，チ | 2，3，1 | 2 |
| | ケコ | 12 | 2 | | ツ，テ，ト | 3，1，4 | 2 |
| | サ，シ | 4，5 | 2 | | ナ，ニ，ヌ | 1，2，2 | 2 |
| | ス，セ | 3，5 | 2 | | ネ，ノ，ハ | 1，0，0 | 1 |
| | ソ | 3 | 2 | | ヒ | 1 | 2 |
| | タチ | 11 | 3 | 第 4 問 | ア，イ | 3，6 | 2 |
| | ツテ | 13 | 2 | | ウ，エ | 4，3 | 2 |
| | トナニ | −36 | 2 | | オカ | 36 | 2 |
| | ヌ，ネノ | 2，10 | 2 | | キク，ケ | −2，3 | 1 |
| | ハ，ヒフ | 3，−4 | 2 | | コ | 1 | 1 |
| | ヘ | 7 | 2 | | サ，シ | 2，6 | 2 |
| | ホ | 5 | 2 | | ス，セ，ソタ | 2，2，−4 | 1 |
| 第 2 問 | ア，イ | 2，2 | 2 | | チ | 3 | 2 |
| | ウ | 1 | 2 | | ツテ | 30 | 2 |
| | エ，オ，カ | 2，4，2 | 2 | | ト，ナ，ニ，ヌ，ネ，ノ | 1，2，2，1，2，2 | 2 |
| | キ，ク | 4，1 | 2 | | ハヒ | 60 | 1 |
| | ケ，コ | 0，2 | 3 | | フ | 3 | 1 |
| | サ，シ | 2，1 | 2 | | ヘ，ホ | 4，3 | 1 |
| | ス | A | 2 | 第 5 問 | ア，イ | 1，4 | 2 |
| | セ，ソ | 3，3 | 3 | | ウ，エ | 1，2 | 2 |
| | タ | 1 | 2 | | オ，カ | 7，4 | 2 |
| | チ，ツ | 1，3 | 3 | | キクケ | 240 | 2 |
| | テ，ト，ナ，ニ，ヌ | 2，4，2，1，3 | 3 | | コサ | 12 | 2 |
| | ネ，ノ | 2，3 | 3 | | シス | 02 | 2 |
| | ハ，ヒフ | 2，27 | 1 | | セ | 2 | 2 |
| 第 3 問 | ア | 6 | 2 | | ソ | 6 | 2 |
| | イ | 0 | 1 | | タチ | 60 | 1 |
| | ウ，エ，オ | 1，1，2 | 2 | | ツテ | 30 | 1 |
| | カ | 3 | 1 | | トナ，ニ | 44，1 | 1 |
| | キ | 1 | 1 | | ヌネ，ノ | 55，9 | 1 |

（注）第 1 問，第 2 問は必答。第 3 問～第 5 問のうちから 2 問選択。計 4 問を解答。

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し、無断転載・引用を禁止します。

# 2020 年度 センター試験 本試験 数学ⅡB

## 第 1 問

### 〔1〕

| | |
|---|---|
| 出題範囲 | 三角関数 |
| 難易度 | ★★☆☆☆ |
| 所要時間 | 得意：6 分　　ふつう：7 分　　苦手：8 分 |
| 講評 | 三角関数の基本事項および解と係数の関係の知識が問われる問題であった。つまずいた人は確認しておこう。 |

(1) ア　イ　ウ　**正解は $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 3**

加法定理を用いて

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cos\theta-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{3}{2}\sin\theta$$

エ　**正解は 3**

①式に上の結果を代入して整理すると

$$\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta<0$$

三角関数の合成公式を用いて

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)<0$$

オ　カ　キ　ク　**正解は $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ をふまえ

$$\pi<\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi$$

$$\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$$

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

ケコ　**正解は 12**

解と係数の関係より

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5} \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{25} \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑥について，両辺 2 乗すると

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\frac{7}{5}\right)^2$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いて整理すると

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$$

これを⑦と比較して

$$\frac{k}{25}=\frac{12}{25}$$

$$k=12$$

ス　セ　**正解は $\frac{4}{5}$，$\frac{3}{5}$**

与えられた 2 次方程式に $k=12$ を代入すると

$$25x^2-35x+12=0$$

$$(5x-4)(5x-3)=0$$

$\sin\theta \geqq \cos\theta$ をふまえ

$$\sin\theta=\frac{4}{5},\cos\theta=\frac{3}{5}$$

セ　**正解は ③**

$\cos\theta=\frac{3}{5}=0.6$ ，$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.7\ldots$ ，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=0.5$ より

$$\cos\frac{\pi}{3}<\cos\theta<\cos\frac{\pi}{4}$$

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta$ はこの範囲で $\theta$ について単調減少だから

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$$

が成り立つ。

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

〔2〕

| | |
|---|---|
| 出題範囲 | 指数・対数 |
| 難易度 | ★★☆☆☆ |
| 所要時間 | 得意：5 分　　ふつう：6 分　　苦手：7 分 |
| 講評 | 前半は対称式，交代式を用いた式変形が問われる問題であった。典型的なパターンなので今一度やり方を確認しておこう。<br>後半は指数・対数の基本事項を確認する問題であった。基本事項に基づいて式変形をすれば正解にたどり着くので落ち着いて解答したい。 |

(1) タチ　　**正解は 11**

$$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)^2+2$$

$$=(-3)^2+2$$

$$=11$$

ツテ　　**正解は 13**

$$\left(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}\right)^2=t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}+2$$

$$=11+2$$

$$=13$$

$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}>0$ より，

$$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{13}$$

トナニ　　**正解は −36**

$$t-t^{-1}=\left(t^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(t^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$=\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)\left(t^{\frac{2}{3}}+1+t^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$=-3\cdot 12$$

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

$$= -36$$

あるいは $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}$ の 3 乗から似た形の式が得られることを利用してもよい。

$$\left(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = (t - t^{-1}) + 3\left(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$(-3)^3 = (t - t^{-1}) + 3(-3)$$

$$t - t^{-1} = 36$$

(2) ヌ ネノ ハ ヒフ **正解は 2, 10, 3, −4**

底の変換公式を用いて変形する。②について

$$\log_3 x\sqrt{y} \leqq 5$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 y \leqq 5$$

$\log_3 x = X, \log_3 y = Y$ を代入して整理すると

$$2X + Y \leqq 10 \quad \cdots ④$$

③について

$$\log_{81} \frac{y}{x^3} \leqq 1$$

$$\frac{1}{4}(\log_3 y - 3\log_3 x) \leqq 1$$

$\log_3 x = X, \log_3 y = Y$ を代入して整理すると

$$3X - Y \geqq -4 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

ヘ **正解は 7**

④ × 3 + ⑤ × (−2) より，不等号の向きに注意して $Y$ について整理すると

$$Y \leqq \frac{38}{5}$$

よって $Y$ のとりうる最大の整数の値は 7 である。

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

ホ　**正解は 5**

④，⑤に $Y = 7$ を代入して $X$ について整理すると

$$1 \leqq X \leqq \frac{3}{2}$$

$\log_3 x = X$ より，

$$1 \leqq \log_3 x \leqq \frac{3}{2}$$

底が 1 より大きいことをふまえ $x$ について整理すると

$$3 \leqq x \leqq 3^{\frac{3}{2}}$$

$$3 \leqq x \leqq \sqrt{27}$$

よって $x$ のとりうる最大の整数の値は 5 である。

（柴田優里，小林新九郎）

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

# 2020 年度 センター試験 本試験 数学ⅡB

## 第 2 問

| | |
|---|---|
| 出題範囲 | 微分・積分 |
| 難易度 | ★★☆☆☆ |
| 所要時間 | 得意：8 分　　ふつう：9 分　　苦手：10 分 |
| 講評 | 典型的な微分の求積問題だった。問題文の誘導に沿って行けば難なく解ける内容だったかと思われる。公式を活用して計算時間の短縮とケアレスミスの防止を図ろう。 |

(1) ア　イ　ウ　**正解は　$2t+2$ , 1**

$g(x)=x^2+2x+1$ とすると $g'(x)=2x+2$ より $g'(t)=2t+2$

よって $l$ の方程式は

$$y-(t^2+2t+1)=(2t+2)(x-t)$$

整理して

$$y=(2t+2)x-t^2+1 \qquad \cdots\cdots①$$

エ　オ　カ　キ　ク　**正解は　$2s-4a+2$ , $4a^2+1$**

$f(x)$ についても同様。$f'(x)=2x-(4a-2)$ より，

$$y-\{s^2-(4a-2)s+4a^2+1\}=\{2s-(4a-2)\}(x-s)$$

整理して

$$y=(2s-4a+2)x-s^2+4a^2+1 \qquad \cdots\cdots②$$

ケ　コ　　**正解は　0, 2**

①，②の係数，定数項を比較して

$$\begin{cases} 2t+2=2s-4a+2 \\ -t^2+1=-s^2+4a^2+1 \end{cases}$$

整理して

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

$$\begin{cases} t = s-2a \\ -t^2 = -s^2 + 4a^2 \end{cases}$$

$-s^2 + 4a^2 = (-s + 2a)(s + 2a) = -t(t + 2a)$ より,

$$-t^2 = -t(t + 2a)$$

$$2at = 0$$

$a > 0$ をふまえ

$$t = 0$$

$$s = t + 2a = 2a$$

サ　シ　**正解は $2x + 1$**

先ほど求めた $s, t$ を①もしくは②に代入することで得られる。

(2) ス　**正解は $a$**

$C, D$ の方程式から $y$ を消去して

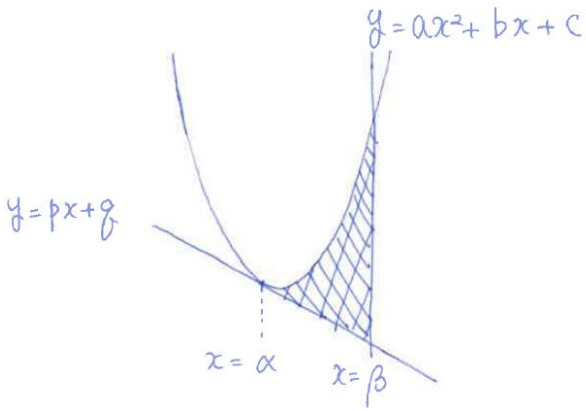
$$x^2-(4a-2)x + 4a^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$x$ について整理すると

$$x = a$$

セ　ソ　**正解は $\frac{a^3}{3}$**

一般に下図網掛け部で囲まれる面積は $\frac{1}{3}|\alpha - \beta|^3$ で表される。




©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

直接計算すると

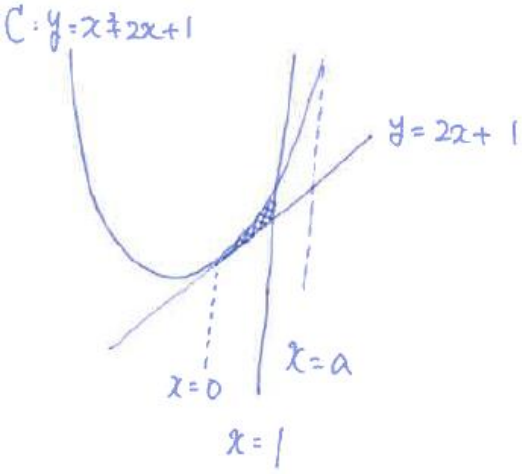
$$S = \int_0^a (x^2 + 2x + 1 - 2x - 1)\, dx$$

$$= \int_0^a x^2\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{a^3}{3}$$

(2) タ チ ツ 正解は 1, $\frac{1}{3}$




$a$ によって被積分関数が変わるので場合分けが必要である。

$C, D$ の交点の $x$ 座標が $x = a$ であることをふまえ，$a > 1$ のとき

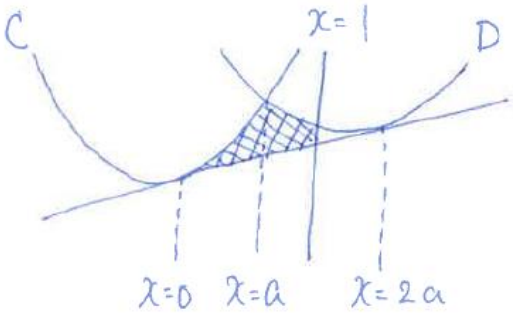
求める面積は右図網掛け部で，

$$T = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^3$$

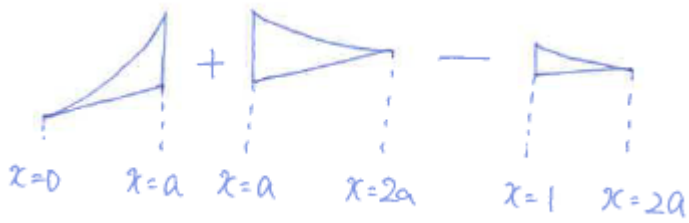
$$= \frac{1}{3}$$

テ ト ナ ニ ヌ 正解は $-2a^3 + 4a^2 - 2a + \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき求める面積は右図網掛け部。




これを以下のように分けてそれぞれについて計算する。




©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

$$T = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^3 + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2a - a)^3 - 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2a - 1)^3$$

$$= \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{1}{3}(8a^3 - 12a^2 + 6a - 1)$$

$$= -2a^3 + 4a^2 - 2a + \frac{1}{3}$$

直接計算すると

$$T = \int_0^a x^2\,dx + \int_a^1 \{x^2 - (4a - 2)x + 4a^2 + 1 - 2x - 1\}\,dx$$

$$= \int_0^a x^2\,dx + \int_a^1 (x^2 - 4ax + 4a^2)\,dx$$

$$= \frac{a^3}{3} + \left[\frac{x^3}{3} - 2ax^2 + 4a^2x\right]_a^1$$

$$= -2a^3 + 4a^2 - 2a + \frac{1}{3}$$

| ネ | ノ | ハ | ヒ | フ |
|---|---|---|---|---|

正解は $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{27}$

$$U = 2T - 3S$$

$$= -5a^3 + 8a^2 - 4a + \frac{2}{3}$$

を $U(a)$ として， $a$ について微分すると

$$U'(a) = -15a^2 + 16a - 4$$

$$= -(5a - 2)(3a - 2)$$

増減表は

| $a$ | $\frac{1}{2}$ | … | $\frac{2}{3}$ | … | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $U'(a)$ | 0 | + | 0 | − | 0 |
| $U(a)$ | $\frac{1}{24}$ | ↗ | $\frac{2}{27}$ | ↘ | $-\frac{1}{3}$ |

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

よって $a = \dfrac{2}{3}$ の時に最大値をとる。

$$U\left(\frac{2}{3}\right) = -5 \cdot \frac{8}{27} + 8 \cdot \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{27}$$

（柴田優里，小林新九郎）

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

# 2020 年度 センター試験 本試験 数学ⅡB

## 第 3 問

| | |
|---|---|
| 出題範囲 | 数列 |
| 難易度 | ★★★☆☆ |
| 所要時間 | 得意：6 分　　ふつう：7 分　　苦手：8 分 |
| 講評 | 指数関数混じりの漸化式の一般項を求める問題であった。丁寧な誘導に従えば問題なく解答できる内容だろう。階差数列や部分分数分解の理解も問題を解く上で重要だった。最後の余りを求める問題では合同式を扱うと簡便に済ませられる。 |

(1) ア　**正解は 6**

与えられた漸化式に $n=1$ を代入することで求める。

(2) イ　**正解は 0**

$a_1=0$ であることから従う。

ウ　エ　オ　カ　**正解は** $\dfrac{\mathbf{1}}{(n+\mathbf{1})(n+\mathbf{2})}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}\{3a_n+3^{n+1}-3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$$

$$=\frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

キ　**正解は** $\left(\dfrac{\mathbf{1}}{n+\mathbf{1}}-\dfrac{1}{n+2}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ について，分数の差を用いて表せるような組を見つける（部分分数分解）。

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

となることより従う。

ク　ケ　コ　**正解は** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n-\mathbf{1}}{n+\mathbf{1}}\right)$

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

サ　シ　ス　セ　**正解は** $\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}=\frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ソ　タ　チ　**正解は** $\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

以上の計算結果を代入する。

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)$$

$$=0+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3)　ツ　テ　ト　ナ　ニ　ヌ　**正解は** $3^{n-1}(n^2-4)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

(2)で得られた式を $a_n$ の式に戻す。

$$b_n=\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}=\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

両辺に $3^n(n+1)(n+2)$ をかけて

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

$$a_n = 3^{n-1}(n+2)(n-2) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$= 3^{n-1}(n^2-4) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(4) ネ ノ ハ ヒ **正解は 1, 0, 0, 1**

3 で割ったあまりについて考えるので，3 で割り切れる数（3 の倍数）は無視してよく，$\{a_n\}$ の第 2 項に表れる $n$ の多項式について考えれば十分である。以下合同式の法を 3 とする。

$$a_{3k} = 3^{3k-1}\{(3k)^2-4\} + \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}$$

$$\equiv \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}$$

分子の整数の積の部分は，どちらか一方は必ず偶数となることから $a_{3k}$ は整数である。

( i ) $3k+1$ が偶数の場合

$k$ は奇数であるから，$k = 2l+1$ （$l$ は整数）とおくと，

$$a_{3k} \equiv \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}$$

$$= (3l+2)(6l+5)$$

$$\equiv (-1)\cdot(-1)$$

$$= 1$$

( i ) $3k+2$ が偶数の場合

$k$ は偶数であるから，$k = 2l$（$l$ は整数）とおくと，

$$a_{3k} \equiv \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}$$

$$= (6l+1)(3l+1)$$

$$\equiv 1\cdot 1$$

$$= 1$$

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

次に $a_{3k+1}, a_{3k+2}$ についても同様に，第 2 項について考える。

$$a_{3k+1} \equiv \frac{(3k+2)(3k+3)}{2}$$

$$a_{3k+2} \equiv \frac{(3k+3)(3k+4)}{2}$$

上 2 式の右辺の分子は，因数のどちらか一方は必ず偶数となるし，$3k+3$ は 3 の倍数であるから，6 の倍数である。したがって，右辺はいずれも 3 の倍数となるので，$a_{3k+1}, a_{3k+2}$ を 3 で割った余りは 0 となる。よって余りは $a_{3k}, a_{3k+1}, a_{3k+2}$ の順に $1, 0, 0$ である。

初項から第 2020 項の和についても，先ほどと同様に 3 で割って余る数について考えれば十分である。

$a_1 = 0, a_2 = 6$ であることと，上記で得られた結果を利用する。$\{a_n\}$ を 3 で割った余りを並べると 001001001……となって，3 で割って 1 余る項が 2 つおきに現れる。この項がいくつあるかを求める。初項から第 2020 項までの総数は 2020 であり，「001」というひとつのかたまりにつき 1 が 1 つ表れるので

$$2020 \div 3 = 673 \text{ あまり } 1$$

よって 3 で割って 1 余る項は 673 個で，あまりを足し合わせると 673 であるから，これを 3 で割った余りを考えればよく，

$$673 \div 3 = 224 \text{ あまり } 1$$

より，初項から第 2020 項までの和を足した余りは 1 である。

（柴田優里，小林新九郎）

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

# 2020 年度 センター試験 本試験 数学ⅡB

## 第 4 問

| | |
|---|---|
| 出題範囲 | ベクトル |
| 難易度 | ★★★☆☆ |
| 所要時間 | 得意：12 分　　ふつう：15 分　　苦手：18 分 |
| 講評 | (1)や(2)はベクトルの基本問題であるので落とさないようにしたい。(3)は求められた値を参考にして図形を類推する問題だったが，一度自分で図を描いてみると解きやすいだろう。(4)は 3 次元の図形を考察する問題であり，これも自分で図を描くと解きやすくなるが，比較的難易度は高かった。 |

(1) ア　イ　**正解は　$3\sqrt{6}$**

原点 O と点 A の距離を計算すればよいので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2+(-6-0)^2} = 3\sqrt{6}$$

である。

ウ　エ　**正解は　$4\sqrt{3}$**

上と同じようにして，原点 O と点 B の距離を計算して，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \sqrt{(2+2\sqrt{3}-0)^2+(2-2\sqrt{3}-0)^2+(-4-0)^2} = 4\sqrt{3}$$

である。

オ　カ　**正解は　36**

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)+3\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)+(-6)\cdot(-4) = 36$$

と計算できる。

(2) キク　ケ　コ　**正解は　$\dfrac{-2}{3}$，1**

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

①より $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$ であるから，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ が成り立つので，問題文中にあるように $\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ と表すと

$$\overrightarrow{OA} \cdot \left(s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\right) = s\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

が成り立つ。これに $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3\sqrt{6}$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 36$ を代入して整理すると，

$$3s + 2t = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を得る。

同様にして①より $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 24$ が成り立つので，

$$\overrightarrow{OB} \cdot \left(s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\right) = s\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = 24$$

である。これに $\left|\overrightarrow{OB}\right| = 4\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 36$ を代入して整理すると，

$$3s + 4t = 2 \qquad \cdots\cdots ②$$

を得る。①，②の連立方程式を解くことで，

$$s = \frac{-2}{3},\ t = 1$$

が求められる。

サ　シ　**正解は　$2\sqrt{6}$**

上で求めた，$s$，$t$ の値を用いると

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \qquad \cdots\cdots ③$$

と書けるので，$\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3\sqrt{6}$，$\left|\overrightarrow{OB}\right| = 4\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 36$ も用いると

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 = \frac{4}{9}\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 - \frac{4}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = 24$$

となり，$\left|\overrightarrow{OC}\right| = 2\sqrt{6}$ である。

(3)　ス　セ　ソタ　**正解は　2，2，−4**

$\overrightarrow{CB}$ は

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$$

と変形できるので，$\overrightarrow{OA} = (3, 3, -6)$ を用いると，$\overrightarrow{CB} = (2, 2, -4)$ と計算できる。

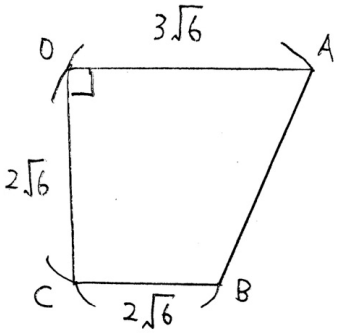
チ　**正解は　3**

上で考えた通り，$\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ と表すことができるので，$\overrightarrow{CB}$ と $\overrightarrow{OA}$ は平行である。これより四角形 OABC は台形といえる。

ただ，大きさは等しくないので，対辺の長さが等しくなる平行四辺形ではないといえる。よって，四角形 OABC は平行四辺形ではなく，台形である。

ツテ　**正解は　30**

問題文より $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$ であり，$|\overrightarrow{OB}|$，$|\overrightarrow{OA}|$，$|\overrightarrow{OC}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{OA}|$ の値を用いると，下のような図が描ける。




この図を参考にすると，この四角形の面積は

$$\left(3\sqrt{6} + 2\sqrt{6}\right) \times 2\sqrt{6} \times \frac{1}{2} = 30$$

と計算できる。

(4)　ト　ナ　ニ　ヌ　ネ　ノ　**正解は　$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$，　$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$**

点 D の $z$ 座標は 1 であるから，$D(m, n, 1)$ とする。問題文より $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OD}$ であるから，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ が成り立つので，$(3, 3, -6) \cdot (m, n, 1) = 0$ を整理することで

$$m + n = 2 \qquad \cdots\cdots ④$$

を得る。また③より $\overrightarrow{OC} = \left(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 0\right)$ が求められる。問題文より $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 2\sqrt{6}$ であるから，

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\left(2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ 0\right)\cdot(m,\ n,\ 1)=2\sqrt{6}$ を整理することで

$$m+n=\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots⑤$$

を得る。④および⑤を計算することで

$$m=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$n=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

と計算できる。

**ハヒ　正解は　60**

上で得られた結果を用いて，$\left|\overrightarrow{OD}\right|$ を計算すると

$$\left|\overrightarrow{OD}\right|=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2}=2$$

となる。$\angle\mathrm{COD}=\theta$ と置くと，

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\overrightarrow{OD}\right|\cos\theta$$

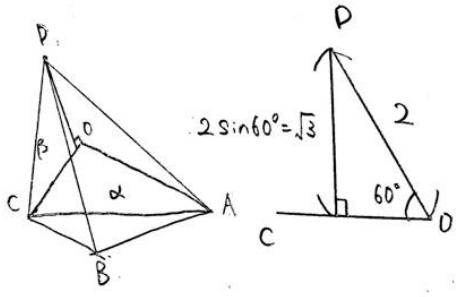
という式が成り立つので，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=2\sqrt{6}$，$\left|\overrightarrow{OC}\right|=2\sqrt{6}$，$\left|\overrightarrow{OD}\right|=2$ を代入することで

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

と計算できる。ここから，$\angle\mathrm{COD}=\theta=60°$ を得る。

**フ　正解は　$\sqrt{3}$**

平面 $\alpha$ と平面 $\beta$ は直交するので，下図を参考にすると，三角形 ABC を底面とする四面体 DABC の高さは点 D から辺 OC に下ろした垂線の長さに等しいことがわかる。よって求める長さは $\sqrt{3}$ である。



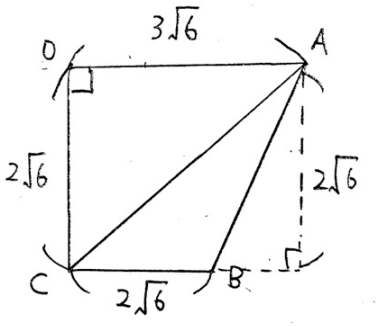

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。

へ　ホ　**正解は　$4\sqrt{3}$**

三角形 ABC の面積は 12 である（下図を参照）。よって四面体 DABC の体積は

$$12 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{3} = 4\sqrt{3}$$

である。




（大房徹也，小林新九郎）

©Foresight Inc.
本サービス・コンテンツの知的財産権その他一切の権利は
株式会社フォーサイトに帰属し，無断転載・引用を禁止します。