

2018年度 センター試験 本試験 数学Ⅱ・数学B

第1問

〔1〕

出題範囲	三角関数
難易度	★★★★☆☆
所要時間	得意：5分　ふつう：7分　苦手：8分
傾向と対策	ラジアンと弧度法の関係について考える新しい傾向の問題であるが、ラジアンの定義をおさえていれば難なく解ける問題である。三角関数の方程式は標準的な問題であり、最後までミスなく解ききれるかが問われた。

解説

(1) ラジアンの定義より、1ラジアンは

② 半径が1、弧の長さが1の扇形の中心角の大きさである。

ア ②

(2) 144° を弧度で表すと、 $\frac{144}{180}\pi = \frac{4}{5}\pi$ ラジアンである。また、 $\frac{23}{12}\pi$ ラジアンを度で表すと、 $180^\circ \cdot \frac{23}{12} = 345^\circ$ である。

イ ウ $\frac{4}{5}$

(3) $2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = 1 \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right) \dots\dots ①$
 $x = \theta + \frac{\pi}{5}$ とおくと

エオカ 345

$$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$2\sin x - 2\left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$$

三角関数の合成を用いて

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$x = \theta + \frac{\pi}{5}$ を代入して

$$\sin\left(\theta - \frac{2}{15}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ より, $\frac{11}{30}\pi \leq \theta - \frac{2}{15}\pi \leq \frac{13}{15}\pi$ であるから

$$\theta - \frac{2}{15}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

$$\theta = \frac{29}{30}\pi$$

$\frac{\pi}{\text{キ}}$	$\frac{\pi}{6}$
$\sqrt{\text{ク}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{\text{ケ}}, \frac{1}{\text{コ}}$	$\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}$
$\frac{\text{サシ}}{\text{スセ}}$	$\frac{29}{30}$

[2]

出題範囲	指数関数／対数関数
難易度	★★★☆☆
所要時間	得意：5分 ふう：6分 苦手：7分
傾向と対策	標準的な対数関数の不等式の問題であった。完答したい。

解説

$$x^{\log_3 x} \geq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \quad \dots\dots ②$$

の両辺に対し、3 を底とする対数をとると、底 $3 > 1$ より、不等号の向きはそのまま

$$\begin{aligned} \log_3 x^{\log_3 x} &\geq \log_3 \left(\frac{x}{c}\right)^3 \\ (\log_3 x)^2 &\geq 3(\log_3 x - \log_3 c) \\ (\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 3\log_3 c &\geq 0 \end{aligned}$$

ここで $t = \log_3 x$ とおくと

$$t^2 - 3t + 3\log_3 c \geq 0 \quad \dots\dots ③$$

$c = \sqrt[3]{9}$ のとき、③は

$$\begin{aligned} t^2 - 3t + 3\log_3 3^{\frac{2}{3}} &\geq 0 \\ t^2 - 3t + 2 &\geq 0 \\ (t-1)(t-2) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$t \leq 1, t \geq 2$$

真数は正の実数であることから $x > 0$

以上より $0 < x \leq 3, x \geq 9$

次に、②が $x > 0$ の範囲でつねに成り立つとする。

$t = \log_3 x$ ($x > 0$) より、対数関数のグラフを考えると t のとり得る値の範囲は② **実数全体** である。

よって、すべての実数 t に対して③が成り立てばよい。

$t^2 - \mathbf{タ} t + \mathbf{タ} \log_3 c$	$t^2 - 3t + 3\log_3 c$
チ, ツ	1, 2
テ $< x \leq \mathbf{ト}$, $x \geq \mathbf{ナ}$	$0 < x \leq 3, x \geq 9$

その条件は、関数 $f(t) = t^2 - 3t + 3\log_3 c$ が t 軸と接するか、 t 軸と交わらないことである。つまり方程式 $t^2 - 3t + 3\log_3 c = 0$ の判別式 D が $D \leq 0$ となることである。よって

$$(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3\log_3 c \leq 0$$

$$\log_3 c \geq \frac{3}{4}$$

$$c \geq \sqrt[4]{27}$$

ニ	②
又	$\frac{3}{4}$
ネ	
$\sqrt{\text{ハヒ}}$	$\sqrt[4]{27}$

(寺内一記, 青木徹)

2018 年度 センター試験 本試験 数学Ⅱ・数学 B

第 2 問

〔1〕

出題範囲	微分／積分
難易度	★★★★☆
所要時間	得意：7分　ふつう：10分　苦手：12分
傾向と対策	(1) は放物線と直線の接する条件についての問題である。しかし放物線の式については p, q, r と、具体的な数値が与えられていないため、抽象的な計算が苦手な受験生は多少手間取ったかもしれない。(2) は一般的な積分計算と極値を求める問題である。後半は、 v_0 と 2 の大小関係などをきちんと評価できるか、そのときの U' の値はどうであるかなどの理解が問われた。

解説

(1) 放物線 C が点 A において直線 l と接することから、ここでの接線の傾きは明らかに 2 である。

一方、放物線の式 $y = px^2 + qx + r$ を x で微分すると

$$y' = 2px + q$$

$x = 1$ のとき $y' = 2$ となることから

$$2 = 2p + q$$

$$q = -2p + 2$$

また、放物線 C が点 A を通ることから、 $1 = p \cdot 1^2 + q \cdot 1 + r$ が得られる。

これと、 q の式から

$$1 = p + (-2p + 2) + r$$

$$r = p - 1$$

ア	2
イウ, エ	-2, 2
オ	1

(2) (1) より, 放物線 C は $y = px^2 + 2(-p+1)x + p-1$ となる。 $v > 0$ より, 求める面積 S は右図の網掛部の面積である。よって面積 S は次の式で表される。

$$\begin{aligned} S &= \int_1^v \{px^2 + 2(-p+1)x + p-1 - (2x-1)\} dx \\ &= \frac{p}{3} \left[x^3 - 3x^2 + 3x \right]_1^v \\ &= \frac{p}{3} (v^3 - 3v^2 + 3v - 1) \end{aligned}$$

また, 直線 l , $x = v$, x 軸で囲まれた図形は右下図の網掛部である。よって

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \{(2v-1) + 1\}(v-1) \\ &= v^2 - v \end{aligned}$$

$U = S - T$ とすると

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{3}pv^3 - (p+1)v^2 + (p+1)v - \frac{p}{3} \\ U' &= pv^2 - 2(p+1)v + (p+1) \end{aligned}$$

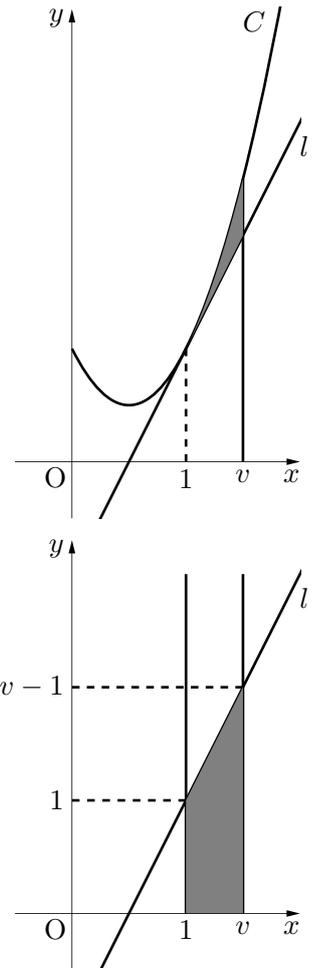
この U が $v = 2$ で極値をとることから, このとき $U' = 0$ となる。よって

$$\begin{aligned} 0 &= 4p - 4(p+1) + p + 1 \\ p &= 3 \end{aligned}$$

となる。これを U の式に代入すると

$$\begin{aligned} U &= v^3 - 4v^2 + 4v - 1 \\ &= (v-1) \left(v - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \left(v - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

よって $U = 0$ となる v は $v = 1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ であり, このうち $v > 1$ となるのは $v = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ である。よって, $v_0 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ である。



v	1	...	2	...	v_0	...
U'		-	0	+	0	+
U	0	↘	極小	↗	0	↗

増減表より, $1 < v < v_0$ において, U は③ 負の値のみをとる。
 $v > 1$ において U は $v = 2$ のとき極小かつ最小となり, このとき $U = -1$ となる。

カ, キ, ク, ケ	3, 3, 3, 1
コ	2
サ	3
シ + $\sqrt{\text{ス}}$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$
セ	
ソ	③
タチ	-1

[2]

出題範囲	微分／積分
難易度	★★★☆☆
所要時間	得意：4分　ふつう：5分　苦手：6分
傾向と対策	前半は不定積分と定積分についての理解が問われた。 $f(x)$ の符号と、 $W \geq 0$ に注意したい。 後半は前半で得られた条件をそのまま用いればよい。

$F(x) = \int f(x) dx$ であるので、 $F'(x) = \textcircled{7} f(x)$ である。

また、 W は $y = f(x)$, x 軸, $x = 1$, $x = t$ で囲まれた図形の面積であり、 $x \geq 1$ において常に $f(x) < 0$ であることから

$$\begin{aligned} W &= - \int_1^t f(x) dx \\ &= \textcircled{4} - F(t) + F(1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 W の面積は、底辺の長さ $2t^2 - 2$ 、他の 2 辺の長さがそれぞれ $t^2 + 1$ の二等辺三角形の面積と等しい。

この二等辺三角形の高さは $2t$ であることから、 $W = \frac{1}{2} \cdot 2t(2t^2 - 2) = 2t^3 - 2t$ である。

以上より $f(t)$ は

$$\begin{aligned} f(t) &= F'(t) \\ &= \{-W + F(1)\}' \\ &= -W' \\ &= -6t^2 + 2 \end{aligned}$$

である。

ツ	⑦
テ	④
トナ $t^2 + 2$	$-6t^2 + 2$

(遠藤一真, 寺内一記)

2018年度 センター試験 本試験 数学Ⅱ・数学B

第3問

出題範囲	数列
難易度	★★★☆☆
所要時間	得意：7分　ふつう：10分　苦手：12分
傾向と対策	(1), (2) は等差数列と等比数列の基本的な問題であるからぜひ正解したい。(3) は階差数列の問題である。数列 $\{c_n\}$ の定義が丁寧に示されている上、階差数列 $\{d_n\}$ を求める誘導もあるので、これも解ききりたい。計算量が多いのでミスには注意しよう。

解説

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a ，公差を d とする。

第4項が30，初項から第8項までの和が288であるから

$$\begin{cases} a_4 = a + (4-1)d = a + 3d = 30 \\ \sum_{k=1}^8 a_k = \sum_{k=1}^8 \{a + (k-1)d\} = 8a + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 \cdot d - 8d = 8a + 28d = 288 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3d = 30 \\ 2a + 7d = 72 \end{cases}$$

これを解いて、 $a = -6$ ， $d = 12$

すなわち、 $\{a_n\}$ の初項は -6 ，公差は 12 。

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{-6 + 12(k-1)\} \\ &= -6n + 12 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) = 6n^2 - 12n \end{aligned}$$

アイ	-6
ウエ	12
オ $n^2 -$ カキ n	$6n^2 - 12n$

(2) 等比数列 $\{b_n\}$ の初項を b ，公比を r とする。

第2項が36，初項から第3項までの和が156であるから

$$\begin{cases} b_2 = br^{2-1} = br = 36 \\ b_1 + b_2 + b_3 = b + br + br^2 = 156 \end{cases}$$

$$r \neq 0 \text{ より, } b = \frac{36}{r}$$

$$\frac{36}{r}(1+r+r^2) = 156$$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(r-3)(3r-1) = 0$$

$$r > 1 \text{ より, } r = 3, b = \frac{36}{3} = 12$$

すなわち, $\{b_n\}$ の初項は **12**, 公比は **3**。

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n 12 \cdot 3^{k-1} = 12 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} \\ &= \mathbf{6(3^n - 1)} \end{aligned}$$

クケ	12
コ	3
サ (シ ⁿ - ス)	6(3 ⁿ - 1)

$$(3) \quad c_{n+1} = (n+1)(a_1 - b_1) + n(a_2 - b_2) + \cdots + 2(a_n - b_n) + (a_{n+1} - b_{n+1})$$

$$-) \quad c_n = \frac{n(a_1 - b_1) + (n-1)(a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n)}{1}$$

$$d_n = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) + (a_{n+1} - b_{n+1})$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1})$$

$$= S_{n+1} - T_{n+1}$$

したがって, 答えは**⑤**。

(1), (2) より

$$d_n = 6(n+1)^2 - 12(n+1) - 6(3^{n+1} - 1)$$

$$= \mathbf{6n^2 - 2 \cdot 3^{n+2}}$$

$c_1 = a_1 - b_1 = -6 - 12 = \mathbf{-18}$ であるから, $n \geq 2$ のとき

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k^2 - 2 \cdot 3^{k+2})$$

$$= -18 + 6 \cdot \frac{1}{6} (n-1)n\{2(n-1) + 1\} - 2 \cdot 3^3 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}$$

$$= -18 + n(n-1)(2n-1) - 27(3^{n-1} - 1)$$

$$= 2n^3 - 3n^2 + n + 9 - 3^{n+2}$$

これは $n = 1$ のときも成立する。よって, $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = \mathbf{2n^3 - 3n^2 + n + 9 - 3^{n+2}}$$

セ	⑤
ソ $n^2 - 2 \cdot \text{タ}^{n+1}$	$6n^2 - 2 \cdot 3^{n+2}$
ツ テ ト	-18
ナ $n^3 - \text{ニ} n^2 + n + \text{ヌ} - \text{タ}^{n+1}$	$2n^3 - 3n^2 + n + 9 - 3^{n+2}$

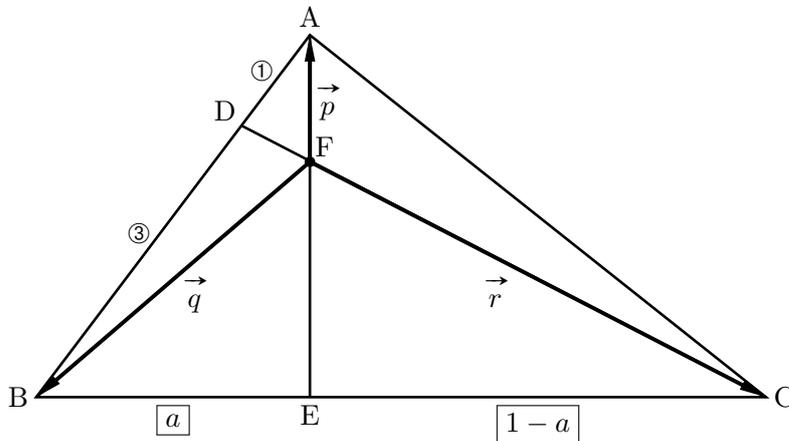
(江崎ゆり子, 遠藤一真)

2018年度 センター試験 本試験 数学Ⅱ・数学B

第4問

出題範囲	平面ベクトル
難易度	★★★★☆
所要時間	得意：8分 ふつう：12分 苦手：15分
傾向と対策	平面ベクトルの問題である。ベクトルの始点が一般的な問題とは異なっているため、戸惑った受験生がいたかもしれない。

解説



(1)

$$\vec{AB} = \vec{FB} - \vec{FA} = \textcircled{2} \vec{q} - \vec{p}$$

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{q} - \vec{p}|^2$$

$$= |\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

ア	②
イ	2

(2) 点Dは、線分ABを1:3に内分する点だから

$$\vec{FD} = \frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{q} \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

ウ	オ	③
エ	カ	2

(3) $\vec{FD} = s\vec{r}$ とすると、②により

$$\frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{q} = s\vec{r}$$

$$\vec{q} = -3\vec{p} + 4s\vec{r} \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

である。また、点 E は線分 BC を $a : (1 - a)$ に内分する点だから

$$\overrightarrow{FE} = (1 - a)\overrightarrow{q} + a\overrightarrow{r}$$

$\overrightarrow{FE} = t\overrightarrow{p}$ とおくと、

$$(1 - a)\overrightarrow{q} + a\overrightarrow{r} = t\overrightarrow{p}$$

$$\overrightarrow{q} = \frac{t}{1 - a}\overrightarrow{p} - \frac{a}{1 - a}\overrightarrow{r} \quad \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

よって、③、④より

$$-3\overrightarrow{p} + 4s\overrightarrow{r} = \frac{t}{1 - a}\overrightarrow{p} - \frac{a}{1 - a}\overrightarrow{r}$$

$\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{r} \neq \overrightarrow{0}$ であり、 \overrightarrow{p} と \overrightarrow{r} は平行でないから $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{r}$ の係数を比較して

$$\begin{cases} -3 = \frac{t}{1 - a} \\ 4s = -\frac{a}{1 - a} \end{cases}$$

したがって

$$s = \frac{-a}{4(1 - a)}, t = -3(1 - a)$$

である。

(4) ①から、 $|\overrightarrow{p}| = 1$ であることに注意して

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{p}|^2 - 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 1 - 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2 \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BE}|^2 &= |\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FB}|^2 \\ &= |t\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}|^2 \\ &= t^2|\overrightarrow{p}|^2 - 2t\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2 \\ &= 9(1 - a)^2 + 6(1 - a)\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2 \end{aligned}$$

である。したがって、 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BE}|$ であるから

キク, ケ	-3, 4
コ - サ	$\frac{t}{1 - a}, \frac{a}{1 - a}$
スセ	$\frac{-a}{4(1 - a)}, -3(1 - a)$
ソ (1 - a)	タチ (1 - a)

$$1 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 = 9(1-a)^2 + 6(1-a)\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2$$

$$2(3a-4)\vec{p} \cdot \vec{q} = (3a-4)(3a-2)$$

$$0 < a < 1 \text{ より, } 3a-4 \neq 0 \text{ であるから, } \vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{3a-2}{2}$$

ツ, テ	9, 6
トナ - ニ	$\frac{3a-2}{2}$
ヌ	

(井上輝義, 江崎ゆり子)

2018 年度 センター試験 本試験 数学Ⅱ・数学 B

第 5 問

出題範囲	確率分布と統計
難易度	★★★☆☆
所要時間	得意：8分　ふつう：12分　苦手：15分
傾向と対策	(1), (2) は基本的な期待値・分散の計算や、二項分布の性質、正規分布表の読み取りの問題である。(3) は信頼度 95% の信頼区間の式をきちんと把握しておく必要がある。母平均の式と母比率の式を取り違えないように注意したい。

解説

(1) $X = 2a$ となる確率は、 a 枚のカードの中から $2a$ の数字が書かれたカードを引く確率であるので $\frac{1}{a}$ である。

$a = 5$ のとき、 X の平均 $E(X)$ は

$$\sum_{k=1}^5 2k \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (5+1) = 6$$

また、 X^2 の平均 $E(X^2)$ は

$$\sum_{k=1}^5 (2k)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot 5(5+1)(2 \cdot 5+1) = 44$$

よって、 X の分散 $V(X)$ は

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 44 - 6^2 = 8$$

$E(sX + t) = 20, V(sX + t) = 32$ のとき

$$\begin{cases} E(sX + t) = sE(X) + t = 20 \\ V(sX + t) = s^2V(X) = 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6s + t = 20 \\ 8s^2 = 32 \end{cases}$$

$s > 0$ より $s = 2, t = 8$ である。

$sX + t = 2X + 8 \geq 20$ つまり $X \geq 6$ となる事象は $X = 6, 8, 10$ となるときであるので、 $sX + t \geq 20$ となる確率は

$$\frac{3}{5} = 0.6$$

である。

- (2) 事象 A が起こる場合の数は、 a 枚のカードから 3 枚を選んで左から小さい順にならべた場合の数に等しい。よって事象 A が起こる確率は

$$\frac{{}_a C_3}{a(a-1)(a-2)} = \frac{1}{6}$$

事象 A が起こる回数を表す確率変数 Y は二項分布に従う。よってその平均 m と分散 σ^2 は、事象 A が起こる確率を p 、試行回数を $n = 180$ として

$$m = np = 30$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 25$$

である。

$$Z = \frac{Y - m}{\sigma} = \frac{Y - 30}{5} \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} P(18 \leq Y \leq 36) &= P\left(\frac{18 - 30}{5} \leq Z \leq \frac{36 - 30}{5}\right) \\ &= P(-2.40 \leq Z \leq 1.20) \end{aligned}$$

ア	$\frac{1}{a}$
イ	$\frac{1}{a}$
ウ	6
エ	8
オ	2
カ	8
キ	6

ここで、正規分布表より

$$\begin{aligned} P(-2.40 \leq Z \leq 1.20) &= P(-2.40 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.20) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2.40) + P(0 \leq Z \leq 1.20) \\ &= 0.4918 + 0.3849 \\ &= 0.8767 \end{aligned}$$

これを四捨五入すると

$$P(-2.40 \leq Z \leq 1.20) = 0.88$$

ク	$\frac{1}{6}$
ケ	6
コサ	30
シス	25
セ・ソタ	2.40
チ・ツテ	1.20
トナ	88

(3) 標本比率を r とすると

$$r = \frac{320}{400} = 0.8$$

である。母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$r - 1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{400}} \leq p \leq r + 1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{400}}$$

$$0.8 - 1.96 \cdot 0.02 \leq p \leq 0.8 + 1.96 \cdot 0.02$$

$$0.76 \leq p \leq 0.84$$

である。

標本の大きさを n とすると、標本比率 R が得られたとき p に対する信頼度 95% の信頼区間の幅 L は

$$L = 2 \cdot 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} = 3.92\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

と表される。

ここで、 L_1, L_2, L_3 はそれぞれ

$$L_1 = 3.92\sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{400}} = 3.92\sqrt{\frac{0.16}{400}}$$

$$L_2 = 3.92\sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{400}} = 3.92\sqrt{\frac{0.24}{400}}$$

$$L_3 = 3.92\sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{500}} = 3.92\sqrt{\frac{0.16}{500}}$$

であるので、④ $L_3 < L_1 < L_2$ となる。

ニ	8
ヌネ	76
ノハ	84
ヒ	④

(青木徹, 井上輝義)