2018年度 センター試験 本試験 数学II

作成日：2018年1月14日（日）

第1問　ラジアンの定義，三角関数・対数関数の方程式・不等式

〔1〕

出題範囲	三角関数
難易度	★★★☆☆
所要時間	7分
傾向と対策	ラジアンと弧度法の関係について考える新しい問題であるが，ラジアンの定義をおさえていれば難なく解ける問題である。三角関数の方程式は標準的な問題であり，最後までミスなく解ききれるかが問われた。

解説

ア	②

$\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}$	$\dfrac{4}{5}$
エオカ	345

(1) ラジアンの定義より，1ラジアンは② 半径が1，弧の長さが1の扇形の中心角の大きさ である。

(2) 144°を弧度で表すと，$\dfrac{144}{180}\pi = \dfrac{4}{5}\pi$ ラジアンである。また，$\dfrac{23}{12}\pi$ ラジアンを度で表すと，$180^\circ \cdot \dfrac{23}{12} = 345^\circ$ である。

(3) $2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{30}\right) = 1 \quad \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi\right) \quad \cdots\cdots$ ①

$x = \theta + \dfrac{\pi}{5}$ とおくと

$$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$2\sin x - 2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$$

三角関数の合成を用いて

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\therefore \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$ を代入して

$$\sin\left(\theta-\frac{2}{15}\pi\right)=\frac{1}{2}$$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\dfrac{11}{30}\pi\leqq\theta-\dfrac{2}{15}\pi\leqq\dfrac{13}{15}\pi$ であるから

$$\theta-\frac{2}{15}\pi=\frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore\theta=\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{30}}\pi$$

$\dfrac{\pi}{キ}$	$\dfrac{\pi}{6}$
$\sqrt{ク}$	$\sqrt{3}$
$\dfrac{\pi}{ケ}$, $\dfrac{1}{コ}$	$\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{サシ}{スセ}$	$\dfrac{29}{30}$

〔2〕

出 題 範 囲	指数関数，対数関数
難　易　度	★★★☆☆
所 要 時 間	6 分
傾向と対策	標準的な対数関数の不等式の問題であった。完答したい。

解説

$$x^{\log_3 x} \geqq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

の両辺に対し，3 を底とする対数をとると，底 $3>1$ より，不等号の向きはそのままで

$$\log_3 x^{\log_3 x} \geqq \log_3 \left(\frac{x}{c}\right)^3$$

$$(\log_3 x)^2 \geqq 3(\log_3 x - \log_3 c)$$

$$(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 3\log_3 c \geqq 0$$

ここで $t = \log_3 x$ とおくと

$$t^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}t + 3\log_3 c \geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

$c = \sqrt[3]{9}$ のとき，③ は

$$t^2 - 3t + 3\log_3 3^{\frac{2}{3}} \geqq 0$$

$$t^2 - 3t + 2 \geqq 0$$

$$(t-1)(t-2) \geqq 0$$

$$t \leqq \mathbf{1}, t \geqq \mathbf{2}$$

t ソ $-$ タ $t+$ タ $\log_3 c$	$t^2 - 3t + 3\log_3 c$
チ , ツ	$1, 2$
テ $< x \leqq$ ト $, x \geqq$ ナ	$0 < x \leqq 3, x \geqq 9$

真数は正の実数であることから $x > 0$

以上より $\mathbf{0} < x \leqq \mathbf{3}, x \geqq \mathbf{9}$

次に，② が $x > 0$ の範囲でつねに成り立つとする。

$t = \log_3 x \ (x > 0)$ より，対数関数のグラフを考えると t のとり得る値の範囲は② 実数全体 である。

よって，すべての実数 t に対して ③ が成り立てばよい。

その条件は，関数 $f(t)=t^2-3t+3\log_3 c$ が t 軸と接するか，t 軸と交わらないことである。つまり方程式 $t^2-3t+3\log_3 c=0$ の判別式 D が $D \leqq 0$ となることである。よって

$$(-3)^2-4\cdot 1\cdot 3\log_3 c \leqq 0$$

$$\log_3 c \geqq \mathbf{\frac{3}{4}}$$

$$c \geqq \mathbf{\sqrt[4]{27}}$$

ニ	②
$\dfrac{ヌ}{ネ}$	$\dfrac{3}{4}$
$\sqrt[ノ]{ハヒ}$	$\sqrt[4]{27}$

Foresight フォーサイト

2018年度 センター試験 本試験 数学II

作成日：2018年1月14日（日）

第2問　図形の面積と積分の関係

〔1〕

出題範囲	微分法・積分法
難易度	★★★★☆
所要時間	10分
傾向と対策	(1) は放物線と直線の接する条件についての問題である。しかし放物線の式については p, q, r と，具体的な数値が与えられていないため，抽象的な計算が苦手な受験生は多少手間取ったかもしれない。(2) は一般的な積分計算と極値を求める問題である。後半は，v_0 と 2 の大小関係などをきちんと評価出来るか，そのときの U' の値はどうであるかなどの理解が問われた。

解説

(1) 放物線 C が点 A において直線 l と接することから，ここでの接線の傾きは明らかに $\mathbf{2}$ である。

一方，放物線の式 $y = px^2 + qx + r$ を x で微分すると

$$y' = 2px + q$$

$x = 1$ のとき $y' = 2$ となることから

$$2 = 2p + q$$

$$\therefore q = \mathbf{-2}p + \mathbf{2}$$

また，放物線 C が点 A を通ることから，$1 = p \cdot 1^2 + q \cdot 1 + r$ が得られる。

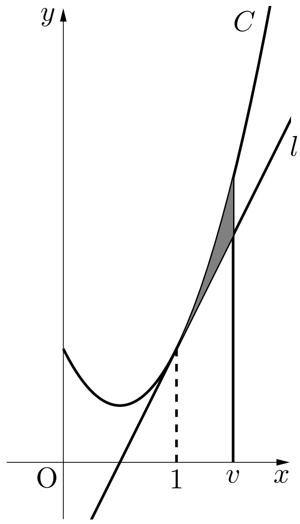
これと，q の式から

$$1 = p + (-2p + 2) + r$$

$$\therefore r = p - \mathbf{1}$$

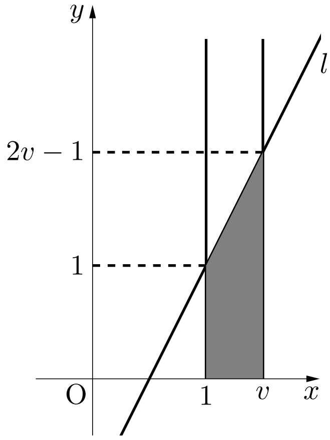
ア	2
イウ，エ	$-2, 2$
オ	1

(2) 先の議論より，放物線 C は $y=px^2+2(-p+1)x+p-1$ となる。$v>0$ より，求める面積 S は右図の網掛部の面積である。よって面積 S は次の式で表される。



$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^v \{px^2+2(-p+1)x+p-1-(2x-1)\}\,dx \\
&= \frac{p}{3}\left[x^3-3x^2+3x\right]_1^v \\
&= \frac{p}{\mathbf{3}}\left(v^3-\mathbf{3}v^2+\mathbf{3}v-\mathbf{1}\right)
\end{aligned}
$$

また，直線 l，$x=v$，x 軸で囲まれた図形は右下図の網掛部である。よって



$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\{(2v-1)+1\}(v-1) \\
&= v^{\mathbf{2}}-v
\end{aligned}
$$

$U=S-T$ とすると

$$U=\frac{1}{3}pv^3-(p+1)v^2+(p+1)v-\frac{p}{3}$$

$$U'=pv^2-2(p+1)v+(p+1)$$

この U が $v=2$ で極値をとることから，このとき $U'=0$ となる。よって

$$0=4p-4(p+1)+p+1$$

$$\therefore p=\mathbf{3}$$

となる。これを U の式に代入すると

$$
\begin{aligned}
U &= v^3-4v^2+4v-1 \\
&= (v-1)\left(v-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(v-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

よって $U=0$ となる v は $v=1,\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ であり，このうち $v>1$ となるのは $v=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ である。よって，$v_0=\dfrac{\mathbf{3}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}$ である。

v	1	$\cdots$	2	$\cdots$	v_0	$\cdots$
U'		$-$	0	$+$	0	$+$
U	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0	$\nearrow$

増減表より，$1 < v < v_0$ において，U は③ 負の値のみをとる 。

$v > 1$ において U は $v = 2$ のとき極小かつ最小となり，このとき $U =$ **-1** となる。

カ，キ，ク，ケ	$3, 3, 3, 1$
コ	2
サ	3
$\dfrac{\text{シ} + \sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}}$	$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
ソ	③
タチ	-1

〔２〕

出題範囲	微分法・積分法
難　易　度	★★★☆☆
所要時間	５分
傾向と対策	前半は不定積分と定積分についての理解が問われた。$f(x)$ の符号と，$W \geqq 0$ に注意したい。後半は前半で得られた条件をそのまま用いればよい。

$F(x) = \int f(x)\,dx$ であるので，$F'(x) =$ ⑦$f(x)$ である。

また，W は $y = f(x)$，x 軸，$x = 1$，$x = t$ で囲まれた図形の面積であり，$x \geqq 1$ において常に $f(x) < 0$ であることから

$$W = -\int_1^t f(x)\,dx$$

$$= ④ -F(t) + F(1)$$

となる。ここで，W の面積は，底辺の長さ $2t^2 - 2$，他の 2 辺の長さがそれぞれ $t^2 + 1$ の二等辺三角形の面積と等しい。

この二等辺三角形の高さは $2t$ であることから，$W = \dfrac{1}{2} \cdot 2t(2t^2 - 2) = 2t^3 - 2t$ である。

以上より $f(t)$ は

$$f(t) = F'(t)$$

$$= \{-W + F(1)\}'$$

$$= -W'$$

$$= \mathbf{-6t^2 + 2}$$

である。

ツ	⑦
テ	④
トナ t ニ ＋ ヌ	$-6t^2 + 2$

2018年度 センター試験 本試験 数学II

作成日：2018年1月14日（日）

第3問　円上の点と線分上の点

出題範囲	図形と方程式
難易度	★★★★☆
所要時間	15分
傾向と対策	前半は直線と円を絡めた軌跡の問題である。誘導に従って素直に計算すればよい。後半では円上の点と直線上の点の距離の最小値・最大値を求める問題で，図を描きながらどのようなときに最小・最大になるかを考察できるかが問われた。

解説

(1) 点 $\mathrm{A}(-1,0)$，点 $\mathrm{B}(2,1)$ を通る直線 l_1 の方程式は

$$y=\frac{1-0}{2-(-1)}(x+1)+0 \quad \therefore \quad x-\mathbf{3}y+\mathbf{1}=0$$

円 C_1 の方程式を変形すると

$$x^2+y^2+6x-12y+36=0$$

$$(x+3)^2-9+(y-6)^2-36+36=0$$

$$(x+3)^2+(y-6)^2=9$$

ア，イ	$3, 1$
$\left(\text{ウエ}, \text{オ}\right)$，カ	$(-3,6), 3$

よって，円 C_1 の中心は $(\mathbf{-3},\mathbf{6})$ で，半径は $\mathbf{3}$ である。

(2) C_1 上の点 $\mathrm{P}(a,b)$ に対して，三角形 ABP の重心 G の座標を (s,t) とおくと

$$s=\frac{-1+2+a}{3}=\frac{1+a}{3},\ t=\frac{0+1+b}{3}=\frac{1+b}{3}$$

よって

$$a=\mathbf{3}s-\mathbf{1},\ b=\mathbf{3}t-\mathbf{1}$$

点 P は C_1 上にあるから

$$(3s-1+3)^2+(3t-1-6)^2=9$$
$$(3s+2)^2+(3t+7)^2=9$$
$$\left(s+\frac{2}{3}\right)^2+\left(t-\frac{7}{3}\right)^2=1$$

キ $s-$ ク，ケ $t-$ コ	$3s-1, 3t-1$
$\left(\dfrac{サシ}{ス}, \dfrac{セ}{ソ}\right)$，タ	$\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{7}{3}\right), 1$

よって，G の軌跡は中心 $\left(\dfrac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}}, \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right)$，

半径 **1** の円である。

(3) l_1 の傾きは $\dfrac{1}{3}$ だから，これと垂直な直線 l_2 の傾きは -3 である。また，直線 l_2 は円 C_2 の中心 $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$ を通るから，その方程式は

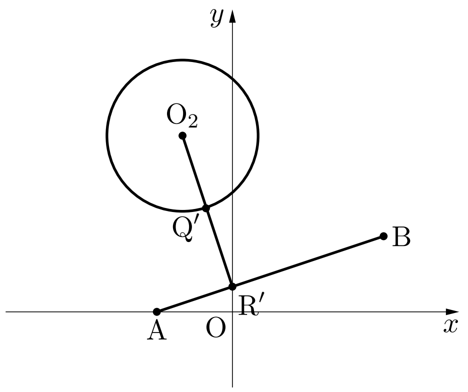
$$y=-3\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{7}{3} \quad \therefore\ \mathbf{9}x+\mathbf{3}y-1=0$$

である。l_1 と l_2 の交点 R' を求める。l_1 の方程式は $x=3y-1$ と書けるから，l_2 の方程式に代入して

$$9(3y-1)+3y-1=0 \quad \therefore\ y=\frac{1}{3},\ x=0$$

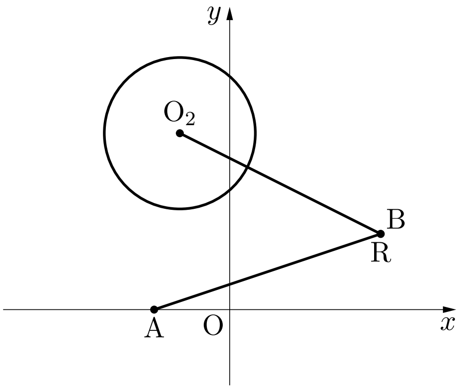
よって，交点は $\mathrm{R}'\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ である。点 A，B の x 座標は -1，2 であるから，この交点は線分 AB を 1 : **2** に内分する。

円 C_2 の中心を $\mathrm{O_2}$ とする。直線 l_2 と円 C_2 の交点のうち，R' との距離が小さい方を Q' とする。このとき線分 $\mathrm{Q'R'}$ の長さが線分 QR の長さの最小値になる。



よって，線分 QR の最小値は円 C_2 の中心を $\mathrm{O_2}$ とすると

$$\mathrm{O_2R'}-\mathrm{O_2Q'}=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{3}\right)^2}-1$$
$$=\frac{\mathbf{2\sqrt{10}}}{\mathbf{3}}-1$$



である。線分 QR の長さは，点 R が円から遠ざかるほど大きくなる。点 R は線分 AB 上の点であるから円から一番遠ざかるのは，点 R が点 B に一致するときである。よって，求める点 R の座標は $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$ であり，最大値は $(\mathrm{O_2R}$の長さ $+$ 円 C_2の半径$)$ である。つまり

$$\sqrt{\left(-\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{7}{3}-1\right)^2}+1=\frac{\mathbf{4\sqrt{5}}}{\mathbf{3}}+1$$

である。

チ，ツ	$9, 3$
テ	2
$\dfrac{\text{ト}\sqrt{\text{ナニ}}}{\text{ヌ}}-1$	$\dfrac{2\sqrt{10}}{3}-1$
（ネ，ノ）	$(2, 1)$
$\dfrac{\text{ハ}\sqrt{\text{ヒ}}}{\text{フ}}+1$	$\dfrac{4\sqrt{5}}{3}+1$

2018 年度 センター試験 本試験 数学II

作成日：2018 年 1 月 14 日（日）

第 4 問　3 次方程式の解と多項式の除法

出 題 範 囲	複素数と方程式
難　易　度	★★★☆☆
所 要 時 間	13 分
傾向と対策	(1) は実数を係数にもつ多項式に関する基本的な理解と，多項式の除法について問われた。(2) では，筆算を行ってもよいが剰余の定理を用いれば計算がぐっと楽になるだろう。

解説

(1) 方程式 $P(x)=0$ が，$-1+\sqrt{6}i$ を解にもつとき

$$P(-1+\sqrt{6}i)=(-1+\sqrt{6}i)^3+a(-1+\sqrt{6}i)^2+b(-1+\sqrt{6}i)+c$$
$$=\mathbf{-5}a-b+c+\mathbf{17}+(\mathbf{-2}a+b-\mathbf{3})\sqrt{6}i$$
$$=0$$

である。実部と虚部の係数がそれぞれ 0 である必要があるので

$$\begin{cases} -5a-b+c+17=0 \\ -2a+b-3=0 \end{cases}$$

$$\therefore b=\mathbf{2}a+\mathbf{3},\ c=\mathbf{7}a-\mathbf{14}$$

$P(x)$ の各項の係数は全て実数であることから，$-1+\sqrt{6}i$ の共役複素数 $-1-\sqrt{6}i$ も $P(x)=0$ の解となる。ここで $-1\pm\sqrt{6}i$ を解とする 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 であるものは，解と係数の関係より，

$$x^2-(-1+\sqrt{6}i+-1-\sqrt{6}i)x+(-1+\sqrt{6}i)(-1-\sqrt{6}i)=0$$
$$\therefore x^2+\mathbf{2}x+\mathbf{7}=0$$

である。この方程式の左辺は $P(x)$ を割り切るから，

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$
$$= x^3 + ax^2 + (2a+3)x + 7a - 14$$
$$= (x^2 + 2x + 7)(x + a - 2)$$

よって $P(x)$ を $x^2 + 2x + 7$ で割ったとき，その商は $x + a - \mathbf{2}$ であり，余りは $\mathbf{0}$ である。
よって方程式 $P(x) = 0$ の実数解は

$$x = -a + \mathbf{2}$$

と表せる。

アイ $a-b+c+$ ウエ	$-5a-b+c+17$
オカ $a+b-$ キ	$-2a+b-3$
ク $a+$ ケ	$2a+3$
コ $a-$ サシ	$7a-14$
x^2+ ス $x+$ セ	x^2+2x+7
$x+a-$ ソ	$x+a-2$
タ	0
チ $a+$ ツ	$-a+2$

(2) $P(x)$ を $x + a - 3$ で割ったときの商を $q(x)$ とすると

$$P(x) = q(x)(x + a - 3) + 6$$

と書ける。剰余の定理より，両辺に $x = -a + 3$ を代入すると

$$P(-a+3) = 6$$
$$(-a+3)^3 + a(-a+3)^2 + (2a+3)(-a+3) + 7a - 14 = 6$$
$$\therefore a^2 - 8a + 22 = 6$$
$$a^2 - 8a + 16 = 0$$
$$(a-4)^2 = 0$$
$$\therefore a = \mathbf{4}$$

このとき $P(x) = x^3 + 4x^2 + 11x + 14$ となる。
$Q(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ とすると，

$$P(x) = Q(x)(x-1) + 13x + 17$$
$$x^3 + 4x^2 + 11x + 14 = (x^2 + \alpha x + \beta)(x-1) + 13x + 17$$
$$x^3 + 4x^2 + 11x + 14 = x^3 + (\alpha - 1)x^2 + (-\alpha + \beta + 13)x - \beta + 17$$
$$\therefore \alpha = 5, \beta = 3$$

以上より，$Q(x) = x^2 + \mathbf{5}x + \mathbf{3}$ である。

テ	4
x^2+ ト $x+$ ナ	x^2+5x+3