2015 年度 センター試験 本試験 数学 II·B

第 1 問

〔1〕

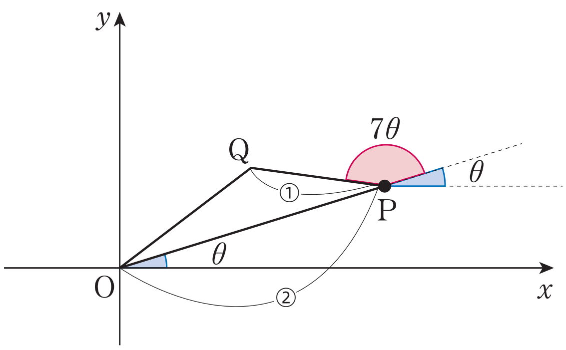
出題範囲	三角関数
難易度	★★☆☆☆
所要時間	10 分
傾向と対策	パッと見たときに 7θ が出てくるのでびっくりしてしまうような問題である。三角関数の問題全般にいえることであるが，実際に座標軸と円を描いてみるとイメージがつかみやすいので実践してもらいたい。全体としては標準問題である。

〔1〕 正解は

ア 2　イ 1　ウ 5　エ 4　オ 6　カ 4　キ 5　ク ③　ケ 6
コ 3　サ 2　シ 9

解説

(1)



$\overrightarrow{OP}=(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$\overrightarrow{PQ}=(\cos 7\theta,\ \sin 7\theta)$ である

ので

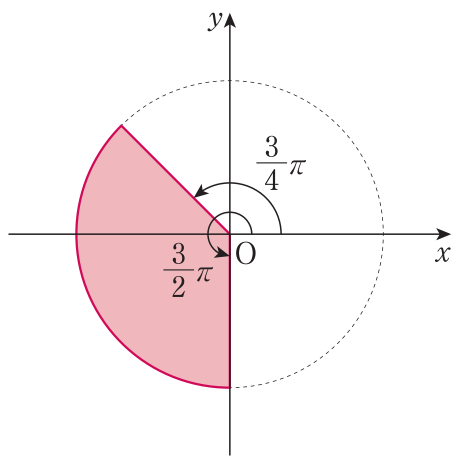
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2&=(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2\\&=4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\\&=4\end{aligned}$$

$\therefore\ OP=2$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2&=(\cos 7\theta)^2+(\sin 7\theta)^2\\&=1\end{aligned}$$

$\therefore\ PQ=1$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OQ}|^2&=(2\cos\theta+\cos 7\theta)^2+(2\sin\theta+\sin 7\theta)^2\\&=4+1+4(\cos\theta\cos 7\theta+\sin\theta\sin 7\theta)\\&=5+4(\cos(-\theta)\cos 7\theta-\sin(-\theta)\sin 7\theta)\\&=5+4\cos(7\theta+(-\theta))\\&=5+4\cos 6\theta\end{aligned}$$



$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{3}{4}\pi\leqq 6\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ となり，右図より

$$OQ^2=5+4\cos 6\theta\leqq 5+4\cos\frac{3}{2}\pi=5$$

よって OQ は $6\theta = \frac{3}{2}\pi$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $\sqrt{5}$ をとる。

ア	2
イ	1
ウ，エ，オ	5，4，6
カ	4
$\sqrt{キ}$	$\sqrt{5}$

(2)

直線 OP は $(x, y) = (0, 0)$ と $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ を通るので直線 OP の方程式

を $ax + by + c = 0$ とおいて 2 点の座標を代入すると

$$\begin{cases} c = 0 \\ 2a\cos\theta + 2b\sin\theta = 0 \end{cases}$$

これが任意の θ で成立するので $a : b = \sin\theta : -\cos\theta$ である。

よって直線 OP の方程式は $\mathbf{(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0}$ となり 3 点 O，P，Q が一直線上にあるとき Q は直線 OP 上に乗りその方程式を満たすので

$$\begin{aligned} &\sin\theta(2\cos\theta + \cos 7\theta) - \cos\theta(2\sin\theta + \sin 7\theta) \\ &\quad = \sin\theta\cos 7\theta - \cos\theta\sin 7\theta \\ &\quad = \sin\theta\cos(-7\theta) + \cos\theta\sin(-7\theta) \\ &\quad = \sin(\theta - 7\theta) \\ &\quad = -\sin 6\theta \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

$\frac{3}{4}\pi \leqq 6\theta \leqq \frac{3}{2}\pi$ の範囲で $\sin 6\theta = 0$ となるのは $6\theta = \pi$ のときだけであるので $\theta = \frac{\pi}{6}$

である。

ク	③
$\frac{\pi}{ケ}$	$\frac{\pi}{6}$

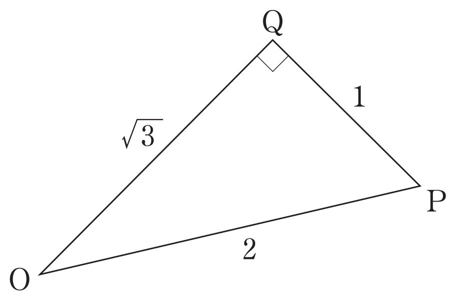
(3)

三平方の定理より $OQ = \sqrt{3}$

また，(1)より $OQ^2 = 5 + 4\cos 6\theta$ であるので

$$(\sqrt{3})^2 = 5 + 4\cos 6\theta$$

$$\therefore \quad \cos 6\theta = -\frac{1}{2}$$



$\frac{3}{4}\pi \leqq 6\theta \leqq \frac{3}{2}\pi$ の範囲でこれを満たすのは $6\theta = \frac{4}{3}\pi$

すなわち $\theta = \frac{2}{9}\pi$ のときだけである。

$\sqrt{コ}$	$\sqrt{3}$
$\frac{サ}{シ}$	$\frac{2}{9}$

〔2〕

出題範囲	指数関数／対数関数
難易度	★☆☆☆☆
所要時間	5 分
傾向と対策	非常に基本的な問題である。(2)は相加・相乗平均のところでやや戸惑ってしまうかもしれないが，問題文の誘導がどこを指しているのかを丁寧に追っていくことですんなりと解くことができる。相加・相乗平均については頻出の項目なので，式の内容と等号成立の条件はしっかりと覚えておこう。

〔2〕 正解は

ス　2　　セ　－（マイナス）　　ソ　3　　タ　2　　チ　－（マイナス）　　ツ　2　　テ　3

ト　－（マイナス）　　ナ　2　　ニ　2　　ヌ　2　　ネ　－（マイナス）　　ノ　5　　ハ　4

解説

(1)

$$(*)\begin{cases} x\sqrt{y^3} = a & \cdots\cdots① \\ \sqrt[3]{x}\,y = b & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①の両辺を 2 乗し，②の両辺を 3 乗すると以下のようになる。

$$\begin{cases} x^2y^3 = a^2 & \cdots\cdots③ \\ xy^3 = b^3 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

$a \neq 0$，$b \neq 0$ に注意して③を④で割ると

$$\frac{x^2y^3}{xy^3} = x = \frac{a^2}{b^3} = a^{2} \cdot b^{-3}$$

となり，これを④に代入すれば

$$y^3 = \frac{b^3}{x} = a^{-2} \cdot b^6 \qquad \therefore \quad y = a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{2}$$

であるとわかる。

ス，セソ	2，-3
タ	2
$\dfrac{\text{チツ}}{\text{テ}}$	$\dfrac{-2}{3}$

(2)

$b = 2\sqrt[3]{a^4} = 2a^{\frac{4}{3}}$ を(1)で求めた式に代入すると

$$\begin{cases} x = a^2\left(2a^{\frac{4}{3}}\right)^{-3} = a^2 \cdot 2^{-3} \cdot a^{-4} = 2^{-3} \cdot a^{-2} \\ y = a^{-\frac{2}{3}}\left(2a^{\frac{4}{3}}\right)^2 = a^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^2 \cdot a^{\frac{8}{3}} = 2^2 \cdot a^{2} \end{cases}$$

$a > 0$ に注意して相加・相乗平均を用いると

$$x + y \geqq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2^{-3} \cdot a^{-2} \cdot 2^2 \cdot a^2} = 2\sqrt{2^{-1}} = \sqrt{2^2 \cdot 2^{-1}} = \sqrt{2}$$

等号成立は $x=y$ のときなので

$$2^{-3}\cdot a^{-2}=2^{2}\cdot a^{2}\quad\Leftrightarrow\quad a=2^{-\frac{5}{4}}$$

である。

トナ	-2
ニ	2
$\sqrt{\text{ヌ}}$	$\sqrt{2}$
$\dfrac{\text{ネノ}}{\text{ハ}}$	$\dfrac{-5}{4}$

（制作：上田篤，江崎ゆり子）

2015 年度 センター試験 本試験 数学 II·B

第２問

出題範囲	微分・積分
難易度	★★★★☆
所要時間	15 分
傾向と対策	(1) センター試験ではあまり問われてこなかった内容なので戸惑った受験生が多かったようである。定義からしっかりと覚えていればなんの変哲もない問題で，あやふやなまま勉強しているとペースを崩されてしまうという，差が付きやすい問題であったと思われる。このような問題で足元をすくわれないためには，普段の勉強から教科書の内容を隅々まで理解しておくしかないだろう。実際センター試験は毎年のように少しずつ形式や傾向を変えており，本問のように，**以前狙われていないものがいきなり問われることが多い**のである。過去問や予想問題集で勉強することも大事だが，教科書に戻って穴がないか確認することもおこたらないようにするべきである。 (2) 例によって，2 次関数や 3 次関数のグラフを題材にして，変数をおき，面積を求め，その最大最小を考える問題である。このような問題は誘導がはっきりしているため，まず全体に目を通し，作問者がどういう流れで解かせようとしているのか把握すると計算の見通しが立ちやすい。その際グラフをアバウトにでも描いておくとベターだろう。 やるべきことはほとんど問題に書いてあるので，後は計算をいかに早くやるかということになる。センター試験に限らず，積分によって面積を求める問題は，どのようにしたら面倒な計算を避け簡単にできるかを考えることが重要である。最初に思い付いた解法でいくと計算が煩雑になりそうなら，立ち止まってうまく求める方法を考えれば計算ミスを減らせ，結果的に時間短縮ができることも多い。急がば回れである。解答には別解を示しておいたので参考にしてほしい。

正解は

ア a　イ 2　ウ 0　エ a　オ a　カ 2　キ a　ク 2

ケ －（マイナス）　コ 1　サ a　シ 1　ス 2　セ 1　ソ 8　タ 3

チ 1　ツ 2　テ 3　ト 2　ナ 4　ニ 3　ヌ 1　ネ －（マイナス）

ノ 1　ハ 1　ヒ 2

解説

(1)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

であり，(平均変化率) $= \dfrac{(y\text{ の増加量})}{(x\text{ の増加量})}$ であるから，x が a から $a+h$ まで変化するときは

$$(\text{平均変化率}) = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{\frac{1}{2}\{(a+h)^2-a^2\}}{h} = \frac{2ah+h^2}{2h}$$
$$= \boldsymbol{a} + \frac{h}{\boldsymbol{2}}$$

ア，イ	$\boldsymbol{a}$，**2**
ウ	**0**
エ	$\boldsymbol{a}$

である。よって a における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{h \to \boldsymbol{0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \lim_{h\to 0}\left(a+\frac{h}{2}\right) = \boldsymbol{a}$$

である。

(2)

$$C : y = \frac{1}{2}x^2,\ a > 0$$

であり，(1)より $y' = x$ である。点 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ における接線の方程式 l は

$$l : y = f'(a)(x-a) + f(a) = a(x-a) + \frac{1}{2}a^2 = \boldsymbol{a}x - \frac{1}{\boldsymbol{2}}a^2$$

である。

次に直線 l と x 軸（$y=0$）の交点 Q を求める。

l の式に $y=0$ を代入すれば

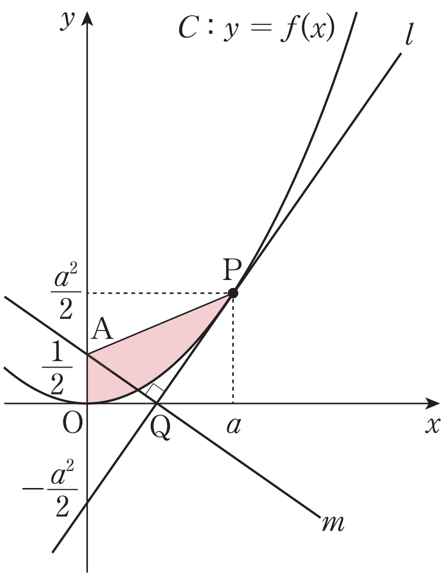
$ax - \frac{1}{2}a^2 = 0$ すなわち $x = \frac{a}{2}$ となる（$a > 0$ に注意しよう）。

よって点 $\mathrm{Q}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}},\ 0\right)$ である。

点 $\mathrm{Q}\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ を通り，直線 l（傾き a）に垂直な直線 m（つまり傾き $-\frac{1}{a}$）の方程式は

$$m : y = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right) = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}x + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}$$

である。



△APQ の面積 S を求める。$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{a^2}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ より

$$\mathrm{AQ} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2 + \left(0-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+1}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$$
$$\mathrm{PQ} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-a\right)^2 + \left(0-\frac{a^2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+a^4}{4}}$$
$$= \frac{a\sqrt{a^2+1}}{2} \qquad (\because\ a > 0)$$

l と m は直交するので $\angle\mathrm{PQA} = 90°$ であることを利用すれば

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{a^2+1}}{2}=\frac{a(a^2+1)}{8}$$

であるとわかる。

y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積 T を求める。

直線 AP の y 切片は $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ であるので，その方程式は $a \neq 0$ に注意すると

$$y=\frac{\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}}{a-0}x+\frac{1}{2}=\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}$$

である。面積 T は直線 AP と曲線 C の差を $0 \leqq x \leqq a$ の範囲で積分すればいいので

$$\begin{aligned}T&=\int_0^a\left\{\left(\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}x^2\right\}dx\\&=\left[\frac{a^2-1}{4a}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3\right]_0^a\\&=\frac{a(a^2-1)}{4}+\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}a^3\\&=\frac{3a(a^2-1)+6a-2a^3}{12}\\&=\frac{a(a^2+3)}{12}\end{aligned}$$

オ，カ	a，2
$\frac{キ}{ク}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{ケコ}{サ}$，$\frac{シ}{ス}$	$\frac{-1}{a}$，$\frac{1}{2}$
セ，ソ	1，8
タ，チツ	3，12
テ，トナ	3，24
$\sqrt{ニ}$	$\sqrt{3}$
ヌ	1
$\frac{ネノ}{ハヒ}$	$\frac{-1}{12}$

よって

$$\begin{aligned}S-T&=\frac{a(a^2+1)}{8}-\frac{a(a^2+3)}{12}\\&=\frac{a}{24}\{3(a^2+1)-2(a^2+3)\}\\&=\frac{a(a^2-3)}{24}=\frac{a(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}{24}\end{aligned}$$

$a>0$ なので $S-T>0$ となる a の値の範囲は $a>\sqrt{3}$ である。

$S-T$ の a による増減をしらべるために a で微分すると

$$\frac{d}{da}(S-T)=\frac{d}{da}\left(\frac{a^3-3a}{24}\right)=\frac{1}{8}(a^2-1)=\frac{1}{8}(a+1)(a-1)$$

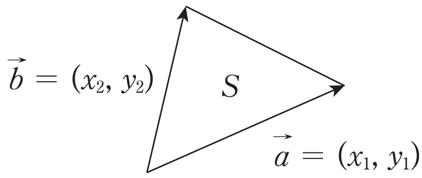
$a>0$ における $S-T$ の増減をまとめると下表のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{d}{da}(S-T)$	／	$-$	0	$+$
$S-T$	／	↘	極小	↗

よって $S-T$ は $a=1$ のとき最小値 $-\frac{1}{12}$ をとる。

別解

△APQ の面積 S の求め方



一般に平面ベクトルにおいて図のような 2 つのベクトル

$\vec{a} = (x_1,\ y_1)$, $\vec{b} = (x_2,\ y_2)$ によって張られる三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\left| x_1 y_2 - x_2 y_1 \right|$$

と求めることができる。今回の場合も $\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{2}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{QA}} = \left(-\frac{a}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ であることから S を

$$S = \frac{1}{2}\left| \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2\left(-\frac{a}{2}\right)\right| = \frac{a(a^2+1)}{8} \quad (\because\ \ a > 0)$$

と機械的に求めることができる。

◆ポイント

微分係数の定義

関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は，平均変化率

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

の $b \to a$ のときの極限値

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

である。ここで $b - a = h$ とおくと，$b = a + h$ となり，$b \to a$ と $h \to 0$ は同値なので，

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

とも表すことができる。

（制作：上田篤，江崎ゆり子）

2015 年度 センター試験 本試験 数学 II·B

第 3 問

出題範囲	数列
難易度	★★★★☆
所要時間	15 分
傾向と対策	計算自体はあまり面倒ではないが問題の誘導の意味を理解できたかによって差が付いた問題である。循環する数列に気づきにくい人の場合は第 6 項，第 7 項とさらに実験してみるのもいいだろう。これに素早く気づけるかどうかがこの問題のカギになっている。出題ミスに関しては本番中気づいた受験者も少ないだろうから気にしなくてもよい。(2)の b_n に関する漸化式は直前の“①を繰り返し用いることにより”という言葉に気づかないと厳しいかもしれない。センター試験はこのような問題ばかりであるので，過去問演習を積む中でちょっと詰まったときには問題文の中に読み飛ばした部分はないかをチェックしてみよう。

正解は

ア 4	イ 8	ウ 6	エ 2	オ ⓪または③	カ 8	キ 7	ク 3
ケ 2	コ 3	サ 2	シ 1	ス 2	セ 1	ソ 2	タ 6
チ 6	ツ 4	テ 4	ト 2	ナ 2	ニ 8	ヌ 1	ネ 3

解説

(1)

2^n は順に 2，4，8，16，32，64，…なので

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = 6,\ a_5 = 2$$

である。

ここで $a_1 = a_5$ であることに注目しよう。a_{n+1} は $2a_n$ の一の位なので一度同じ数字が出現するとそれ以降は繰り返しになる（a_6 は $2a_5 = 4$ とも出せて，これは $2^6 = 64$ という結果と一致する）。

よって $a_1 = a_5 = a_9 = \cdots$と 4 つごとの繰り返しであるとわかるので

③ $\boldsymbol{a_{n+4} = a_n}$ である（ただし $5n - n = 4n$ は 4 の倍数なので⓪も可）。

ア	4
イ	8
ウ	6
エ	2
オ	⓪または③

(2)

$b_{k+1} = \dfrac{a_k b_k}{4}$ より，$k = n+3,\ n+2,\ n+1,\ n$ の場合を代入して変形すると

$$b_{n+4}=\frac{a_{n+3}}{4}b_{n+3}=\frac{a_{n+3}}{4}\left(\frac{a_{n+2}}{4}b_{n+2}\right)=\frac{a_{n+3}a_{n+2}}{4^2}\left(\frac{a_{n+1}}{4}b_{n+1}\right)=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}}{4^3}\left(\frac{a_n}{4}b_n\right)$$
$$=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{4^4}b_n=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{2^8}b_n$$

となる。a_n は 4 つごとの繰り返しなので

$$a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n=a_4a_3a_2a_1=6\times 8\times 4\times 2=3\cdot 2^7$$

である。

これを上の式に代入すれば

$$b_{n+4}=\frac{3\cdot 2^7}{2^8}b_n=\frac{3}{2}b_n \quad \cdots\cdots①$$

とわかる。問題文の条件より

$$b_1=1,\ b_2=\frac{a_1b_1}{4}=\frac{2\cdot 1}{4}=\frac{1}{2},\ b_3=\frac{a_2b_2}{4}=\frac{4\cdot\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{2},\ b_4=\frac{a_3b_3}{4}=\frac{8\cdot\frac{1}{2}}{4}=1$$

である。

この結果と①の結果を用いれば，等比数列と同じ要領で，一般に b_n は k を自然数としたとき

$$\begin{cases} b_{4k-3}=b_{4(k-1)+1}=\frac{3}{2}b_{4(k-2)+1}=\cdots=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_1=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ b_{4k-2}=b_{4(k-1)+2}=\frac{3}{2}b_{4(k-2)+2}=\cdots=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ b_{4k-1}=b_{4(k-1)+3}=\frac{3}{2}b_{4(k-2)+3}=\cdots=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_3=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ b_{4k}=b_{4(k-1)+4}=\frac{3}{2}b_{4(k-2)+4}=\cdots=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_4=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \end{cases} \quad \cdots\cdots②$$

となる（上の表示においてわかりやすさを追求するため計算の途中過程 $(k-2)$ を登場させている。厳密には $k\geqq 2$ でなければならないが，$k\geqq 1$ でも成立することは容易に示すことができるのであまり気にする必要はない）。

カ	8
キ	7
ク/ケ	3/2
コ/サ	3/2
シ/ス	1/2
セ/ソ	1/2

(3)

$$S_{4m}=\sum_{k=1}^{4m}b_k=\sum_{j=1}^{m}(b_{4j}+b_{4j-1}+b_{4j-2}+b_{4j-3})=\sum_{j=1}^{m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$
$$=\sum_{j=1}^{m}3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=3\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^m-1}{\frac{3}{2}-1}$$
$$=6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^m-6$$

タ	6
チ	6

(4)

②より

$$b_{4k}b_{4k-1}b_{4k-2}b_{4k-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(k-1)}$$

であるので

$$T_{4k}=b_{4k}b_{4k-1}b_{4k-2}b_{4k-3}\,T_{4(k-1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(k-1)}T_{4(k-1)}$$

という漸化式が立つ（$k\geqq 2$）。

これを利用すれば

$$T_{4m}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(m-1)}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(m-2)}\cdots T_4$$

ここで，$T_4=b_1b_2b_3b_4=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$ であるので

$$T_{4m}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(m-1)}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(m-2)}\cdots\frac{1}{4}=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{p}$$

ただし $p=\sum_{j=1}^{m}4(j-1)=4\cdot\frac{(m-1)m}{2}=2m^2-2m$ 　である。

②より

$b_9=\left(\frac{3}{2}\right)^2$，$b_{10}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2$ であることを用いると

$$T_{10}=b_{10}\cdot b_9\cdot T_8=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot T_{4\cdot 2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{4^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{(2\cdot 2^2-2\cdot 2)}=\frac{3^8}{2^{13}}$$

となる。

ツ	4
テ	4
ト，ナ	2，2
ニ，ヌネ	8，13

（制作：上田篤，江崎ゆり子）

2015 年度 センター試験 本試験 数学 II·B

第 4 問

出題範囲	ベクトル
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	平面ベクトルの標準的な問題である。内分外分の公式を用いてベクトルを表していくことができれば簡単にこなせるだろう。最後の面積比較の問題は図を書いて底辺や高さの比を丁寧に見ていけばよい。

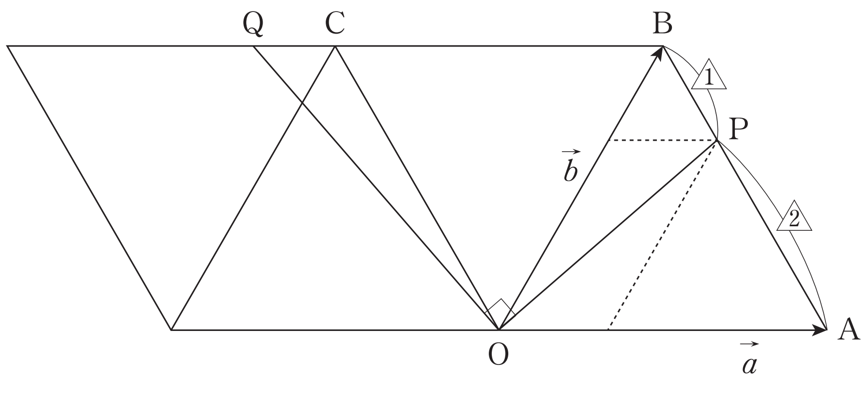
正解は

ア 1	イ 3	ウ 2	エ −（マイナス）	オ 1	カ 2	キ 0	ク 5
ケ 4	コ 7	サ 3	シ 2	ス 1	セ 4	ソ 7	タ 3
チ 2	ツ 4	テ 7	ト 9	ナ 1	ニ 3	ヌ −（マイナス）	ネ 7
ノ 3	ハ 6	ヒ 7	フ 9	ヘ 2	ホ 1		

解説

(1)

△OPQ の面積を求める。



図より $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

Q は直線 BC 上にあるから実数 t を用いて以下のように表される。

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\,\overrightarrow{OB} + t\,\overrightarrow{OC}$$

ここで図より以下のことがわかる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}\\ &= -\vec{a} + \vec{b}\\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (1-t)\vec{b} + t(-\vec{a} + \vec{b})\\ &= -t\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

ここで

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB} = 1\cdot 1\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

である。

条件より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 0$ である。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot(-t\vec{a} + \vec{b})\\ &= -\frac{t}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{1-2t}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{2}{3}|\vec{b}|^2\\ &= -\frac{t}{3} + \frac{1}{6} - \frac{t}{3} + \frac{2}{3}\\ &= -\frac{2}{3}t + \frac{5}{6}\end{aligned}$$

これが 0 になればよいので,

$$t = \frac{5}{4}$$

したがって

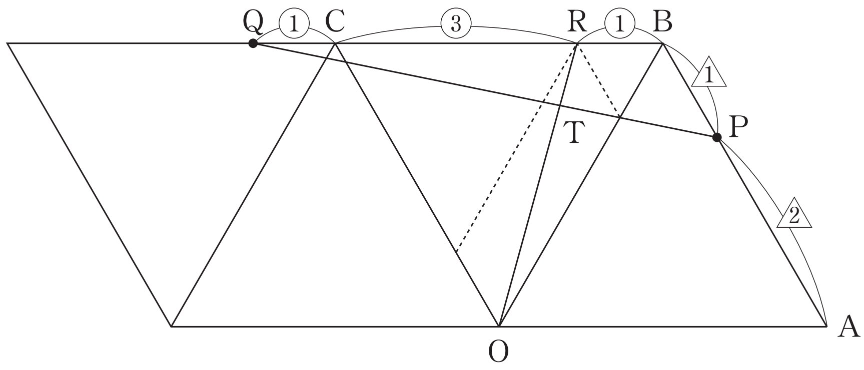
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| &= \sqrt{\left|\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right|^2} = \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2}\\ &= \frac{1}{3}\sqrt{1+2+4}\\ &= \frac{\sqrt{7}}{3}\\ |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| &= \sqrt{\left|-\frac{5}{4}\vec{a} + \vec{b}\right|^2} = \frac{1}{4}\sqrt{25|\vec{a}|^2 - 40\vec{a}\cdot\vec{b} + 16|\vec{b}|^2}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{25-20+16}\\ &= \frac{\sqrt{21}}{4}\end{aligned}$$

$\angle\mathrm{POQ} = 90^\circ$ なので

$$S_1 = \triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{4} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$\frac{ア}{イ}$, $\frac{ウ}{3}$	$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$
エ	$-$
$\frac{オ}{カ}$	$\frac{1}{2}$
キ	0
$\frac{キ}{ク}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{\sqrt{コ}}{サ}$	$\frac{\sqrt{7}}{3}$
$\frac{\sqrt{シス}}{セ}$	$\frac{\sqrt{21}}{4}$
$\frac{ソ\sqrt{タ}}{チツ}$	$\frac{7\sqrt{3}}{24}$

(2)



R は辺 BC を 1：3 に内分し，T は直線 OR の点かつ直線 PQ 上の点であるので，実数 r，s を用いて以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}} &= r\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\ &= (1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

また，図より以下の 2 式が得られる。

$$\begin{aligned}r\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= r\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\ &= r\left\{\frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a})\right\}\\ &= -\frac{r}{4}\vec{a} + r\vec{b} \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

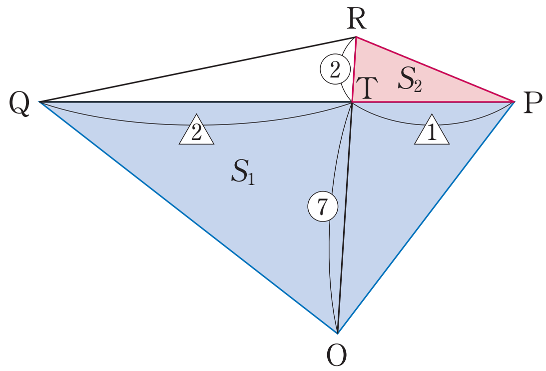
(もしくは $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BR}} = \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$ としてもよい)

$$\begin{aligned}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + s\left(-\frac{5}{4}\vec{a} + \vec{b}\right)\\ &= \left(\frac{1-s}{3} - \frac{5}{4}\right)\vec{a} + \left\{\frac{2(1-s)}{3} + s\right\}\vec{b} \quad \cdots\cdots ③\\ &= \frac{4-19s}{12}\vec{a} + \frac{2+s}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立なので，①②③より以下が得られる。

$$\begin{cases} -\dfrac{r}{4} = \dfrac{4-19s}{12} \\ r = \dfrac{2+s}{3} \end{cases}$$

したがって $r = \mathbf{\frac{7}{9}}$，$s = \mathbf{\frac{1}{3}}$ である。



②より

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = r\overrightarrow{\mathrm{OR}} = -\mathbf{\frac{7}{36}}\vec{a} + \mathbf{\frac{7}{9}}\vec{b}$$

$\frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{PQ}} = S_1$　$\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OR}} = r$ の値から右図が描ける。

底辺の比と高さの比から面積比を考えると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \triangle\mathrm{PRT} \\
&= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{PRQ} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\triangle\mathrm{OPQ}\ (\because\ \text{底辺 PQ 共通}) \\
&= \frac{2}{21}S_1
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$S_1 : S_2 = \mathbf{21} : 2$$

$\frac{テ}{ト}$	$\mathbf{\frac{7}{9}}$
$\frac{ナ}{ニ}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$
$\frac{ヌネ}{ノハ}$	$\mathbf{\frac{-7}{36}}$
$\frac{ヒ}{フ}$	$\mathbf{\frac{7}{9}}$
ヘホ	**21**

（制作：上田篤，江崎ゆり子）

2015 年度 センター試験 本試験数学 II・B

第 5 問

出題範囲	確率分布と統計
難易度	★★☆☆☆
所要時間	10 分
傾向と対策	(1)は非常に標準的な問題である。組み合わせの計算にしっかり慣れて素早く解くことができれば，ほかの問題に割く時間が確保できるだろう。(2)以降は確率分布に関する基本的な事項をしっかり覚えているかで大きな差が付く問題である。覚えていればほかの問題より明らかに早く解くことができる。(2)の 2.58 の値は覚えていても良い。(3)に関しても信頼区間の定義をしっかり覚えておけば特に問題はないだろう。覚えている知識を整理して冷静に使いこなせるように問題演習を行うと良いだろう。

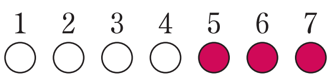
正解は

ア 1	イ 3	ウ 5	エ 1	オ 2	カ 1	キ 8	ク 4	ケ 1
コ 2	サ 7	シ 2	ス 4	セ 4	ソ 9	タ ③	チ 1	ツ 3
テ 0	ト 5							

解答

(1)

白球 4 個と赤球 3 個があるとき，すべての球に番号を振る。



以下，同じ色の球であっても，番号が異なれば違うものとみなす。

このとき 3 つの球の選び方（全事象）は ${}_7C_3 = 35$ 通りである。

$W = 0$ のとき

 ← 選ばれる球

赤 3 個から 3 個を選べばいいので ${}_3C_3 = 1$ 通りである。

$$\therefore \quad P(W = 0) = \frac{1}{35}$$

$W = 1$ のとき

 ← 選ばれる球

白 4 個から 1 個，赤 3 個から 2 個を選べばいいので ${}_4C_1 \cdot {}_3C_2 = 12$ 通りである。

$$\therefore \quad P(W=1) = \frac{12}{35}$$

$W = 2$ のとき

○ ○ ● ← 選ばれる球

白 4 個から 2 個，赤 3 個から 1 個を選べばいいので ${}_4C_2 \cdot {}_3C_1 = 18$ 通りである。

$$\therefore \quad P(W=2) = \frac{18}{35}$$

$W = 3$ のとき

○ ○ ○ ← 選ばれる球

白 4 個から 3 個を選べばいいので ${}_4C_3 = 4$ 通りである。

$$\therefore \quad P(W=3) = \frac{4}{35}$$

期待値は（W の値）×（その確率）の総和であるので

$$\begin{aligned}(\text{期待値}) &= 0 \cdot P(W=0) + 1 \cdot P(W=1) + 2 \cdot P(W=2) + 3 \cdot P(W=3)\\ &= 0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35}\\ &= \frac{12}{7}\end{aligned}$$

である。

分散は（平均からの偏差の 2 乗）×（その確率）の総和であるので

$$\begin{aligned}(\text{分散}) &= \left(0 - \frac{12}{7}\right)^2 \cdot P(W=0) + \left(1 - \frac{12}{7}\right)^2 \cdot P(W=1)\\ &\quad + \left(2 - \frac{12}{7}\right)^2 \cdot P(W=2) + \left(3 - \frac{12}{7}\right)^2 \cdot P(W=3)\\ &= \frac{144}{49} \cdot \frac{1}{35} + \frac{25}{49} \cdot \frac{12}{35} + \frac{4}{49} \cdot \frac{18}{35} + \frac{81}{49} \cdot \frac{4}{35}\\ &= \frac{24}{49}\end{aligned}$$

$\frac{\text{ア}}{\text{イウ}}$	$\frac{1}{35}$
エオ	12
カキ	18
ク	4
$\frac{\text{ケコ}}{\text{サ}}$	$\frac{12}{7}$
$\frac{\text{シス}}{\text{セソ}}$	$\frac{24}{49}$

また分散は（2 乗の期待値）－（期待値の 2 乗）で求めることができるので

$$(\text{分散}) = 0^2 \cdot P(W=0) + 1^2 \cdot P(W=1) + 2^2 \cdot P(W=2) + 3^2 \cdot P(W=3) - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$$

と簡単に求めることも可能である。

(2)

標準正規分布は y 軸対称なので

$$P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0) = 2P(0 \leqq Z \leqq z_0) = 0.99$$

$P(0 \leqq Z \leqq z_0)$ が正規分布表の値なので，この値が 0.495 の z_0 を探すと

$2.57 < z_0 < 2.58$ である。よって③の 2.58 が最も近い。

タ	③

(3)

同様に $P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0) = 0.95$（信頼度 95%）の z_0 を表より読み取ると $z_0 = 1.96$ である。

標本平均を $\overline{X}$ とすると、母平均 m の信頼区間は

$$\overline{X} - \frac{z_0\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + \frac{z_0\sigma}{\sqrt{n}}$$

であり、その幅は $\dfrac{2z_0\sigma}{\sqrt{n}}$ である。

信頼度 95%のとき $z_0 = 1.96$ であるから

$$L_1 = 1.96 \cdot \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

信頼度 98%のとき $z_0 = 2.58$ であるから

$$L_2 = 2.58 \cdot \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

したがって

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{2.58}{1.96} = 1.316\cdots$$

となる。よって一番近い **1.3** が答えとなる。

一方，$L_3 = 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{4n}} = 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{2\sqrt{n}}$ なので

$$\frac{L_3}{L_1} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}$$

と求められる。

チ.ツ	**1.3**
テ.ト	**0.5**

（制作：上田篤，江崎ゆり子）