

2014 年度 センター試験 本試験 数学 II・B

第 1 問

(1)

出題範囲	図形と方程式
難易度	★★★★☆☆
所要時間	10 分
傾向と対策	第 1 問にしては内容的に分量が多いものである。直線が垂直に交わる条件，点と直線の距離の公式，円の方程式などの事項を抜けなく覚えているとすんなり解けるのではないかな。ただ(3)の外分はイメージをもちにくい人も多いと思うので，その場合は迷わず図を描いてみるといいだろう。

(1) 正解は

ア 3 イ 4 ウ 3 エ 4 オ 4 カ 3 キ 2 ク 2 ケ 1
 コ 1 サ 4 シ 2 ス 4 セ ④

解説

(1)

互いに直交する直線の傾きの積は -1 であり，直線 l の傾きが $\frac{4}{3}$ なので，これに垂直な直線の傾きは $-\frac{3}{4}$ である。

この 2 直線の交点は

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = -\frac{3}{4}(x-p) + q \end{cases}$$

を満たすのでこの連立方程式を解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{25}(3p + 4q) \\ y &= \frac{4}{25}(3p + 4q) \end{aligned}$$

と求められる。

一般に直線 $ax + by + c = 0$ と点 (x_0, y_0) の距離 d は $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ と表されるので，

直線 l と点 P の距離は ($l: 4x - 3y = 0$ なので)

$$r = \frac{|4p - 3q|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}|4p - 3q| \quad \dots\dots ①$$

と求められる。

別解

半径 r は PQ の距離に等しいので,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left\{\frac{3}{25}(3p + 4q) - p\right\}^2 + \left\{\frac{4}{25}(3p + 4q) - q\right\}^2} \\ &= \frac{1}{25}\sqrt{(-16p + 12q)^2 + (12p - 9q)^2} \\ &= \frac{1}{25}\sqrt{4^2(-4p + 3q)^2 + 3^2(4p - 3q)^2} \\ &= \frac{1}{25}\sqrt{4^2(4p - 3q)^2 + 3^2(4p - 3q)^2} \\ &= \frac{1}{25}\sqrt{5^2(4p - 3q)^2} \\ &= \frac{1}{5}|4p - 3q| \end{aligned}$$

ア イ	$\frac{3}{4}$
ウ, エ	3, 4
オ, カ	4, 3

(2)

円 C は x 軸に接するので, $r = q$

これと①を連立すると

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{5}|4p - 3q| \\ \Leftrightarrow 5q &= |4p - 3q| \\ \Leftrightarrow 5q &= \pm|4p - 3q| \\ \Leftrightarrow p &= 2q, \quad -\frac{1}{2}q \end{aligned}$$

このうち $p > 0$, $q > 0$ を満たすのは $p = 2q$ のみである。

円 C の式は $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ であり, 上で求めた結果と点 $R(2, 2)$ を通ることを用いて

$$(2 - 2q)^2 + (2 - q)^2 = q^2$$

式を整理すると, $4(q - 2)(q - 1) = 0$ となり $q = 1, 2$ が解となる。

$p = 2q$, $r = q$ に注意するとそれぞれの円 C の方程式は

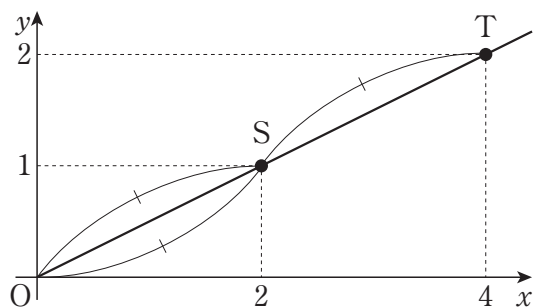
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 & (q = 1 \text{ のとき}) \\ (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4 & (q = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と求められる。

キ	2
ク, ケ, コ	2, 1, 1
サ, シ, ス	4, 2, 4

(3)

下図より、O は線分 ST を④ 1 : 2 に外分している。



セ ④

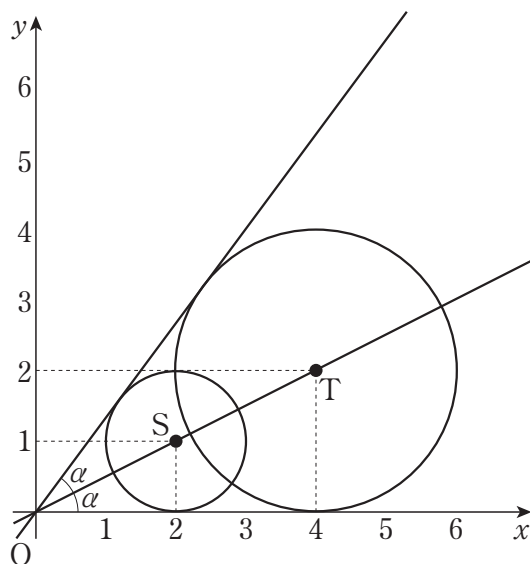
+α

$p = 2q$ つまり $q = \frac{p}{2}$ より、 x 軸と直線 $y = \frac{4}{3}x$ の両方に接する円の中心は $y = \frac{x}{2}$ 上に位置する。このことは

$\tan$ の加法定理を用いても理解される。つまり、 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ のとき、

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{3}$$

であるから、確かに、 $y = \frac{x}{2}$ は x 軸と直線 $y = \frac{4}{3}x$ のなす角の二等分線となっている。



(2)

出題範囲	指数関数／対数関数
難易度	★☆☆☆☆
所要時間	5 分
傾向と対策	対数の扱いに慣れているかが問われる問題となっている。対数は真数条件，底の変換などいろいろな事項を覚えておかなければいけないので大変であるが，毎年出る分野なのでマスターしてもらいたい。内容的には基本的なものばかりである。

(2) 正解は

ソ 3 タ 8 チ 2 ツ 3 テ 1 ト 0 ナ 1 ニ 2 ノ 3
 ネ 2 ノ 2 ハ 7 ヒ 5 フ 1 ヘ 6

解説 $m = 2, n = 1$ のときは

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \log_2 8 + \log_3 1 = 3 + 0 = 3$$

 $m = 4, n = 3$ のときは

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \log_2 64 + \log_3 9 = 6 + 2 = 8$$

である。また，

$$\begin{cases} \log_2 m^3 = 3 \log_2 m \\ \log_3 n^2 = 2 \log_3 n \end{cases}$$

であるので

$$3 \log_2 m + 2 \log_3 n \leq 3 \Leftrightarrow \log_2 m + \frac{2}{3} \log_3 n \leq 1$$

 $\log_3 n$ は n に関して単調増加であるので，最小の自然数 $n = 1$ において最小値 $\log_3 1 = 0$ をとる。また $\log_2 m \leq 1$ より $\log_2 m \leq \log_2 2$ である。ここで底 $2 > 1$ であるから， $m \leq 2$ 。よって $m = 1$ または $m = 2$ に限られる。 $m = 1$ のときは $\log_2 1 + \frac{2}{3} \log_3 n = \frac{2}{3} \log_3 n \leq 1$ より

$$\log_3 n \leq \frac{3}{2}$$

である。これを変形すると $2 \log_3 n = \log_3 n^2 \leq 3$ なので，

$$\log_3 n^2 \leq \log_3 3^3 = \log_3 27$$

ここで底 $3 > 1$ であるから， $n^2 \leq 27$ となる。

5 の 2 乗は 27 以下だが，6 の 2 乗は 27 を超えてしまうので， $n \leq 5$ でなければならないことがわかる。よって，自然数 m, n の組の個数は 5 となる。

$m = 2$ のときは $\log_2 2 + \frac{2}{3} \log_3 n = 1 + \frac{2}{3} \log_3 n \leq 1$ より, $\log_3 n \leq 0$ となり, これを

満たす自然数 n は $n = 1$ のみである。

よって, 自然数 m, n の組の個数は **1** となる。

したがって, 条件を満たす自然数 m, n の組の個数は合計 **6** であることがわかる。

ソ	3
タ	8
チ ツ	$\frac{2}{3}$
テ	1
ト	0
ナ	1
ニ	2
ヌ ネ	$\frac{3}{2}$
ノハ	27
ヒ	5
フ	1
ヘ	6

(制作：上田篤，江崎ゆり子)

2014 年度 センター試験 本試験 数学 II・B

第 2 問

出題範囲	微分・積分
難易度	★★☆☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	(1) 微分と極値の関係について理解しているかを問う問題である。増減表は意味を理解しながら書けるようにしておこう。ただ一度理解した後は、3 次関数に関しては最高次の符号と大体の形の関係は覚えておいてもいいだろう。そうすることで $f'(x) = 0$ となる 2 点のどちらが極大点でどちらが極小点かをいちいち表にまとめなくてもわかるようになり時間の節約となる。 (2) 曲線の接線の方程式と定積分がさらっとできるかがカギとなっている。接線の方程式にちょっと不安がある人は円の接線の方程式と合わせて復習をしておこう。

正解は

ア 3 イ 2 ウ 0 エ ① オ 3 カ − (マイナス) キ 1 ク 1
ケ 3 コ 3 サ 2 シ 3 ス 1 セ − (マイナス) ソ 1 タ 2
チ − (マイナス) ツ 9 テ 4 ト 1 ナ 4 ニ 2 ノ 4 ネ 1
ノ 1

解説

(1)

$f(x) = x^3 - px$ を微分すると $f'(x) = 3x^2 - p$ である。

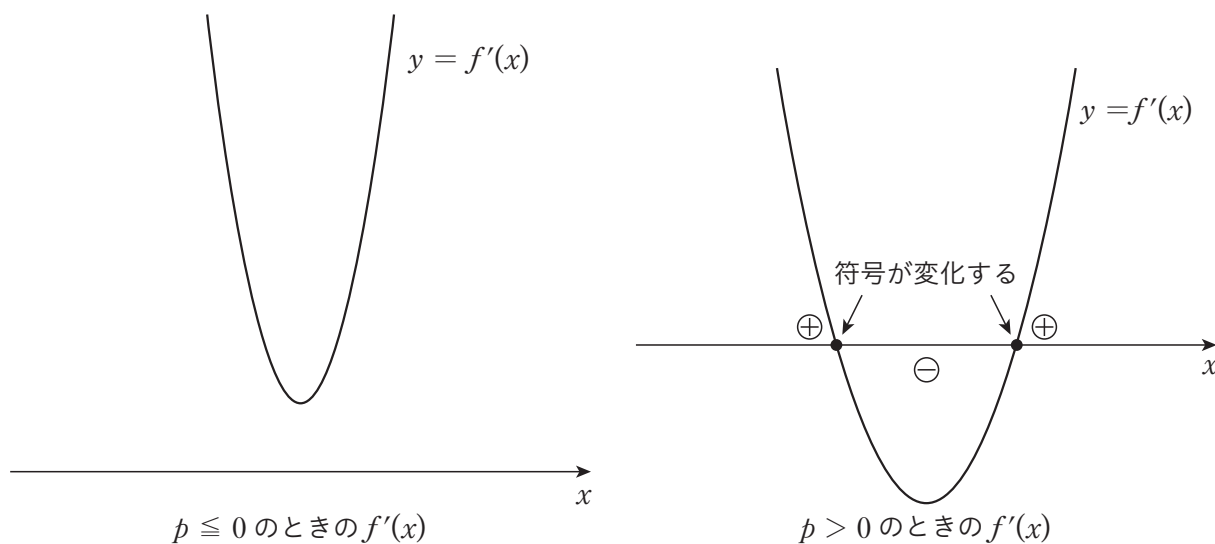
極値をもつ点における接線の傾きは 0 なので、 $x = a$ で極値をもつとすると、 $f'(a) = 3a^2 - p = 0$ が成り立つ。
また、 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるためには、 $x = a$ の前後で $f'(x)$ の符号 (+ と −) が入れ替わることが必要である。

$p \leq 0$ のとき、 $f'(a) \geq 3a^2 \geq 0$ より、 a の値に関係なく常に $f'(a) \geq 0$ であるから、符号は変化しない。

一方、 $p > 0$ では $a = \pm \sqrt{\frac{p}{3}}$ で解をもち、図のように $a = \pm \sqrt{\frac{p}{3}}$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わる。

よって p の満たすべき条件は ① $p > 0$ である。

ア, イ	3, 2
ウ	0
エ	①



(2)

(1)より, $p > 0$ のときに, $f(x)$ は $x = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}$ で極値をとる。

よって, $f(x)$ が $x = \frac{p}{3}$ (> 0) で極値をとるとすると, 次の式が成立している。

$$\sqrt{\frac{p}{3}} = \frac{p}{3}$$

両辺を 2 乗して,

$$\frac{p}{3} = \left(\frac{p}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{p}{3}\left(\frac{p}{3} - 1\right) = 0$$

$p > 0$ であるから,

$$\frac{p}{3} - 1 = 0$$

よって求める p の値は **3** である。

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ であるので, $f(x)$ の増減を表にまとめるとこのようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって $f(x)$ は $x = -1$ で極大値 2 をとり, $x = 1$ で極小値 -2 をとる。

また, $y = f(x)$ の $x = b$ における接線は $y = f'(b)(x - b) + f(b)$ であるので代入すると

$$y = (3b^2 - 3)(x - b) + b^3 - 3b = (3b^2 - 3)x - 2b^3 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

これが点 A(1, -2) を通るので

$$-2 = 3b^2 - 3 - 2b^3 \Leftrightarrow 2b^3 - 3b^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (b-1)^2(2b+1) = 0$$

これを解くと

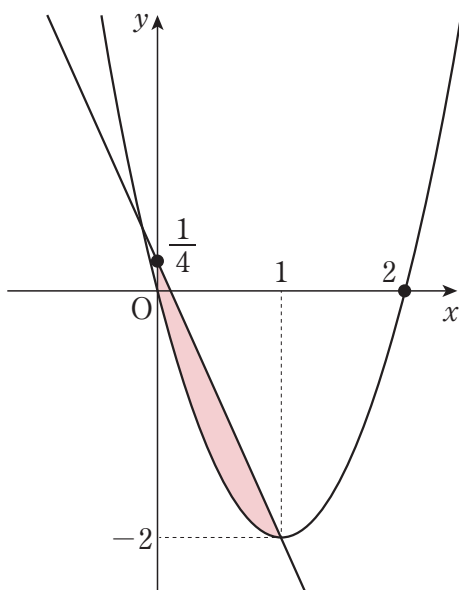
$$b = 1 \text{ または } b = -\frac{1}{2}$$

であるが,

$$f'(1) = 0, f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4} \text{ より, } l \text{ の傾きが } 0 \text{ でない } b = -\frac{1}{2}$$

が問題に適し, ①に代入すると $y = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{4}$ が得られる。

放物線 D の方程式を求めよう。



まず, D は $A(1, -2)$ を頂点とする放物線なので, $y = a(x-1)^2 - 2$ とおくことができる。

これが原点も通るので $(0, 0)$ を代入すると

$$0 = a - 2 \quad \therefore a = 2$$

である。

これより D の方程式は

$$y = 2(x-1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x \quad (= g(x) \text{ とおく})$$

と求められる。

これと $l: y = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{4}$ で囲まれる面積は, l と $g(x)$ との差を $0 \leq x \leq 1$ で積分すればよいので

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{9}{4}x + \frac{1}{4} \right) - g(x) \right\} dx \\
 &= \int_0^1 \left(-2x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{4} \right) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{8}x^2 + \frac{1}{4}x \right]_0^1 \\
 &= \frac{11}{24}
 \end{aligned}$$

オ	3
カキ	-1
ク	1
ケ, コ	3, 3
サ, シ	2, 3
ス	1
$\frac{\text{セソ}}{\text{タ}}$	$\frac{-1}{2}$
$\frac{\text{チツ}}{\text{テ}}$	$\frac{-9}{4}$
$\frac{\text{ト}}{\text{ナ}}$	$\frac{1}{4}$
ニ, ヌ	2, 4
ネノ	11

(制作：上田篤，江崎ゆり子)

2014 年度 センター試験 本試験 数学 II・B

第 3 問

出題範囲	数列
難易度	★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	誘導が非常に丁寧なセンター試験の典型問題である。問題文の誘導の式 1 つひとつを正確に追っていくことができるかがカギである。(1)の a_n は Σ の計算をすることになるが、ここを滞りなくできるようにしておきたい。ただ、計算間違いをしやすい箇所であり、またここで間違ってしまうと(2)以降もすべて間違ってしまうので、 $n = 1$ の場合でも成立する式なのか慎重に検算してみるといいだろう。

正解は

ア 1 イ 5 ウ 2 エ 8 オ 4 カ 5 キ 2 ク 2 ケ 3
 コ 1 サ 6 シ 3 ス 5 セ 2 ソ 1 タ 5 チ 5 ツ 3
 テ 3 ト 6 ナ 3 ニ 3 ヌ 2 ネ 2 ノ 3

解説

(1)

$\{a_n\}$ の階差数列を $A_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと、 $\{A_n\}$ は初項 9、公差 4 の等差数列より

$$A_1 = 9, A_2 = 13, A_3 = 17, \dots$$

となるので

$$a_2 = a_1 + A_1 = 6 + 9 = 15$$

$$a_3 = a_2 + A_2 = 15 + 13 = 28$$

である。

また、 $\{A_n\}$ の一般項は $A_n = 4(n - 1) + A_1 = 4n + 5$ であり、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_{n-1} + A_{n-1} \\
 &= (a_{n-2} + A_{n-2}) + A_{n-1} \\
 &= (a_{n-3} + A_{n-3}) + A_{n-2} + A_{n-1} \\
 &\vdots \\
 &= (a_1 + A_1) + A_2 + \dots + A_{n-1} \\
 &= a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i
 \end{aligned}$$

であるので、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 6 + \sum_{i=1}^{n-1} (4i + 5) = 6 + 4 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) + 5(n-1)$$

$$= 2n^2 + 3n + 1$$

と求められ、これは $n = 1$ のときも満たす。

(2)

②に $n = 1$ を代入して

$$b_2 = \frac{a_1}{a_2 - 1} b_1 = \frac{6}{15 - 1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$$

と求められる。

(1)で求めた a_n の一般項を代入すると

$$b_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1} - 1} b_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{2(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - 1} b_n = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+5)(n+1)} b_n$$

$$= \frac{2n+1}{2n+5} b_n$$

が成り立つ。

両辺を $(2n+3)(2n+5)$ 倍すると

$$(2n+3)(2n+5)b_{n+1} = (2n+1)(2n+3)b_n$$

よって、 $c_n = (2n+1)b_n$ とおくと

$$(2n+5)c_{n+1} = (2n+3)c_n$$

が成立し、 $d_n = (2n+3)c_n$ とすると上の式は $d_{n+1} = d_n$ とおきかえられる。

$d_n = (2n+3)(2n+1)b_n$ から、 $d_1 = 5 \cdot 3 \cdot b_1 = 6$ より、 $\{d_n\}$ のすべての項は 6 である。

このとき、 $6 = (2n+3)c_n$ より

$$c_n = \frac{6}{2n+3}$$

$c_n = (2n+1)b_n$ であったから、

$$b_n = \frac{6}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{3}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}$$

と変形できるので $\{b_n\}$ の各項の総和 S_n は

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n$$

$$= 3 \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right\}$$

$$= 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{2n}{2n+3}$$

と、うまく消し合って求められる。

アイ	15
ウエ	28
オ、カ	4, 5
キ、ク、ケ、コ	2, 2, 3, 1

サ シス	$\frac{6}{35}$
セ、ソ	2, 1
タ	5
チ	5
ツ	3
テ	3
ト	6
ナ	3
ニ	3
ヌ	2
ネ、ノ	2, 3

(制作：上田篤，江崎ゆり子)

2014 年度 センター試験 本試験 数学 II・B

第 4 問

出題範囲	ベクトル
難易度	★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	三角錐の体積を段階的に求めていく問題である。空間ベクトルの場合は一般的に図がイメージしづらく、描くのが難しいのかもしれないところであるが、部分的にでも描いてみると少しは手助けになるだろう。空間ベクトルにおいて頻出であるのが平行四辺形であり、対辺のベクトルが等しいことは必ずと言っていいほど利用するので常に心にとめておいてもらいたい。三角錐の体積に関しては、内積と外積をうまく用いて直接求める方法もあるので、興味がある人は調べてみるといいだろう。

正解は

ア − (マイナス) イ 1 ウ 0 エ 2 オ ③ カ 1 キ 2 ク 2
 ケ 0 コ 5 サ 1 シ 4 ス 7 セ 0 ソ 0 タ 2
 チ − (マイナス) ツ 5 テ 3 ト 9 ナ 3 ニ 5 ヌ 3 ネ 7
 ノ 0 ハ 3 ヒ 5 フ 1

解説

(1)

K は OD を 2 : 1 に内分する点なので

$$\overrightarrow{OK} = \frac{2}{2+1}\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$$

である。

L は OA を 1 : 2 に内分する点なので

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{1+2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$$

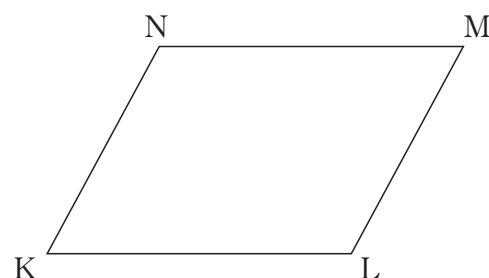
となる。よってこれらを成分表示すると

$$\overrightarrow{OK} = (0, 0, 2) \quad \overrightarrow{OL} = (1, 0, 0)$$

なので

$$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OL} = (-1, 0, 2)$$

平行四辺形の対辺の長さは等しく、平行であるので図より $\overrightarrow{LK} = \textcircled{3} \overrightarrow{MN}$ である。



$\overrightarrow{OM} = (3, 3, s)$, $\overrightarrow{ON} = (t, 3, 3)$ としたとき, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LK}$ より

$$(t - 3, 0, 3 - s) = (-1, 0, 2)$$

これを解くと

$$\begin{cases} s = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

とわかる。

このとき $\overrightarrow{FN} = (-1, 0, 0)$, $\overrightarrow{NG} = (-2, 0, 0)$ より N は FG を 1 : 2 に内分している。

$\overrightarrow{LM} = (2, 3, 1)$ より

$$\begin{cases} \overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{LM} = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 0 \\ |\overrightarrow{LK}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\ |\overrightarrow{LM}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} \end{cases}$$

である。

$\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{LM}$ が 0 に等しいことから, これらは直交しており, 四角形 KLMN は長方形であるとわかるので, 面積 S は,

$$S = |\overrightarrow{LK}| |\overrightarrow{LM}| = \sqrt{70}$$

である。

アイ -1

ウ 0

エ 2

オ ③

カ 1

キ 2

ク 2

ケ 0

$\sqrt{5}$ $\sqrt{5}$

$\sqrt{14}$ $\sqrt{14}$

$\sqrt{70}$ $\sqrt{70}$

◆参考

平行四辺形の面積

先の問題においては 2 つのベクトルが直交していたので, 簡単に平行四辺形の面積を求めることができたが, 一般の平行四辺形ではそう簡単にはいかない。

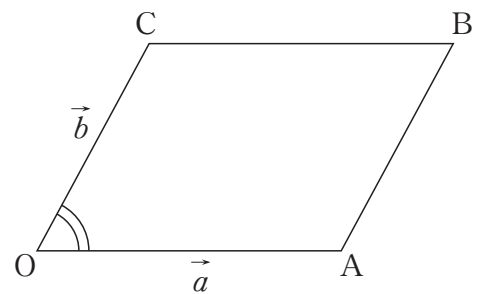
右図のような平行四辺形の場合, 面積は挟角 θ を用いて

$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ と表される。

ここで $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ であることと $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ であることに注意すると,

$$S = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

と書けるので, 一般の平行四辺形の場合にも対応できる。



(2)

$\overrightarrow{OP} = (p, q, r)$ とおくと, $\overrightarrow{OP}$ は平面 α 上のすべてのベクトルと直交するので

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LM} = 0$$

それぞれ計算すると

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LK} = -p + 2r = 0 \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LM} = 2p + 3q + r = 0 \end{cases}$$

となる。

これを解けば, $p = 2r$, $q = -\frac{5}{3}r$ である。これより $\overrightarrow{OP}$ は r だけを用いて $\overrightarrow{OP} = \left(2r, -\frac{5}{3}r, r\right)$ と表せる。

したがって,

$$\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OP} = (1, 0, 0) - \left(2r, -\frac{5}{3}r, r\right) = \left(1 - 2r, \frac{5}{3}r, -r\right)$$

である。

P は平面 α 上の点なので $\overrightarrow{PL}$ もまた $\overrightarrow{OP}$ と直交する。よって

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PL} = 2r \cdot (1 - 2r) + \left(-\frac{5}{3}\right)r \cdot \frac{5}{3}r + r \cdot (-r) = \frac{2r(9 - 35r)}{9} = 0$$

より

$$r = \frac{9}{35}$$

である。このとき,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &= \sqrt{(2r)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 r^2 + r^2} = \sqrt{\frac{70}{9}} r = \frac{\sqrt{70}}{3} \cdot \frac{9}{35} \\ &= \frac{3\sqrt{70}}{35} \end{aligned}$$

とわかる。

$\triangle LMN$ の面積は, 平行四辺形 $KLMN$ の面積の半分なので, $\frac{\sqrt{70}}{2}$ である。

三角錐 $OLMN$ の体積は $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$ であり, 高さは $|\overrightarrow{OP}|$ なの
で, 体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{70}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{70}}{35} = 1$$

と求めることができる。

ソ	0
タ	2
チツ テ	$-\frac{5}{3}$
ト ナニ	$\frac{9}{35}$
又 $\sqrt{\text{ネノ}}$ ハヒ	$\frac{3\sqrt{70}}{35}$
フ	1

(制作: 上田篤, 江崎ゆり子)

2014 年度 センター試験 本試験 数学 II・B

第 5 問

出題範囲	確率分布と統計
難易度	★★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	(1)は計算ミスをしないように慎重に求めることができれば問題ない。相関図は慣れないうちは読み取るのが難しいので最大値，最小値，相関図どうしの違いなどに注目して素早く読み解く練習をするとよいだろう。(3)以降はやや難しめである。平均から得点合計へ戻したり，分散から「平均からの偏差の 2 乗和」に戻すという操作に慣れていることが求められている。やみくもに計算しては時間がかかってしまうので，楽をできないか考えてから計算にかかれるようになれば上級者である。

正解は

ア 1 イ 4 ウ 1 エ 0 オ 0 カ 0 キ 3 ク 2 ケ 4
コ 1 サ 8 シ 1 ス 4 セ ⑨ ソ 1 タ 5 チ 0 ツ 5
テ 8 ト ④ ナ ①

解説

(1)

生徒 9 人の英語の平均値が 16 点であるから，

$$9 + 20 + 18 + 18 + A + 18 + 14 + 15 + 18 = 16 \times 9$$

したがって， $A = 14$ 点である。

また，英語の得点の分散 B は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \{ & (9 - 16)^2 + (20 - 16)^2 + (18 - 16)^2 + (18 - 16)^2 + (14 - 16)^2 \\ & + (18 - 16)^2 + (14 - 16)^2 + (15 - 16)^2 + (18 - 16)^2 \} = 10.00 \end{aligned}$$

である。

また，生徒 9 人の数学の平均値が 15 点であるから，

$$15 + 20 + 14 + 17 + 8 + C + D + 14 + 15 = 15 \times 9$$

したがって， $C + D = 32$ である。

また，分散は数学と英語ともに 10 であるから，標準偏差は数学と英語ともに $\sqrt{10}$ である。

ここで共分散を S_{xy} とすると、相関係数 0.500 であるから、相関係数の式より

$$0.500 = \frac{S_{xy}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}$$

したがって、 $S_{xy} = 5$ である。

ところで、英語の得点を x_i 、数学の得点を y_i とすると（英語の平均点が 16、数学の平均点が 15 であることに注意して）、共分散の定義より

$$S_{xy} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (x_i - 16)(y_i - 15)$$

実際に計算すると、

$$\begin{aligned} 5 = \frac{1}{9} \{ & (9-16)(15-15) + (20-16)(20-15) + (18-16)(14-15) \\ & + (18-16)(17-15) + (14-16)(8-15) + (18-16)(C-15) \\ & + (14-16)(D-15) + (15-16)(14-15) + (18-16)(15-15) \} \end{aligned}$$

これを計算すると、 $C - D = 4$ が得られる。

以上より

$$\begin{cases} C = \frac{32+4}{2} = 18 \\ D = 18 - 4 = 14 \end{cases}$$

である。

アイ	14
ウエ.オカ	10.00
キク	32
ケ	4
コサ	18
シス	14

(2)

相関図の細部の違いに着目することで正解を絞り込もう。

例えば、数学が 8 点の生徒は英語が 14 点であるから、図①と図②は矛盾する。また数学が 18 点の生徒は英語も 18 点であるから（もしくは、数学が 18 点かつ英語が 14 点の生徒はいないから）、図③は矛盾する。したがって、正解は図④でしかあり得ない。

セ ④

(3)

生徒 9 までの英語の得点の合計は $16 \times 9 = 144$ 点なので、生徒 10 の得点を加えると 150 点となる。

よって、

$$E = \frac{150}{10} = 15.0$$

同様に、生徒 9 までの数学の点数の合計は $15 \times 9 = 135$ 点で、生徒 10 の得点を加えると 140 点なので、

$$F = 140 - 135 = 5$$

とわかる。

ソタ.チ	15.0
ツ	5

(4)

点数が平均値の人が抜けても平均値は変化しないので英語が 15 点、数学が 14 点の生徒 8 が転出したと考えられる。分散 v は

$$v = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 15)^2$$

であり、生徒 8 を除いた分散 v' は $x_8 = 15$ に注意すると、

$$v' = \frac{1}{9} \left[\left\{ \sum_{i=1}^{10} (x_i - 15)^2 \right\} - (x_8 - 15)^2 \right] = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 15)^2 = \frac{10}{9} v$$

よって、

$$\frac{v'}{v} = \frac{10}{9}$$

である。

同様に数学の分散 w , w' も $\frac{w'}{w} = \frac{10}{9}$ であり、共分散 c , c' も $\frac{c'}{c} = \frac{10}{9}$ である。
相関係数 r , r' は

$$r = \frac{c}{\sqrt{vw}}, \quad r' = \frac{c'}{\sqrt{v'w'}}$$

と表せるので、

$$\frac{r'}{r} = \frac{c'}{c} \cdot \sqrt{\frac{vw}{v'w'}} = 1$$

①と求められる。

テ	8
ト	④
ナ	①

(制作：上田篤，江崎ゆり子)