2014 年度 センター試験 本試験 数学 I･A

第 1 問

〔1〕

出題範囲	数と式
難易度	★☆☆☆☆
所要時間	6 分
傾向と対策	第 1 問〔1〕としては，例年通り無理数・分数のほとんど純粋な計算問題が出題された。唯一頭を悩ませるところがあるとすれば，(2)での 2 式の処理をどうするかといったところだろうが，b を消去すればよいことは容易に思いつけるだろう。 (1)　無理数の計算問題である。分母の有理化，分数の通分といった基本的な操作をミスせずに素早くこなすことが求められている。 (2)　問題文で $ab = \boxed{\text{ア}}$ と $a^2 + b^2 + 4(a + b) = \boxed{\text{ケコ}}$ の 2 つの式が与えられている。a，b の 2 文字の式が 2 式あるので，片方の文字を消去できる。今回は問題文に a のみで表された式があるので，b を消去すればよい。

〔1〕　正解は

ア　2　　イ　2　　ウ　−（マイナス）　　エ　1　　オ　6　　カ　8　　キ　3　　ク　6

ケ　1　　コ　6　　サ　4　　シ　1　　ス　6　　セ　8　　ソ　4

解説

(1)

$$ab = \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-3}{1-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\begin{aligned}
a + b &= \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + \frac{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1-2} + \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1-2} \\
&= \frac{2-2\sqrt{6}}{-1} \\
&= -2+2\sqrt{6} \\
&= 2(-1+\sqrt{6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab \\ &= \{2(-1+\sqrt{6})\}^2-2\cdot 2 \\ &= 24-8\sqrt{6} \\ &= 8(3-\sqrt{6}) \end{aligned}$$

ア	**2**
イ(ウエ＋$\sqrt{オ}$)	**2(−1＋$\sqrt{6}$)**
カ(キ－$\sqrt{ク}$)	**8(3－$\sqrt{6}$)**

別解

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{2})^2}+\frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}+\frac{4-2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{2}} \\ &= \frac{(4+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{2})+(4-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} \\ &= \frac{(12+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}-4\sqrt{6})+(12-6\sqrt{3}+8\sqrt{2}-4\sqrt{6})}{9-8} \\ &= 24-8\sqrt{6} \\ &= 8(3-\sqrt{6}) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} a^2+b^2+4(a+b) &= 8(3-\sqrt{6})+4\cdot 2(-1+\sqrt{6}) \\ &= 24-8\sqrt{6}+(-8)+8\sqrt{6} \\ &= 16 \quad \cdots\cdots① \end{aligned}$$

また，$ab=2$

$$b=\frac{2}{a} \quad \cdots\cdots②$$

②を①に代入して

$$a^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2+4\left(a+\frac{2}{a}\right)=16 \iff a^2+4a-16+\frac{8}{a}+\frac{4}{a^2}=0$$

両辺に a^2 をかけて

$$a^4+4a^3-16a^2+8a+4=0$$

ケコ	**16**
サ，シス，セ，ソ	**4，16，8，4**

〔2〕

出 題 範 囲	集合と論理
難　易　度	★☆☆☆☆
所 要 時 間	7 分
傾向と対策	本問は，集合や論理の問題としてはとても易しいものである。各集合の要素は限られた範囲の自然数なので理解しやすく，各集合どうしの論理関係も把握しやすい。各集合の要素をすべて書き出していくなりして，正確に把握して取り組んでほしい。

〔2〕　正解は

タ　1　　チ　0　　ツ・テ　⓪・④（順不同）　　ト・ナ　①・④（順不同）

解説

(1)

$U=\{n \mid n$ は $5<\sqrt{n}<6$ を満たす自然数$\}$ より，

$$\sqrt{25}<\sqrt{n}<\sqrt{36} \quad \Leftrightarrow \quad 25<n<36$$

よって自然数 n は 26，27，28，29，30，31，32，33，34，35 の **10** 個

タチ　**10**

(2)

(1)の U の各要素のうち，P，Q，R，S に含まれる要素を書き出す。

$$\begin{aligned} P&=\{28,\ 32\} & \overline{P}&=\{26,\ 27,\ 29,\ 30,\ 31,\ 33,\ 34,\ 35\} \\ Q&=\{30,\ 35\} & \overline{Q}&=\{26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\} \\ R&=\{30\} & \overline{R}&=\{26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35\} \\ S&=\{28,\ 35\} & \overline{S}&=\{26,\ 27,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\} \end{aligned}$$

よって，

⓪　$P\cap R=\phi$　　①　$P\cap S=\{28\}$　　②　$Q\cap R=\{30\}$　　③　$P\cap\overline{Q}=\{28,\ 32\}$

④　$R\cap\overline{Q}=\phi$

空集合なのは，⓪ $\boldsymbol{P\cap \mathrm{R}=\phi}$ と④ $\boldsymbol{R\cap\overline{Q}=\phi}$

ツ・テ　**⓪・④（順不同）**

(3)

⓪

$$P\cup R=\{28,\ 30,\ 32\}$$
$$\overline{Q}=\{26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\}$$

$P\cup R$ の要素である 30 が $\overline{Q}$ に含まれていないので，$P\cup R\not\subset\overline{Q}$

①

$$S \cap \overline{Q} = \{28\}$$
$$P = \{28,\ 32\}$$

$S \cap \overline{Q}$ のいずれの要素も P に含まれるので，$S \cap \overline{Q} \subset P$

②

$$\overline{Q} \cap \overline{S} = \{26,\ 27,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\}$$
$$\overline{P} = \{26,\ 27,\ 29,\ 30,\ 31,\ 33,\ 34,\ 35\}$$

$\overline{Q} \cap \overline{S}$ の要素である 32 が $\overline{P}$ に含まれないので，$\overline{Q} \cap \overline{S} \not\subset \overline{P}$

③

$$\overline{P} \cup \overline{Q} = \{26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35\}$$
$$\overline{S} = \{26,\ 27,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\}$$

$\overline{P} \cup \overline{Q}$ の要素である 28 が $\overline{S}$ に含まれないので，$\overline{P} \cap \overline{Q} \not\subset \overline{S}$

④

$$\overline{R} \cap \overline{S} = \{26,\ 27,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\}$$
$$\overline{Q} = \{26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34\}$$

$\overline{R} \cap \overline{S}$ のいずれの要素も $\overline{Q}$ に含まれるので，$\overline{R} \cap \overline{S} \subset \overline{Q}$

以上より，正解は①と④

ト・ナ　①・④（順不同）

◆確認

集合

範囲がはっきりしたものの集まりを**集合**といい，それを構成している 1 つひとつのものをその集合の**要素**という。例えば集合 A を 1 桁の自然数（すなわち 1，2，3，…，9）の集合とすると 5 はその集合の要素であり 5 は集合 A に**属する**という。一方 10 は 2 桁の自然数なので集合 A に**属さない**。これらのことを記号を用いて以下のように表すことができる。

$$5 \in A,\ 10 \notin A$$

集合自体の定義も記号を用いて表すことができる。例えば集合 A であれば

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

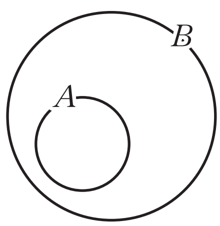
または

$$A = \{x \mid x \text{ は 1 桁の自然数}\}$$

と表すことができる。ここで括弧の内部は，まず縦線の左側で要素の代表（今回の例では x）を，右側でその x が満たすべき条件を記してある。

特に集合に要素が 1 つもないときはその集合を**空集合**といい ϕ で表す。

集合 B があり，集合 A の要素がすべて集合 B に含まれるとき集合 A を集合 B の**部分集合**といい，記号を用いて



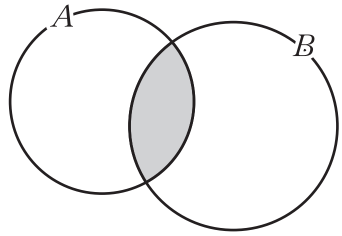
$$\boldsymbol{A \subset B}$$

で表される。特に集合 A と集合 B が完全に一致するとき A と B は**等しい**といい，

$$\boldsymbol{A = B}$$

と表す。

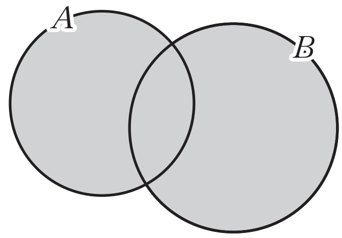
共通部分・和集合・補集合



集合 A と集合 B が共通の要素をもつとき，その共通の要素を集めた集合を **A と B の共通部分**といい，記号を用いて

$$\boldsymbol{A \cap B} = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

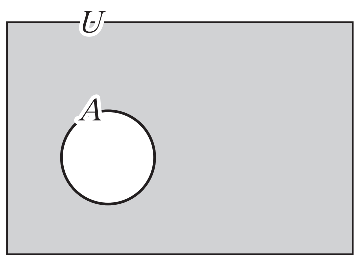
と表す。



また，集合 A か集合 B の少なくともどちらか片方には含まれている要素を集めた集合を **A と B の和集合**といい，

$$\boldsymbol{A \cup B} = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

と表す。



$A \subset U$ となるような集合 U があるとき，集合 U の要素のうち A に含まれない要素を集めた集合を A の**補集合**といい，

$$\boldsymbol{\overline{A}} = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \notin A\}$$

と表す。

ド・モルガンの法則

集合 A，B と条件 p，q があるとき次の法則が成り立つ。

$$\boldsymbol{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}} \qquad \boldsymbol{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

$$\boldsymbol{\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}} \qquad \boldsymbol{\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}}$$

逆・対偶・裏

命題 $p \Rightarrow q$ に対して

$$q \Rightarrow p \text{ を}\textbf{逆}，\ \overline{q} \Rightarrow \overline{p} \text{ を}\textbf{対偶}，\ \overline{p} \Rightarrow \overline{q} \text{ を}\textbf{裏}$$

という。

命題と対偶の真偽は常に一致する。これを利用すると，命題が証明しやすくなることもある。

また命題 $p \Rightarrow q$ が真のとき q は p であるための**必要条件**であり，p は q であるための**十分条件**であるという。特に命題の逆 $q \Rightarrow p$ も真のとき q は p であるための**必要十分条件**である。このとき p と q は**同値**であるといい，$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$ と書く。

（制作：王力捷，河合敬宏）

2014 年度 センター試験 本試験 数学 I･A

第 2 問

出題範囲	2 次関数
難易度	★★★☆☆
所要時間	15 分
傾向と対策	標準的な 2 次関数の問題である。軸や端点の位置に気を付けて，最大値や最小値をとる値がどこになるかを考察する。最後の設問については，判別式が正という条件からわかる a に関する条件を見落とさないように気を付けよう。

正解は

ア －（マイナス）	イ 2	ウ 6	エ 3	オ 6	カ 3	キ －（マイナス）
ク 1	ケ 4	コ 8	サ －（マイナス）	シ 3	ス ③	セ ③
ソ 6	タ 1	チ －（マイナス）	ツ 3	テ 9	ト 6	ナ 3
ニ 6	ヌ －（マイナス）	ネ 3	ノ ③	ハ ①	ヒ －（マイナス）	フ 7
ヘ 3						

解説

$$y = x^2 + 2ax + 3a^2 - 6a - 36 \quad \cdots\cdots ①$$
$$\Leftrightarrow \quad y = (x + a)^2 + (2a^2 - 6a - 36)$$

よって，G は頂点の座標が $(-a,\ 2a^2 - 6a - 36)$ である下に凸な放物線。

また，y 軸との交点の y 座標 p は，①の右辺に $x = 0$ を代入して，

$$p = 3a^2 - 6a - 36$$

ア，イ，ウ，エオ	－，2，6，36

(1)

$p = -27$ のとき，

$$-27 = 3a^2 - 6a - 36 \quad \Leftrightarrow \quad 3(a - 3)(a + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3,\ -1$$

$a = 3$ のとき，頂点の座標は，$(-3,\ -36)$，

$a = -1$ のとき，頂点の座標は，$(1,\ -28)$ であるので，

$a = 3$ のときのグラフを x 軸方向に $1-(-3) = 4$，y 軸方向に $-28-(-36)=8$ だけ平行移動すると，$a = -1$ のときの①のグラフに一致する。

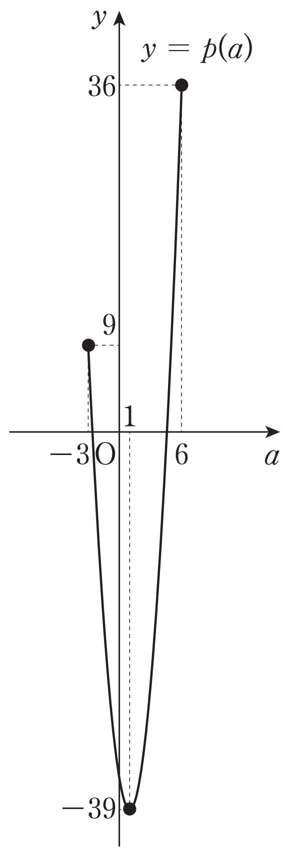
カ，キク	3，－1
ケ	4
コ	8

(2)

G が x 軸と共有点をもつとき，頂点の y 座標は 0 以下であるので，

$$2a^2-6a-36 \leqq 0 \iff 2(a+3)(a-6)\leqq 0 \iff -3 \leqq a \leqq 6$$

$p=3a^2-6a-36=3(a-1)^2-39$ であるので，p を a の関数と見ると，グラフの形は図の通り。



図より，a が $-3\leqq a\leqq 6$ を動くとき，p は $a=1$ で最小値 $p(1)=-39$ をとり，$a=6$ で最大値 $p(6)=36$ をとる。

①に $y=0$ を代入してできる x の 2 次方程式 $x^2+2ax+3a^2-6a-36=0$ が解をもつとき，その解は，解の公式より，$x=-a\pm\sqrt{-2a^2+6a+36}$ である。これらは G と x 軸との共有点の x 座標であり，これらのすべてが -1 より大きくなるとき，

$$\begin{aligned}
&-a-\sqrt{-2a^2+6a+36}>-1 \quad \text{かつ} \quad -3\leqq a\leqq 6\\
\iff& \sqrt{-2a^2+6a+36}<-a+1 \quad \text{かつ} \quad -3\leqq a\leqq 6\\
\iff& -2a^2+6a+36<a^2-2a+1 \quad \text{かつ} \quad -a+1>0\\
& \quad \text{かつ} \quad -3\leqq a\leqq 6\\
\iff& 3a^2-8a-35>0 \quad \text{かつ} \quad a<1 \quad \text{かつ} \quad -3\leqq a\leqq 6\\
\iff& (a-5)(3a+7)>0 \quad \text{かつ} \quad -3\leqq a<1\\
\iff& \left(a<-\frac{7}{3} \quad \text{または} \quad 5<a\right) \quad \text{かつ} \quad -3\leqq a<1\\
\iff& -3\leqq a<-\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

別解

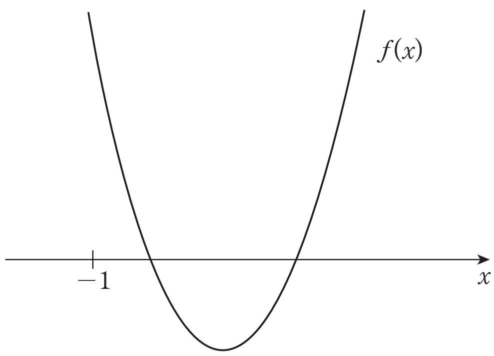
また，

$$f(x)=x^2+2ax+3a^2-6a-36$$

とおけば G が x 軸と共有点をもつ条件，$-3\leqq a\leqq 6$ に加えて

$$\begin{cases}(\text{軸})>-1 & \cdots\cdots② \\ f(-1)>0 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

が成り立てばよい。



サシ	**−3**
ス，セ	③，③
ソ	**6**
タ	**1**
チツテ	**−39**
ト	**6**
ナニ	**36**
ヌネ	**−3**
ノ，ハ	③，①
$\frac{ヒフ}{ヘ}$	$\frac{-7}{3}$

①より

$$-a > -1 \quad \therefore \quad a < 1 \quad \cdots\cdots ①'$$

②より

$$1 - 2a + 3a^2 - 6a - 36 > 0$$
$$3a^2 - 8a - 35 > 0$$
$$(a - 5)(3a + 7) > 0$$
$$\therefore \quad a < -\frac{7}{3},\ 5 < a \quad \cdots\cdots ②'$$

$-3 \leqq a \leqq 6$，①′，②′の共通範囲を求めて

$$-3 \leqq a < -\frac{7}{3}$$

（制作：沈有程，河合敬宏）

2014 年度 センター試験 本試験 数学 I·A

第 3 問

出 題 範 囲	図形と計量
難 易 度	★★★☆☆
所 要 時 間	15 分
傾向と対策	標準的な図形の問題である。相似な図形や二等辺三角形が多いので，これらの性質をうまく使って問題を解き進める。最後の設問が若干トリッキーであるが，わかる条件や角度をすべて図に書き込んでいけば自然と答えが浮かび上がってくるだろう。注目している線分を辺として含む図形を中心に考えていけばよい。

正解は

ア 4	イ 7	ウ 8	エ 1	オ 5	カ 8	キ 8	ク 1	ケ 5
コ 1	サ 5	シ 8	ス 3	セ 2	ソ 1	タ 0	チ 3	ツ 2
テ 1	ト 0	ナ 5	ニ 5	ヌ 8	ネ ④			

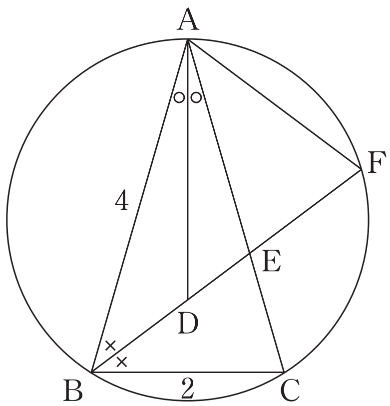
解説

△ABC について，余弦定理より，

$$\mathrm{CA}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos \angle \mathrm{ABC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{CA}^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{CA}^2 = 16$$



よって，

$$\mathrm{CA} = 4 \quad (\mathrm{CA} > 0 \text{ より})$$

さらに余弦定理より，

$$\cos \angle \mathrm{BAC} = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}} = \frac{4^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{7}{8}$$

また，$\sin \angle \mathrm{BAC} > 0$ より，

$$\sin \angle \mathrm{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2 \angle \mathrm{BAC}} = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2R \iff R=\frac{BC}{2\sin\angle BAC}=\frac{2}{2\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}}=\frac{8\sqrt{15}}{15}$$

ア	4
$\frac{イ}{ウ}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{\sqrt{エオ}}{カ}$	$\frac{\sqrt{15}}{8}$
$\frac{キ\sqrt{クケ}}{コサ}$	$\frac{8\sqrt{15}}{15}$

(1)

角の二等分線の定理より，

$$AE:EC=AB:BC=4:2=2:1$$

よって，点 E は線分 AC を 2：1 に内分するので，

$$AE=\frac{2}{3}AC=\frac{8}{3}$$

△ABE について余弦定理より，

$$BE^2=AB^2+AE^2-2\cdot AB\cdot AE\cdot\cos\angle BAC$$
$$\iff BE^2=4^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\cdot4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{8}$$
$$\iff BE^2=\frac{40}{9}$$

よって，

$$BE=\frac{2\sqrt{10}}{3}\quad(BE>0\text{ より})$$

別解

$EC=\frac{1}{3}AC=\frac{4}{3}$ であり，BE は ∠ABC の角の二等分線なので

$$BE^2=AB\cdot BC-AE\cdot EC \iff BE^2=8-\frac{32}{9}=\frac{40}{9}$$

よって，

$BE=\frac{2\sqrt{10}}{3}$ （BE > 0 より）（別解終わり）→ $\boxed{+\alpha}$ （次頁）

角の二等分線の定理より，

$$BD:DE=AB:AE=4:\frac{8}{3}=3:2$$

よって，点 D は線分 BE を 3：2 に内分するので，

$$BD=\frac{3}{5}BE=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$\frac{シ}{ス}$	$\frac{8}{3}$
$\frac{セ\sqrt{ソタ}}{チ}$	$\frac{2\sqrt{10}}{3}$
$\frac{ツ\sqrt{テト}}{ナ}$	$\frac{2\sqrt{10}}{5}$

(2)

∠BEC ＝ ∠AEF，∠EBC ＝ ∠EAF より，

$$\triangle \mathrm{EBC} \backsim \triangle \mathrm{EAF}$$

相似比は $\mathrm{EB} : \mathrm{EA} = \dfrac{2\sqrt{10}}{3} : \dfrac{8}{3} = \sqrt{10} : 4$

よって，面積比は $(\sqrt{10})^2 : 4^2 = 5 : 8$

以上より，△EBC の面積は△EAF の面積の $\dfrac{5}{8}$ 倍である。

$\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$　$\dfrac{5}{8}$

(3)

FA と FC について，それぞれが対応する円周角は $\angle \mathrm{ABF} = \angle \mathrm{CBF}$ で等しいので，

$$\mathrm{FA} = \mathrm{FC}$$

円周角の定理より，$\angle \mathrm{CBF} = \angle \mathrm{CAF}$ なので，

$$\angle \mathrm{FAD} = \angle \mathrm{DAC} + \angle \mathrm{CAF} = \angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{CBF} = \angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{FDA}$$

よって，△FAD は二等辺三角形であり，$\mathrm{FA} = \mathrm{FD}$

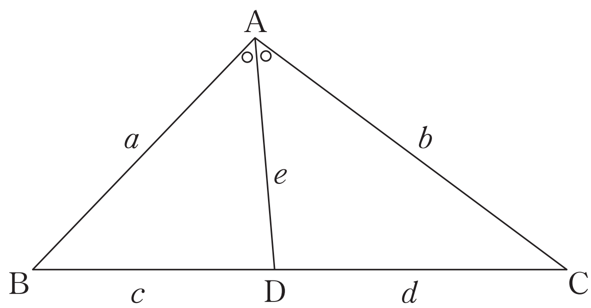
以上より，

④ **FA ＝ FC ＝ FD**

ネ　④

＋α

(1)の別解では，以下の定理を用いた。



△ABC において，∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とし，上図のように各辺の長さをおくと，以下の関係式が成り立つ。

$$e^2 = ab - cd$$

この関係式を，一部数学 II の知識を用いて証明する。興味のある人は読むとよいだろう。

（証明）

△ABC の面積 ＝ △ABD の面積 ＋ △ACD の面積

より，

$$\frac{1}{2}ab\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}ae\sin\frac{\mathrm{A}}{2} + \frac{1}{2}be\sin\frac{\mathrm{A}}{2}$$

また，2 倍角の公式より

$$\sin\mathrm{A} = 2\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}$$

2 式より，

$$2ab\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}}{2} = (a+b)e\sin\frac{\mathrm{A}}{2}$$
$$2ab\cos\frac{\mathrm{A}}{2} = (a+b)e$$

ここで，△ABD において余弦定理より

$$\cos\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{a^2+e^2-c^2}{2ae}$$

よって，

$$2ab\cdot\frac{a^2+e^2-c^2}{2ae} = (a+b)e$$
$$b(a^2+e^2-c^2) = (a+b)e^2$$
$$ae^2 = b(a^2-c^2)$$
$$e^2 = ab - \frac{bc^2}{a}$$

ここで，

$$a : b = c : d$$
$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

であるから，

$$e^2 = ab - \frac{bc^2}{a} = ab - \frac{d}{c}\cdot c^2 = ab - cd$$

と示せた。

この公式は，特にセンター試験で時間短縮を図るのに有用である。積極的に利用していこう。

（制作：沈有程，河合敬宏）

2014 年度 センター試験 本試験 数学 I･A

第４問

出 題 範 囲	場合の数と確率
難　易　度	★★★☆☆
所 要 時 間	16 分
傾向と対策	2014 年も例年通り第 4 問は場合の数と確率が出題された。ただ，この年のテーマはいつものカードや数字の並び替えなどとは異なり，網目上を点が動くというやや見慣れない形となった。この形式に戸惑った受験生もいたと思われるが，実際はいたって標準的な場合の数の問題である。出発点から経由点，目標点までどのような移動の仕方をしてよいか，どのぐらいの確率でその移動方法が選ばれるのか正確に把握さえすれば何も問題はない。しかし，どの移動方法が存在しうるのか，その移動方法がどのぐらいの確率で選ばれるのか正確に把握することはそれなりに難しく，大きな関門となった。しっかり何回も見直しをして数え忘れがないか確かめたり，途中で解答欄の桁数と，自分が求めた場合の数の桁数が食い違った場合は，即座に前にさかのぼるといった工夫が必要である。

正解は

ア　6	イ　6	ウ　3	エ　6	オ　1	カ　1	キ　2	ク　9	ケ　6
コ　6	サ　3	シ　0	ス　2	セ　9	ソ　0	タ　1	チ　5	ツ　6

＋α

ある点 A からある点 B に移動するとき，どのような種類の移動をそれぞれ何回行えば目的の移動をすることができるか，その場合分けの多少に差はあるもののどれも定めることができる。例えば，(1)，(2)では目的の移動は 1 通りの移動の種類と回数の組み合わせで記述できるし，(4)では 4 通りの移動の種類と回数の組み合わせを場合分けすれば答えを得ることができる。これらの移動の組み合わせを得ることができれば，場合の数の公式 ${}_pC_q$ や ${}_pP_q$，$p!$ などを駆使して場合の数を求めればよい。

また，(3)は各事象が同様に確からしいことを確認して，$(\text{確率})=\dfrac{(\text{該当事象})}{(\text{全事象})}$ という求め方を使ってほしい。

解説

(1)

A から B まで 4 回ちょうどで移動するには，「↙ 3」移動 2 回と「↓ 4」移動 2 回を行えばよい。移動の仕方の総数はこれら 4 回の移動の並べ方の総数に等しいので，求める場合の数は，4 回の移動から「↙ 3」移動を 2 回選ぶと考えると

$_4C_2 = 6$（通り）

ア	6

(2)

A から C まで 3 回ちょうどで移動するには，「↙3」移動 1 回と「↘5」移動 1 回，「↓ 4」移動 1 回を行えばよい。移動の仕方の総数はこれら 3 回の移動の順列の数に等しい。よって，求める場合の数は

$3! = 6$（通り）

イ	6

(3)

A を出発した後 6 回移動するとき，1 回につき 6 方向の移動がありえるので，移動の仕方の総数は 6^6 通り。そのうち，3 回移動が終わった時点で C にいてその後さらに 3 回移動すると D にいる移動の仕方の総数を考える。A → C の移動の仕方は(2)より 6 通り，C → D の移動の仕方も(2)と同様に考えて 6 通りあるので，この場合の A → C → D の移動の仕方は $6 \times 6 = 36$（通り）。

それぞれの移動の仕方は同様に確からしいので，求める確率は

$$\frac{6^2}{6^6} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$$

ウエ	36
$\frac{オ}{カキクケ}$	$\frac{1}{1296}$

(4)

以下，A → D 移動を 6 回ちょうどで移動する移動の仕方の総数を，

(a) 「↑1」移動を含む場合

(b) 「↖2」移動を含む場合

(c) 「↗6」移動を含む場合

(d) 「↙3」移動と「↘5」移動，「↓4」移動のみを含む場合

で場合分けして考える。

(a) 「↑1」移動を含む場合

「↑1」移動を含む移動の仕方は，「↑1」移動 1 回と「↓4」移動 5 回が行われる場合である。これら 6 回の移動の並べ方は

$_6C_1 = 6$（通り）

(b) 「↖2」移動を含む場合

「↖2」移動を含む移動の仕方は，「↖2」移動 1 回と「↘5」移動 1 回，「↓4」移動 4 回が行われる場合である。これらの移動の並べ方は，まず「↖2」移動の順番を決め，次に「↘5」移動の順番を決めるとすると

$_6C_1 \times {}_5C_1 = 30$（通り）

(c) 「↗6」移動を含む場合

「↗6」移動を含む移動の仕方は，「↗6」移動 1 回と「↙3」移動 1 回，「↓4」移動 4 回が行われる場合であ

る。これらの移動の並べ方は，まず「↗6」移動の順番を決め，次に「↙3」移動の順番を決めるとすると

$${}_6C_1 \times {}_5C_1 = 30$$（通り）

(d) 「↙3」移動と「↘5」移動，「↓4」移動のみを含む場合

「↙3」移動と「↘5」移動，「↓4」移動のみを含む移動の仕方は，「↙3」移動 2 回と「↘5」移動 2 回，「↓4」移動 **2** 回が行われるときである。これらの移動の並べ方は，まず 6 回の移動から「↙3」移動の場所を 2 つ選び，残りの 4 回の移動から「↘5」移動の場所を 2 つ選ぶと考えると

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 = \mathbf{90}$$（通り）

以上(a)から(d)を足し合わせて，A → D を 6 回ちょうどで移動する移動の仕方の総数は

$$6 + 30 + 30 + 90 = \mathbf{156}$$（通り）

コ	6
サシ	30
ス	2
セソ	90
タチツ	156

◆**確認**

順列

n 人の生徒を一列に並べるときの場合の数は $n!$ である。ここで $n!$ は n の階乗（かいじょう）と読み

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

で定義される。つまり 1 から n までを順番に掛け合わせたものである。また，n 人の生徒のうち r 人を一列に並べる場合の数は ${}_nP_r$ で表される。ここで ${}_nP_r$ とは

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

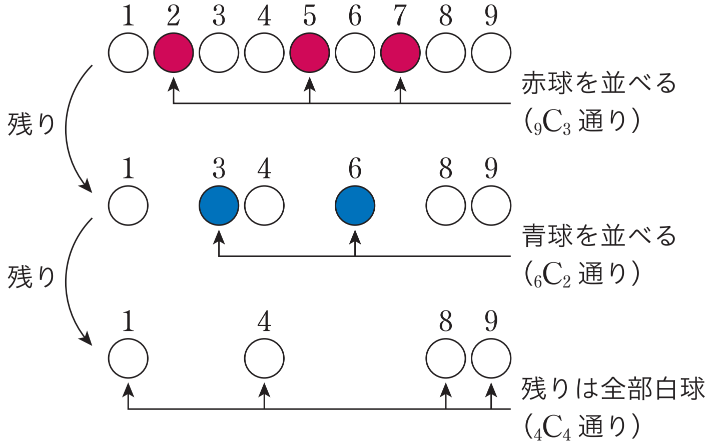
で定義される。つまり n から数えて大きい方から r 個掛け合わせたものである。

組み合わせ

n 人の生徒を並べるのではなく，選ぶ場合は ${}_nC_r$ を使う。つまり n 人の中から異なる r 人を選ぶ時の場合の数は ${}_nC_r$ で表される。ここで ${}_nC_r$ とは

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

で定義される。計算する際は最右辺の表現方法で計算するといいだろう。これはとても便利であり，例えば赤球 3 個，青球 2 個，白球 4 個の並べ方の総数を知りたい場合も，総数が ${}_9C_3 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 = 1260$ 通りと瞬時に求めることができるようになる。考え方としては，全部で 9 個の中からまず赤球 3 個のポジションを選び，残りの 6 個の場所からさらに青球 2 個のポジションを選び，最後に残りの位置に白球を並べるというふうにしていくと上の式の結果となる。



$\longrightarrow {}_9C_3 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 = 1260$ 通り

（制作：沈有程，河合敬宏）